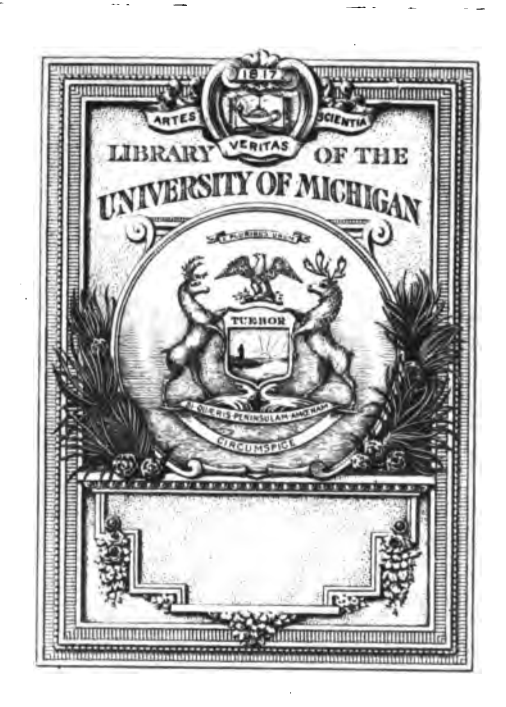

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

Theoretisch-praktisches
Handbuch
der
ebenen und sphärischen
Trigonometrie,

mit

zahlreichen Anwendungen derselben auf reine und praktische Geometrie, physische Astronomie, geographische Ortsbestimmung und höhere Geodäsie, so wie Untersuchungen über den Einfluss der Beobachtungsfehler und die Mittel, denselben zu vermindern.

Von

Dr. J. Dienger,

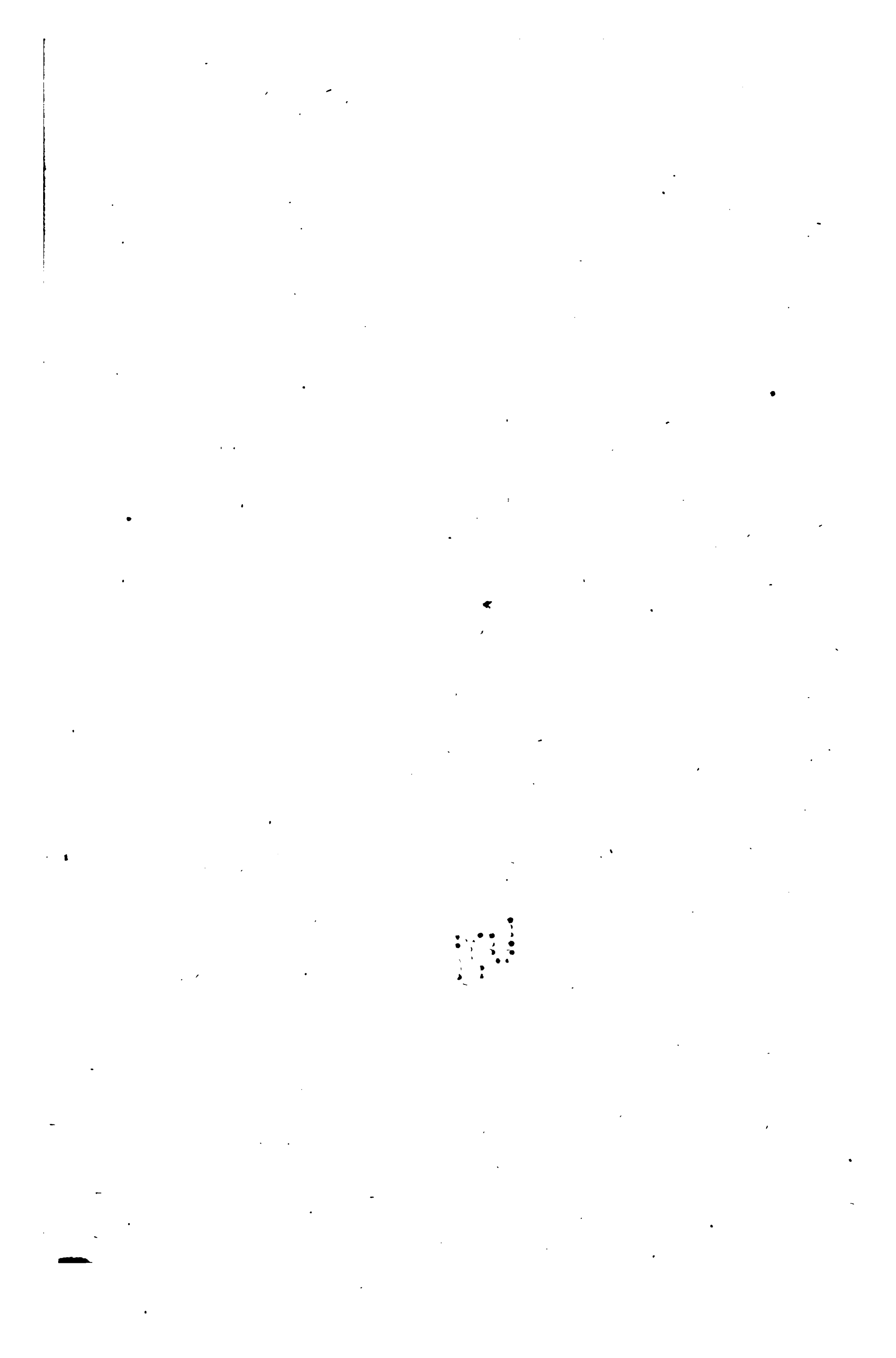
Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Mit 81 in den Text eingedruckten Figuren in Holzschnitt.

Stuttgart.

Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.

1855.



Vorwort.

Hiemit übergebe ich dem mathematischen Publikum das bereits im Vorwort zu meiner „ebenen Polygonometrie“ angeführte Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, das mit jener einen vollständigen Kursus dieser Zweige der mathematischen Wissenschaften abzuschliessen bestimmt ist. Allerdings sind beide Schriften auch dazu bestimmt, meinen Vorträgen an der hiesigen polytechnischen Schule zu Grunde gelegt zu werden; sie haben aber noch den weitern Zweck, dem weitere Belehrung und Uebung suchenden Anfänger und auch schon etwas Vorgeschrittenen Stoff dazu darzubieten. Ich habe aus diesem Grunde, zumal in dem vorliegenden Buche, den Gegenstand möglichst erschöpfend behandelt, eine Menge Anwendungen gemacht und fast überall ausgerechnete Zahlenbeispiele beigefügt, so wie andere solcher Beispiele zur Uebung vorgelegt. Ich glaube daher, dass ein angehender Mathematiker, der das vorliegende Handbuch gehörig durcharbeitet, nothwendig sowohl in der trigonometrischen Rechnungsweise, als auch im Ansetzen und Auflösen von Aufgaben grosse Fertigkeit erlangen wird. Ueber den Inhalt wird die ausführliche Inhaltsübersicht Auskunft ertheilen, wozu ich nur noch bemerke, dass die mit einem Sternchen bezeichneten §.§. bei einem erstmaligen Durchgehen, ohne wesentliche Beeinträchtigung des Studiums, auch übergangen werden können, so wie unter den Aufgaben eine beliebige Auswahl getroffen werden kann.

Es war früher und ist jetzt noch häufig Sitte, die trigonometrischen Funktionen, nicht wie es hier geschehen als abstrakte Zahlen aufzufassen, sondern man stellte sie als L i n i e n dar und nannte sie desshalb auch trigonometrische Linien. Ich habe diess in der Anmerkung zu §. 5 angedeutet. Würde man dort den Halmesser r willkürlich lassen, so wäre — nach der alten Erklärung — BE der

sinus von BCA, für den Halbmesser r, gewesen. Eine derartige Erklärung aber verwickelt ganz unnöthigerweise in Weitläufigkeiten, die in der einfachsten Weise von der Welt vermieden werden, wenn man die im Buche gebrauchte und angewandte Definition, die auch in den meisten neuern Schriften vorkömmt, annimmt. Freilich wird, selbst in den neuesten Werken, eine Vermischung beider Erklärungsweisen angewandt, die nur zur Verwirrung führen kann; ich habe die einmal gewählte Erklärung entschieden beibehalten, und der Leser wird wohl nie in Versuchung kommen, sich etwas Anderes unter sin A, u. s. w., denken zu müssen, als anfänglich gesagt wurde. — Dass ich mich aber ganz entschieden für diese Art der Definition der trigonometrischen Funktionen ausgesprochen, hat einen doppelten Grund. Zunächst nämlich wird durch die Betrachtung derselben als Linien die Homogeneität der algebraischen Ausdrücke gestört. Wenn (Fig. 1) $BC = AC \sin A$, so kann, da BC, AC Linien sind, sin A nur eine abstrakte Zahl seyn, da sonst nicht beide Seiten von gleicher Dimension wären. Freilich wird man in diesem Falle entgegnen, dass sin A eigentlich durch 1 dividirt sey, so dass man habe $1 . BC = AC . \sin A$. Aber wozu dieser Umweg? — Zweitens verlangt die ganze Analysis ganz entschieden, dass die trigonometrischen Funktionen abstrakte Zahlen seyen. Wenn man aber nun von vorn herein angefangen hat, sie als Linien zu betrachten, so kömmt dadurch Verwirrung in die Begriffe, während nach unserer Erklärung es ganz klar ist, dass jede zwischen -1 und $+1$ liegende Zahl durch sin A dargestellt werden kann u. s. w. (§. 13). Ohnehin würde es in den Anwendungen, z. B. auf Mechanik, ganz sonderbar klingen, wenn man trigonometrische „Linien" einführt. Wenn es dort etwa heisst, der Reibungskoeffizient ist gleich der Tangente des Reibungswinkels, so hätte die alte Betrachtungsweise ganz umständliche Erklärungen und Verdeutlichungen nöthig, um in ihrem Sinne diess klar zu machen, während nach unserer Weise die Sache höchst einfach ist. — Wenn man meint, die trigonometrischen Funktionen mit der Kreislehre in Verbindung bringen zu müssen, so ist diess sicherlich eine Täuschung, und wenn auch die Analysis diess scheinbar thut, so rührt es nur daher, dass sie die Winkel durch die Längen von Kreisbögen misst, die man mit einem Halbmesser $= 1$ zwischen ihren Seiten beschreibt.

Die Untersuchung über die Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen für die verschiedenen Winkel, wie sie in §. 9 gegeben wurde, ist natürlich von grösster Wichtigkeit für die ganze Theorie, da erst diese Untersuchung das Wesen der hier zu behandelnden Funktionen näher erforscht. So wie sie im Buche geführt ist, erschien sie mir als die sich am unmittelbarsten darbietende, und sie ist wohl auch überzeugend genug, besonders wenn man beachtet, dass in allem Folgenden die hier gefundenen Resultate als nothwendig erscheinen. Man hat allerdings auch andere Wege eingeschlagen, um dasselbe Ziel zu erreichen, von denen ich nur zwei berühren will. Der eine stützt sich auf die Grundanschauungen der analytischen Geometrie, und ich habe ihn in der Anmerkung zu §. 5 meiner „ebenen Polygonometrie" angedeutet. Er ist unzweifelhaft sehr anschaulich und wird die hier eintretenden Verhältnisse sehr klar machen, nur schien er mir nicht hieher zu gehören, ohne dass ich desshalb meine, er dürfe nicht betreten werden. Der zweite ist der, dass man die Formeln der ebenen Trigonometrie (§. 22) entwickelt, und zeigt, dass wenn sie alle Fälle umfassen sollen, der cosinus eines zwischen 90^0 und 180^0 liegenden Winkels nothwendig negativ seyn müsse. Dieser zweite Weg ist aber schon desshalb nicht anzurathen, weil er nicht über 180^0 hinausführt.

Ein wissenschaftlich-analytischer Weg wäre, wenn man die Gleichung

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \quad (1)$$

die für $a+b < 90^0$ in §. 8 bewiesen ist, geradezu als allgemein gültig voraussetzen würde, und annähme, dass

$$\sin 0^0 = 0, \ \sin(90^0 - a) = \cos a \quad (2)$$

ist, von welchen Gleichungen die letztere zur Erklärung der Grösse $\cos a$ dienen kann, und die man ebenfalls als für alle a gültig voraussetzen wird.

Zunächst folgt nun aus (2) für $a = 90^0$:

$$\cos 90^0 = \sin 0^0 = 0; \quad (3)$$

ferner aus (1) für $a = 0^0$ nach (2):

$$\sin b = \sin 0^0 \cos b + \cos 0^0 \sin b = \cos 0^0 \sin b,$$

woraus, da nicht $\sin b = 0$, folgt:

$$\cos 0^0 = 1, \ \sin 90^0 = \cos 0^0 = 1. \quad (4)$$

Für $a = 90^0$ folgt nun aus (1):

$$\sin(90^\circ + b) = \sin 90^\circ \cos b + \cos 90^\circ \sin b = \cos b \quad (5)$$

und wenn man hier $-b$ für b setzt:

$$\cos(-b) = \sin(90^\circ - b) = \cos b. \quad (6)$$

Setzt man in (1) $b = -a$, so ist unter Beachtung von (6) und (2):

$$0 = \sin a \cos a + \cos a \sin(-a), \ \sin(-a) = -\sin a. \quad (7)$$

Setzt man ferner in (1) $90^\circ - a$ für a, $-b$ für b, und beachtet (2), (6), so hat man:

$$\sin(90^\circ - a - b) = \sin(90^\circ - a)\cos(-b) + \cos(90^\circ - a)\sin(-b),$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (8)$$

Setzt man hier $b = -a$ und beachtet (4), (6), (7), so ist

$$1 = \cos^2 a + \sin^2 a. \quad (9)$$

Für $a = 90^\circ$ folgt aus (1) und (8), mit Beachtung von (3), (4):

$$\sin(90^\circ + b) = \cos b, \ \cos(90^\circ + b) = -\sin b, \quad (10)$$

woraus für $b = 90^\circ$:

$$\sin 180^\circ = 0, \ \cos 180^\circ = -1. \quad (11)$$

Setzt man in (1) und (8) wieder $a = 180^\circ$:

$$\sin(180^\circ + b) = -\sin b, \ \cos(180^\circ + b) = -\cos b,$$

woraus

$$\sin 270^\circ = -1, \ \cos 270^\circ = 0.$$

Dann aus (1) und (8):

$$\sin(270^\circ + b) = -\cos b, \ \cos(270^\circ + b) = \sin b,$$

$$\sin 360^\circ = 0, \ \cos 360^\circ = 1.$$

Setzt man in (1) und (8) $-b$ für b, so folgt nach (6) und (7):

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b, \quad (12)$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

woraus

$$\cos(90^\circ - b) = \sin b,$$

$$\sin(180^\circ - b) = \sin b, \ \cos(180^\circ - b) = -\cos b,$$

$$\sin(270^\circ - b) = -\cos b, \ \cos(270^\circ - b) = -\sin b,$$

$$\sin(360^\circ - b) = -\sin b, \ \cos(360^\circ - b) = \cos b.$$

Allgemein dann aus (1), (8):

$$\sin(360^\circ + b) = \sin b, \ \cos(360^\circ + b) = \cos b.$$

Dass damit die ganze Theorie der trigonometrischen Funktionen gegeben ist, versteht sich von selbst. Doch ist dieser Gang für den Anfänger nicht geeignet.

Wenn in §. 11 schliesslich gefunden wird, dass die Formeln des §. 8 ganz allgemein gelten, vorausgesetzt, dass man für die

vorkommenden trigonometrischen Funktionen ihre Vorzeichen gemäss §. 9 wählt, so liegt hierin eine thatsächliche Bestätigung der Richtigkeit dieser Vorzeichen.

In §. 13 könnte man allerdings den Einwand erheben, dass der Satz des §. 9, auf den verwiesen wird, nur für positive Winkel gelte. Diess ist auch richtig; aber eben so richtig ist, dass überhaupt ein Zuzählen von 360° zu irgend einem (positiven oder negativen) Winkel an den trigonometrischen Funktionen Nichts ändert, so dass also die angewandte Schlussweise als gerechtfertigt erscheint. — Wenn wir überhaupt nur vier trigonometrische Funktionen aufgenommen haben, so rührt diess daher, dass dieselben genügen und die Tafeln deren auch nicht mehr enthalten.

Der in §. 15 S. 38 angeführte Satz aus der Theorie der Logarithmen findet seine strenge Begründung wohl erst in der Differentialrechnung. Man weist dort nach, dass immer

$$\log(1+x) = \log e\left[x - \frac{x^2}{2(1+\alpha x)^2}\right],$$

wo $e = 2{\cdot}7182818$, und α zwischen 0 und 1 ist. Ist nun x klein genug, dass man $\frac{x^2}{2(1+\alpha x)^2}$, was jedenfalls kleiner als $\frac{1}{2}x^2$ ist, vernachlässigen kann, so ist (nahezu):

$$\log(1+x) = x \log e,$$

also wenn man $x = \frac{m}{r}$, und $r + m = p$, also $1 + \frac{m}{r} = \frac{p}{r}$ setzt:

$$\log\left(1 + \frac{m}{r}\right) = \frac{m}{r}\log e,$$

$$\log p - \log r = \frac{p-r}{r}\log e;$$

eben so

$$\log q - \log r = \frac{q-r}{r}\log e,$$

wenn man voraussetzt, dass man $\frac{1}{2}\left(\frac{p-r}{r}\right)^2$, $\frac{1}{2}\left(\frac{q-r}{r}\right)^2$ vernachlässigen könne. Daraus folgt:

$$\log p - \log r : \log q - \log r = p - r : q - r.$$

Da, wie gesagt, $\frac{p-r}{r}$, $\frac{q-r}{r}$ selbst klein seyn müssen, damit

dieser Satz gelte, so wird z. B. die für log sin $(A + n'')$ gegebene Formel nicht mehr gelten, wenn sin A selbst klein wäre. Daher rührt dann die Erörterung des §. 29.

Die sonst wohl gebräuchliche Ableitung der unendlichen Reihen für sin A und cos A habe ich nicht gegeben, da sie ganz offenbar in die Analysis gehört. An deren Stelle ist §. 16 getreten.

Die in §. 22 gegebenen Gleichungen sind als Hauptgleichungen bezeichnet, womit jedoch nicht gesagt seyn soll, dass man geradezu von ihnen ausgehen müsse. In der Note zu §. 45 wird ohnehin gezeigt, dass man auch von andern Grundgleichungen ausgehen könne. Dieselben müssen aber immer der Anzahl nach drei seyn.

Es mag bei dieser Gelegenheit gestattet seyn, auf §. 8 meiner „ebenen Polygonometrie“ zurückzukommen. Ich habe dort zuerst die Gleichungen (I) gefunden als Ausdruck dafür, dass der $(n+1)^{te}$ Punkt mit dem ersten zusammenfällt. Diese genügen vollständig. Denn sie sind ein allgemeines Schema für ein ganzes System von Gleichungen, das in §. 30 näher betrachtet ist. Dort aber wird gezeigt, dass diese sämmtlichen Gleichungen aus den Gleichungen (I) und (II'') des §. 8 folgen, so dass diese drei Gleichungen die einzigen nothwendigen Grundgleichungen der ebenen Polygonometrie sind.

Die im vierten Abschnitt aufgelösten trigonometrischen Gleichungen, namentlich wie sie §. 33 aufstellt, werden sehr zweckmässig auch als Beispiele für die Auflösung transzendenter Gleichungen überhaupt verwendet werden können, und ich habe sie vorzugsweise von diesem Standpunkte aus behandelt, und daher jeweils die doppelte Auflösungsweise gegeben, während Euler, dem die Beispiele entlehnt sind, nur eine gibt.

Die Aufgaben des fünften Abschnitts bedürfen wohl einer weitern Erläuterung nicht; sie haben vorzugsweise den Zweck, in der Anwendung der Grundformeln Uebung zu erreichen, während die des sechsten Abschnitts auch von praktischer Wichtigkeit seyn sollen. Ich habe dort wohl die meisten Aufgaben gelöst, die in der Praxis von Wichtigkeit sind, und die Auflösung so gegeben, dass sie leicht angewendet werden können. In dieser Zusammenstellung glaube ich werden solche Aufgaben nicht häufig gelöst seyn.

In §. 38 habe ich allerdings von „kürzesten Linien“ auf der

Meeresfläche gesprochen, und angegeben, man könne sie als Kreise vom dortigen Halbmesser r betrachten. Diess geschah jedoch nur, um nicht gar zu viele Erklärungen einschieben zu müssen, da wohl von kürzesten Linien leicht ein Begriff zu geben ist. In Wahrheit ist der dortige Halbmesser r der Krümmungshalbmesser eines Normalschnitts des Erdellipsoids, der mit dem Erdmeridian den Winkel α macht.

Die Formel für die Depression des Meereshorizonts, wie sie in §. 41 S. 152 angegeben worden, wird meist falsch abgeleitet und auch so gefunden; die im Buche angegebene Ableitung dürfte wohl keinem Einwand ausgesetzt seyn. Eine Anwendung derselben habe ich nicht gemacht, um nicht zu vielerlei Fremdes beibringen zu müssen; man benützt sie bekanntlich bei Höhenbeobachtungen der Gestirne auf dem Meere mittelst des Spiegelsextanten.

Der neunte Abschnitt — über den Einfluss fehlerhafter Daten auf die durch Rechnung hieraus erhaltenen Grössen — erscheint hier zum ersten Male in einem Lehrbuche. Ich glaubte bei seiner Wichtigkeit nicht davon Umgang nehmen zu dürfen, da erst vermöge der hier geführten Untersuchungen der Praktiker einen Maassstab erhält, nach dem er die Zuverlässigkeit seiner Resultate beurtheilen kann. Sind die Grundgedanken dabei auch nicht unbekannt gewesen, so habe ich doch fast die ganze Ausführung zum ersten Male zu bearbeiten gehabt, und ich glaube, die in §. 48 behandelten Fälle dürften zugleich als Uebung in der trigonometrischen Rechnung zu empfehlen seyn. Es wird Denjenigen, die mit den Elementen der Differentialrechnung vertraut sind, nicht entgehen, dass die in der Note auf S. 192 angegebene Regel ganz unmittelbar die für die Differentiation eines Produkts ist, wie denn überhaupt die Bildung der Grundformeln nach den Regeln der Differentialrechnung geschehen kann. Ich habe diess begreiflich nicht gethan, und glaube, dass das, was gesagt ist, auch so, wie es gesagt ist, verständlich seyn wird.

Was endlich den zehnten Abschnitt — über Interpolation — anbelangt, so mag er als ein Anhang angesehen werden, der eben so gut hätte wegbleiben dürfen. Doch möchte er manchem Leser erwünscht seyn, und ich habe ihn desshalb eingeschaltet.

In der sphärischen Trigonometrie habe ich vorzugsweise die

analytische Ableitung vorwalten lassen, da ich sie für die einzig wissenschaftliche erachte, indem nur sie ganz klar hervortreten lässt, wie aus den drei Grundformeln alles Uebrige folgt — und folgen muss. Doch habe ich zuweilen auch der geometrischen Ableitung gedacht, ohne mich aber in das Labyrinth von Figuren einzulassen, das gar zu viele Lehrbücher der sphärischen Trigonometrie enthalten. Dass ich das rechtwinklige Dreieck immer als mit unter den allgemeinen Sätzen begriffen angesehen habe, verlangt schon der Standpunkt, auf dem der Leser jetzt steht; zum Ueberfluss habe ich jedoch in §. 8 die dasselbe betreffenden Formeln zusammengestellt. Die sogenannten zweideutigen Fälle (§§. 13, 14) glaube ich erschöpfend behandelt zu haben, was — gelegentlich gesagt — in der Regel nicht geschehen ist.

Dass ich bei dem so wichtigen Legendre'schen Satze (§. 19) in den Entwicklungen weiter gegangen bin, als diess gewöhnlich geschieht, geschah wegen des Resultats, das in der Formel (21) auf S. 265 ausgesprochen ist, das ohne diese Entwicklung natürlich nicht erhalten worden wäre. Demselben ist das auf S. 278 in Formel (23) für die Berechnung eines sphärischen Trapezes gefundene an die Seite zu stellen.

Als Aufgaben habe ich, ausser einigen rein geometrischen, vorzugsweise solche aus der Astronomie und der Geodäsie gewählt. Wenn in §. 23 die Konstruktion einer Horizontalsonnenuhr mit grosser Ausführlichkeit behandelt wurde, so rührt diess daher, dass bei Gelegenheit dieser Aufgabe eine Menge für das Folgende wichtiger Begriffe erläutert werden konnten, abgesehen davon, dass wohl die Aufgabe als solche nicht ohne Interesse ist. Dasselbe gilt wohl auch von den Aufgaben des §. 24.

In §. 25 wurden die wichtigsten Methoden angegeben, nach denen auf astronomischem Wege die geographische Breite eines Ortes auf der Erdoberfläche bestimmt werden kann. Es bieten die hier behandelten Aufgaben zugleich reichlichen Stoff zur Uebung im Auflösen trigonometrischer Gleichungen, bei welchen Uebungen zugleich der Vortheil vorhanden ist, dass der Leser sieht, wo die zu lösenden Aufgaben ihre Anwendung finden.

Als Anwendung auf die höhere Geodäsie habe ich die Berechnung der Polar- und rechtwinkligen Koordination der Eckpunkte

eines Dreiecksnetzes gewählt, die erstere im Wesentlichen nach Bessel, die letztere nach Schleiermacher, jedoch mit Weglassung gewisser durch keine Theorie zu rechtfertigenden Künsteleien.

Der siebente Abschnitt endlich ist der analoge zum neunten der ersten Abtheilung, und musste natürlich seinen Platz hier erhalten, wenn sein Vorgänger bereits vorhanden war. Die Anwendungen dürften nicht ohne Interesse seyn. Ich erinnere in dieser Beziehung nur an die Worte von Gauss (monatl. Korresp. 18. Theil S. 286): „Bei allen Methoden, die man dem praktischen Astronomen zu seinem Gebrauche vorschlägt, ist es eine unerlässliche Pflicht, dass man den Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf die Resultate würdige, damit man sich überzeugen kann, ob sie überhaupt, und unter welchen Umständen sie mit Sicherheit anwendbar sind. Der Vernachlässigung dieser Pflicht hat man die vielen unreifen Einfälle zuzuschreiben, über deren Unwerth die praktischen Astronomen klagen."

In Bezug auf die Literatur des hier behandelten Zweiges der Mathematik bin ich mit Zitaten sehr sparsam gewesen, da ich dieselben als nicht wesentlich zum Buche gehörig angesehen habe. Ohnehin mag es eine schwierige Sache seyn, für jeden Satz den Mann zu finden, der ihn zuerst aufgestellt hat, und ich habe mich damit nicht befassen können, ohne dass ich in Abrede stellen will, dass das Mithereinziehen des Historischen von grossem Interesse ist. Aber um in dieser Beziehung nicht Falsches zu sagen, habe ich vorgezogen, meist ganz zu schweigen.

Die am Schlusse des Buches angegebenen Druckfehler, die mir bei nochmaligem Durchgehen des Buches aufgefallen sind, bitte ich, mit der Schwierigkeit des mathematischen Druckes entschuldigen und vor dem Lesen verbessern zu wollen.

Inhalts-Verzeichniss.

Erste Abtheilung. Ebene Trigonometrie.

Erster Abschnitt.

Grundsätze der Goniometrie.

Zweiter Abschnitt.

Berechnung der trigonometrischen Funktionen. Tafeln derselben und Benützung dieser Tafeln.

Dritter Abschnitt.

Berechnung der Dreiecke, oder spezielle Trigonometrie.

Vierter Abschnitt.

Untersuchungen einiger speziellen Punkte. Umformungen. Auflösung trigonometrischer Gleichungen.

Fünfter Abschnitt.

Bestimmung eines Dreiecks aus Verbindungen einzelner Stücke.

Sechster Abschnitt.

Auflösung einer Reihe praktischer Aufgaben.

Siebenter Abschnitt.

Die Dreiecksnetze.

Achter Abschnitt.

Auflösung der ebenen Dreiecke ohne Tafeln.

Neunter Abschnitt.

Ueber den Einfluss fehlerhafter Daten auf die durch Rechnung hieraus erhaltenen Grössen.

Zehnter Abschnitt.

Vom Interpoliren. Benützung zehnstelliger Logarithmentafeln.

Zweite Abtheilung. Sphärische Trigonometrie.

Erster Abschnitt.

Aufstellung der Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie.

Zweiter Abschnitt.

Auflösung der sphärischen Dreiecke.

Dritter Abschnitt.

Berechnung der Fläche des sphärischen Dreiecks.

Vierter Abschnitt.

Vergleichung der sphärischen Dreiecke, deren Seiten klein sind im Verhältniss zum Halbmesser der Kugel, mit ebenen Dreiecken.

Fünfter Abschnitt.

Geometrische, praktische und astronomische Aufgaben.

Sechster Abschnitt.

Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf Geodäsie.

Siebenter Abschnitt.

Ueber den Einfluss fehlerhafter Daten auf die durch Rechnung daraus erhaltenen Grössen.

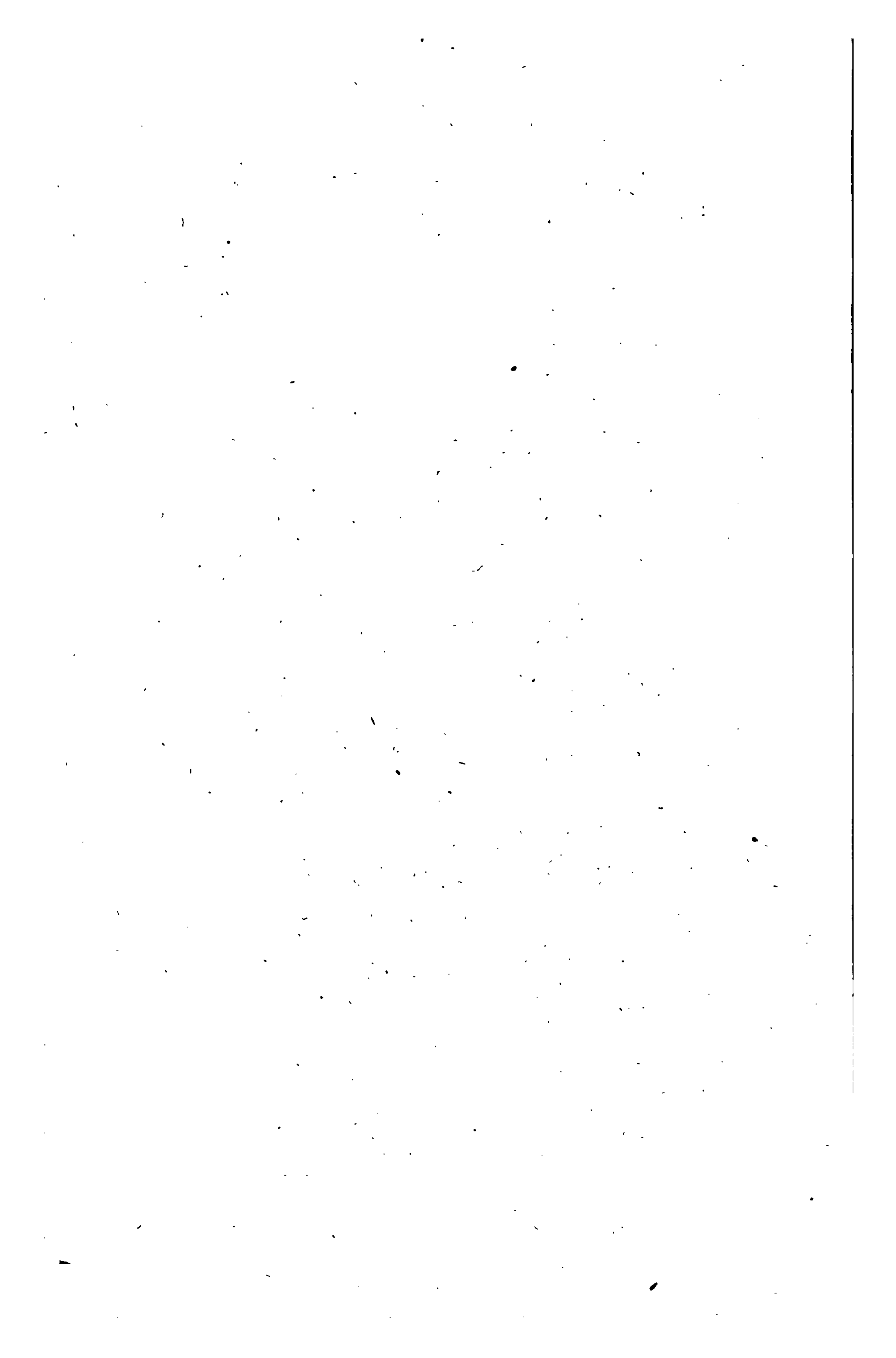
Anmerkung. Die mit * bezeichneten §§. können, ohne dem Verständniss Eintrag zu thun, auch zunächst übergangen werden. Eben so kann unter den Aufgaben (erste Abth. sechster Abschnitt, zweite Abth. fünfter Abschnitt) eine beliebige Auswahl getroffen werden.

Benennung der angewandten griechischen Buchstaben.

α = alpha.	η = eta.	ϱ = rho.
β = beta.	Θ = theta.	σ = sigma.
γ = gamma.	λ = lambda.	τ = tau.
δ, Δ = delta.	μ = my.	φ = phi.
ε = epsilon.	ξ = xi.	ψ = psi.
ζ = zeta.	π = pi.	ω = omĕga.

Erste Abtheilung.

Ebene Trigonometrie.



Erster Abschnitt.

Grundsätze der Goniometrie.

§. 1.

Die Geometrie lehrt, dass ein ebenes Dreieck völlig bestimmt ist, d. h. unzweideutig gezeichnet werden kann, wenn von demselben gegeben sind: eine Seite und zwei Winkel, zwei Seiten und der von diesen gebildete Winkel, oder endlich die drei Seiten; sie lehrt ferner, dass wenn zwei Seiten und ein der einen dieser Seiten entgegenstehender Winkel gegeben sind, das Dreieck wohl in manchen Fällen unzweifelhaft gezeichnet werden könne, dass man aber auch zuweilen mit denselben gegebenen Stücken zwei von einander verschiedene Dreiecke erhalten könne. In all den betrachteten Fällen nun muss es, eben weil das Dreieck verzeichnet werden kann, eine Methode geben, vermöge welcher man im Stande ist, aus den ihrem Maasse nach gegebenen nothwendigen Stücken des Dreiecks die übrigen, gleichfalls ihrem Maasse nach, zu berechnen, ohne dabei irgend welche Figur zu zeichnen, oder nur vor sich zu haben. Die dazu dienlichen Lehren tragen den Namen der ebenen Trigonometrie. Man übersieht leicht, dass es dabei überhaupt auf das Verhalten der Winkel eines Dreiecks gegen die Seiten desselben ankommen wird, so dass dieses Verhalten den ersten Gegenstand der Untersuchung abzugeben hat. Nun lehrt schon die Geometrie, dass Dreiecke, deren Seiten einander proportional sind, dieselben Winkel haben; es liegt somit in der Natur der Sache, dass das Verhalten der Winkel gegen die Seiten nicht bedingt seyn kann durch die absolute Länge der Seiten, sondern blos abhängen kann von dem Verhältnisse der Seiten gegen einander, als welches sich in ähnlichen Dreiecken nicht ändert.

Betrachten wir nun einen bestimmten Winkel, so ist er, seinem Maasse nach, durch Grade, Minuten, Sekunden u. s. f. gegeben,

während die Seiten, ihrem Maasse nach, durch Ruthen, Fuss u. s. w. gegeben werden. Beide Maasse haben aber keinerlei Beziehung zu einander, und es kann nicht das eine in das andere verwandelt werden. Es ist daher auch klar, dass man keinen Ausdruck der Winkel durch die Seiten in dem Sinne suchen kann, dass man das Maass der einen aus dem andern findet; vielmehr wird man zunächst Beziehungen feststellen müssen, die unabhängig sind von diesen Maassen.

Irgend ein bestimmter Winkel, den wir kleiner als einen rechten annehmen, kann in einem beliebigen Dreiecke liegen; das für unsere Betrachtung bequemste ist aber das rechtwinklige: wir werden dasselbe desshalb auch als Ausgangspunkt unserer Untersuchungen wählen. Da im schiefwinkligen Dreiecke schon Winkel vorkommen können, die grösser als ein rechter sind, so werden wir unsere Untersuchungen auch über solche Winkel ausdehnen müssen, und es liegt in der Natur der Sache, dass wir sofort beliebig grosse Winkel zu betrachten haben. Dadurch wird die ganze Untersuchung losgeschält von der speziellern Trigonometrie, und trägt, als besonderer Zweig der Wissenschaft, den Namen Goniometrie, mit der wir uns nun zunächst beschäftigen wollen, indem wir sofort zum eigentlichen Gegenstande unserer Behandlung übergehen, welch letztere die Sache wohl besser aufklären wird, als eine allgemeine Betrachtung.

§. 2.

Fig. 1.

Sey A ein Winkel in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC, dessen Hypothenuse AC und dessen Katheten AB und BC sind, so heisst man:

den Quotienten der dem Winkel A entgegenstehenden Kathete BC durch die Hypothenuse AC den Sinus des Winkels A und setzt desshalb:

$$\sin A = \frac{BC}{AC}; \qquad (1)$$

den Quotienten der dem Winkel A anliegenden Kathete AB durch die Hypothenuse AC den Cosinus des Winkels A und schreibt

$$\cos A = \frac{AB}{AC}. \qquad (2)$$

Die Grössen sin A und cos A sind somit ihren Werthen nach

immer kleiner als 1, da die Kathete immer kleiner als die Hypothenuse ist.

Ferner pflegt man die Quotienten

$$\frac{\sin A}{\cos A} \text{ und } \frac{\cos A}{\sin A}$$

gewöhnlich durch tg A und cotg A zu bezeichnen, und heisst sie Tangente von A und Cotangente von A. Man hat also zur Erklärung dieser Grössen:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \operatorname{cotg} A = \frac{\cos A}{\sin A}. \quad (3)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt aber unmittelbar:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AB}, \operatorname{cotg} A = \frac{AB}{BC}, \quad (4)$$

d. h. es ist tg A auch gleich der entgegenstehenden Kathete BC, dividirt durch die anliegende AB; cotg A gleich der anliegenden Kathete AB, dividirt durch die entgegenstehende BC. *

Man wird gut thun, sich diese Fundamentalerklärungen genau einzuprägen, da natürlich das Verständniss alles Uebrigen darauf ruht. **

Es ist nun vor Allem ersichtlich, dass der Werth von sin A (und cos A) als blosse Zahl erscheint, indem er nur das Verhältniss von je zwei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ausdrückt, welche Zahl auch immer < 1 ist. Von der Länge eines Sinus u. s. f. zu reden, hat also keinen Sinn. Dass dasselbe für tg A und cotg A gilt, ist durch unsere Erklärung deutlich. Eben desshalb hängt aber der Werth von sin A u. s. f. nicht von der Länge der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ab. Verlängert man etwa die Seiten AC und AB, welche den Winkel A bilden und ist DE senkrecht auf AE gezogen, also parallel mit BC, so ist bekanntlich:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AD}, \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD},$$

---

* Es versteht sich wohl von selbst, dass, wenn von der Division zweier Seiten eines Dreiecks die Rede ist, dabei die Division der die Längen dieser Seiten ausdrückenden Zahlen verstanden wird, welches auch immer die Einheit sey, in der diese Längen ausgedrückt werden.

** Man pflegt zuweilen die Brüche $\frac{1}{\cos A}$, $\frac{1}{\sin A}$ als secante und cosecante von A, so wie $1 - \cos A$, $1 - \sin A$ als sinus versus und cosinus versus von A aufzuführen, was wir jedoch unterlassen haben.

man kann also mit demselben Rechte sagen, es sey

$$\sin A = \frac{DE}{AD}, \quad \cos A = \frac{AE}{AD},$$

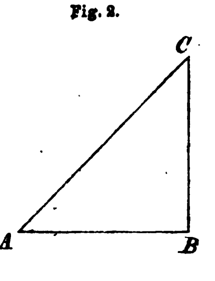
wie man in (1) und (2) diese Grössen erklärt hat, d. h. man kann statt des Dreiecks ABC das Dreieck AED zur Erklärung von sin A und cos A wählen, ohne dadurch eine Verschiedenheit in diese Erklärung zu bringen.

Daraus folgt auch ganz unmittelbar, dass irgend zwei rechtwinklige Dreiecke, die denselben Winkel A enthalten, zur Erklärung von sin A und cos A in der angegebenen Weise benützt werden können, indem sie ähnlich sind, also für die betreffenden Quotienten dieselben Werthe geben.

Die vier Grössen sin A, cos A, tg A, cotg A werden wir zuweilen trigonometrische Funktionen* oder auch trigonometrische Brüche nennen, wenn gleich „goniometrisch" das richtigere Wort wäre.

§. 3.

Fig. 2.



Aus den Erklärungen des §. 2, nämlich aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man, wenn man die Quadrate von sin A und cos A mit $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ bezeichnet:

$$\sin^2 A = \frac{BC^2}{AC^2}, \quad \cos^2 A = \frac{AB^2}{AC^2},$$

woraus folgt:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2}.$$

Da aber nach dem pythagoräischen Satze:

$$BC^2 + AB^2 = AC^2,$$

so ist dieser Quotient = 1, also hat man für einen Winkel A immer:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \quad (5)$$

Wir setzen dabei natürlich $A < 90^0$ voraus. Hieraus ergibt sich wieder, dass weder sin A, noch cos A je grösser als 1 seyn kann.

---

* Unter Funktion versteht man in der Mathematik überhaupt eine Grösse, deren Werth vom Werthe einer andern abhängt und sich also mit letzterm ändern wird. Da nun die Grössen sin A, cos A, tg A, cotg A so beschaffen sind, dass ihre Werthe vom Werthe des Winkels A abhängen, so sind sie Funktionen dieses Winkels.

Multiplizirt man die Gleichungen (3) mit einander, so erhält man:

$$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{cotg} A = \frac{\sin A \cdot \cos A}{\cos A \cdot \sin A},$$

d. h. $$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{cotg} A = 1, \qquad (6)$$

als Beziehung zwischen tg und cotg eines Winkels. Die beiden Gleichungen (5) und (6) nebst (3) geben die Beziehungen der vier Grössen $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{cotg} A$ gegen einander an. Da übrigens (6) ganz unmittelbar aus (3) folgt, so bestehen im Grunde nur die drei Gleichungen (3) und (5), so dass also, wenn eine der vier trigonometrischen Funktionen bekannt ist, die drei andern daraus gefunden werden können, welche Aufgabe wir nun zunächst lösen wollen.

§. 4.

1) Sey $\sin A$ bekannt.

Aus (5) folgt:

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A, \quad \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}.$$

Aus (3) ergibt sich:

$$\operatorname{tg}^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \sin^2 A}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}};$$

$$\operatorname{cotg}^2 A = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\sin^2 A}, \quad \operatorname{cotg} A = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 A}}{\sin A}.$$

2) Sey $\cos A$ bekannt.

Aus (5): $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$.

Aus (3):

$$\operatorname{tg}^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1 - \cos^2 A}{\cos^2 A}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\cos A},$$

$$\operatorname{cotg}^2 A = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{\cos^2 A}{1 - \cos^2 A}, \quad \operatorname{cotg} A = \frac{\cos A}{\sqrt{1 - \cos^2 A}}.$$

3) Sey $\operatorname{tg} A$ bekannt:

Aus (6) folgt: $$\operatorname{cotg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}.$$

Aus (3) ergibt sich:

$$\operatorname{tg}^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \sin^2 A},$$

also $$(1 - \sin^2 A) \operatorname{tg}^2 A = \sin^2 A, \quad \operatorname{tg}^2 A - \sin^2 A \cdot \operatorname{tg}^2 A = \sin^2 A,$$

$$\operatorname{tg}^2 A = \sin^2 A + \sin^2 A \operatorname{tg}^2 A = \sin^2 A (1 + \operatorname{tg}^2 A),$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 A}{1 + \operatorname{tg}^2 A} = \sin^2 A, \quad \sin A = \frac{\operatorname{tg} A}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}}.$$

Ebenso: $$\operatorname{tg}^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1-\cos^2 A}{\cos^2 A},$$

$$\cos^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 A = 1 - \cos^2 A,\ \cos^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 A + \cos^2 A = 1,$$

$$\cos^2 A(\operatorname{tg}^2 A + 1) = 1,\ \cos^2 A = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 A + 1},$$

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}.$$

4) Sey $\operatorname{cotg} A$ bekannt.

Aus (6): $$\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{cotg} A}.$$

Dann aus (3):

$$\operatorname{cotg}^2 A = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{1-\sin^2 A}{\sin^2 A},\ \sin^2 A \,.\, \operatorname{cotg}^2 A = 1 - \sin^2 A,$$

$$\sin^2 A(1+\operatorname{cotg}^2 A) = 1,$$

woraus $$\sin A = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 A}},$$

$$\operatorname{cotg}^2 A = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{\cos^2 A}{1-\cos^2 A},\ \operatorname{cotg}^2 A - \cos^2 A \,.\, \operatorname{cotg}^2 A = \cos^2 A,$$

$$\operatorname{cotg}^2 A = \cos^2 A(1+\operatorname{cotg}^2 A),$$

$$\cos A = \frac{\operatorname{cotg} A}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 A}}.$$

Man bemerke etwa noch, dass immer:

$$\cos A \,.\, \operatorname{tg} A = \sin A,\ \sin A \operatorname{cotg} A = \cos A.$$

Der Uebersichtlichkeit wegen wollen wir die erhaltenen Resultate in eine Tabelle ordnen.

$\sin A =$	$\cos A =$	$\operatorname{tg} A =$	$\operatorname{cotg} A =$
$\sqrt{1-\cos^2 A}$,	$\sqrt{1-\sin^2 A}$,	$\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$,	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$,
$\frac{\operatorname{tg} A}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}$,	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}$,	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$,	$\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$,
$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 A}}$.	$\frac{\operatorname{cotg} A}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 A}}$.	$\frac{1}{\operatorname{cotg} A}$.	$\frac{1}{\operatorname{tg} A}$.

§. 5.

Immer unter der Voraussetzung, der zu betrachtende Winkel sey kleiner als ein rechter, wollen wir uns nun die Frage stellen, in

welcher Weise der Sinus eines Winkels sich ändert, wenn der Winkel sich ändert.

Seyen BCA, DCA zwei verschiedene Winkel, und zwar

Fig. 3.

$$DCA > BCA.$$

Man ziehe BE, DF senkrecht auf AC, indem man zuerst um C mit AC einen Kreis beschrieben; verlängere BE, DF, bis sie den Kreis in b und d wieder treffen, ziehe Cb und Cd, so ist bekanntlich: $BE = Eb$, $DF = Fd$, $DCA = ACd$, $BCA = ACb$.

Nun ist (§. 2):

$$\sin BCA = \frac{BE}{BC}, \ \sin DCA = \frac{DF}{CD};$$

ferner $Dd = 2DF$, $Bb = 2BE$; $DF = \frac{1}{2}Dd$, $BE = \frac{1}{2}Bb$,

also $$\sin BCA = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{Bb}{BC}, \ \sin DCA = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{Dd}{CD}.$$

Da aber $DCd = 2DCA$, $BCb = 2BCA$, so ist auch $DCd > BCb$, also nach einem bekannten Satze:

$$Dd > Bb.$$

Da endlich $BC = CD$, so folgt hieraus, dass

$$\frac{Dd}{CD} > \frac{Bb}{BC}, \ \tfrac{1}{2}\frac{Dd}{CD} > \tfrac{1}{2}\frac{Bb}{BC},$$

d. h. $$\sin DCA > \sin BCA.$$

Man schliesst hieraus, dass zu einem grössern Winkel auch ein grösserer Sinus gehöre, oder dass der Sinus eines Winkels wachse, wenn der Winkel wächst, mithin auch abnehme, wenn der Winkel abnimmt.

Sind also die zwei Winkel A und B, beide unter 90°, so beschaffen, dass $$B > A,$$

so ist auch $$\sin B > \sin A.$$

Da nun: $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B}$, $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$,

und $\sin^2 B > \sin^2 A$, also $1 - \sin^2 B < 1 - \sin^2 A$, *

so ist mithin: $$\cos B < \cos A,$$

d. h. der Cosinus eines Winkels nimmt ab, wenn der Winkel wächst, und nimmt mithin zu, wenn der Winkel abnimmt.

* Da $\sin^2 B > \sin^2 A$, so wird, wenn man von 1 zuerst $\sin^2 B$, und dann auch $\sin^2 A$ abzieht, das erstemal mehr abgezogen als das zweite, so dass weniger übrig bleiben muss, mithin $1 - \sin^2 B < 1 - \sin^2 A$ ist.

Endlich ist $$\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}, \operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A},$$
und da $$\sin B > \sin A, \cos B < \cos A,$$
so ist $$\operatorname{tg} B > \operatorname{tg} A, *$$
d. h. die Tangente eines Winkels wächst, wenn der Winkel wächst. Ganz eben so ist $$\operatorname{cotg} B < \operatorname{cotg} A,$$
so dass die Cotangente abnimmt, wenn der Winkel wächst. Alle diese Sätze lassen sich leicht geometrisch nachweisen, wie der erste, was jedoch der eigenen Uebung überlassen bleiben mag.

Anmerkung. Wäre der Halbmesser des Kreises, AC = 1, so wäre offenbar sin BCA = BE, sin DCA = DF, cos BCA = CE, cos DCA = CF, wobei wir aber uns nicht etwa den sin oder cos als Längen vorstellen dürfen (§. 2), vielmehr ist hiedurch nur gesagt, dass z. B. die Zahl, welche die Länge von BE misst, wenn AC = 1, zugleich dem sin BCA gleich sey.

§. 6.

Die beiden Winkel A und C betragen zusammen 90°; man hat also
$$C = 90^\circ - A.$$
Nun ist (§. 2):
$$\sin A = \frac{BC}{AC}, \cos A = \frac{AB}{AC};$$
$$\sin C = \frac{AB}{AC}, \cos C = \frac{BC}{AC}.$$

Fig. 4.

Daraus folgt unmittelbar, dass
$$\sin C = \cos A, \cos C = \sin A,$$
d. h. $$\sin(90^\circ - A) = \cos A, \cos(90^\circ - A) = \sin A. \quad (7)$$

---

* Vergleicht man die Brüche $\frac{\sin B}{\cos B}$ und $\frac{\sin A}{\cos A}$, so ist der Zähler des ersten grösser als der des zweiten, während der Nenner des ersten kleiner als der des zweiten ist. Wären die Nenner gleich, so müsste der erste Bruch schon grösser als der zweite seyn, da mit wachsendem Zähler ein Bruch wächst; d. h. man hat
$$\frac{\sin B}{\cos A} > \frac{\sin A}{\cos A}.$$
Schreibt man aber hier noch im ersten Bruche cos B für cos A, so hat man den Nenner desselben noch vermindert, wodurch der Bruch abermals in seinem Werthe erhöht wurde, so dass in höherm Grade
$$\frac{\sin B}{\cos B} > \frac{\sin A}{\cos A}$$
ist.

Die Division beider Gleichungen gibt sodann:

$$\operatorname{tg}(90^0 - A) = \operatorname{cotg} A,\ \operatorname{cotg}(90^0 - A) = \operatorname{tg} A. \quad (7')$$

Man hat also auch:

$$\sin^2 A + \sin^2(90^0 - A) = 1,\ \cos^2 A + \cos^2(90^0 - A) = 1,$$

$$\operatorname{tg} A . \operatorname{tg}(90^0 - A) = 1,\ \operatorname{cotg} A . \operatorname{cotg}(90^0 - A) = 1,$$

wie sich aus (5) und (6) findet.

Es ergibt sich hieraus, dass wenn man die trigonometrischen Funktionen der Winkel unter 45^0 kennt, man sofort die der Winkel über 45^0 erhalten wird.

Sind z. B. $\sin 36^0$, $\cos 36^0$, $\operatorname{tg} 36^0$, $\operatorname{cotg} 36^0$ bekannt, so ist, da $36^0 + 54^0 = 90^0$:

$$\sin 54^0 = \cos 36^0,\ \cos 54^0 = \sin 36^0,\ \operatorname{tg} 54^0 = \operatorname{cotg} 36^0,$$
$$\operatorname{cotg} 54^0 = \operatorname{tg} 36^0.$$

Allgemeiner ist:

$$\sin(45^0 + A) = \cos(45^0 - A),\ \cos(45^0 + A) = \sin(45^0 - A),$$
$$\operatorname{tg}(45^0 + A) = \operatorname{cotg}(45^0 - A),\ \operatorname{cotg}(45^0 + A) = \operatorname{tg}(45^0 - A), \quad (8)$$

wenn A unter 45^0 ist, da ja $45^0 + A$ und $45^0 - A$ zusammen 90^0 betragen.

Für einige spezielle Winkel ist es leicht, die zugehörigen trigonometrischen Funktionen zu erhalten, wie wir diess nun zeigen wollen.

§. 7.

Bereits in §. 5 haben wir gezeigt, dass der sin A abnehme, wenn A abnimmt. Denken wir uns nun, der Winkel A werde immer kleiner (in der dortigen Figur 3 nehme BCA immer mehr ab) und nähere sich der Grösse 0 unbegränzt (BC nähere sich der AC), so wird offenbar der sin A sich ebenfalls der 0 nähern (BE wird immer kleiner) und zuletzt verschwinden, so dass man haben wird:

$$\sin 0^0 = 0.$$

Vermöge §. 4 folgt hieraus:

$$\cos 0^0 = \sqrt{1 - 0^2} = \sqrt{1} = 1,\ \operatorname{tg} 0^0 = \tfrac{0}{1} = 0,\ \operatorname{cotg} 0^0 = \tfrac{1}{0} = \infty. *$$

* Das Zeichen ∞ bedeutet keine Zahl mehr, sondern zeigt nur an, dass $\operatorname{cotg} 0^0$ grösser sey als jede angebbare, auch noch so grosse Zahl. Wählt man nämlich den Bruch $\frac{1}{a}$ und lässt a immer kleiner werden, so wird sein Werth immer grösser, und wollte man $a = 0$ setzen, so würde man eben dadurch anzeigen, dass man über alle Grössenschranken hinausgegangen sey.

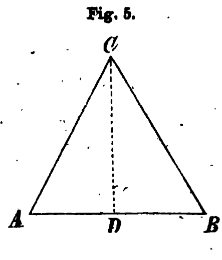
Da $0^\circ + 90^\circ = 90^\circ$, so folgt hieraus nach (7) in §. 6 sogleich:
$\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = \sin 0^\circ = 0$, $\operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{cotg} 0^\circ = \infty$,

$$\operatorname{cotg} 90^\circ = \operatorname{tg} 0^\circ = 0,$$

was man leicht auch aus der Figur entnehmen kann.

Stelle ferner ABC ein gleichseitiges Dreieck vor, in dem also jeder Winkel gleich 60°; sey ferner CD senkrecht auf AB, so ist BCD $= 30^\circ$, und also

Fig. 5.



$$\sin BCD = \sin 30^\circ = \frac{BD}{BC}.$$

Nun ist $BD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC$, also

$$\frac{BD}{BC} = \frac{\frac{1}{2} BC}{BC} = \frac{1}{2}, \ \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Hieraus folgt nach §. 4:

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

$$\operatorname{cotg} 30^\circ = \sqrt{3}.$$

Sodann nach §. 6:

$$\sin 60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \ \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}, \ \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \ \operatorname{cotg} 60^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Ist endlich ABC ein gleichschenklich rechtwinkliges Dreieck, also $AB = BC$, so ist $A = 45^\circ$, mithin

Fig. 6.

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AB} = 1,$$

und dann nach §. 4:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \ \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{1+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \ \operatorname{cotg} 45^\circ = \tfrac{1}{1} = 1.$$

Man könnte diese Formeln auch in anderer Weise erhalten. Aus (8) nämlich folgt, dass (wenn dort $A = 0$)

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ, \ \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ.$$

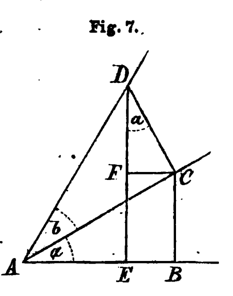
Also aus (5) und (6), wenn $A = 45^\circ$:

$$\sin^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = 1, \ 2 \sin^2 45^\circ = 1, \ \sin^2 45^\circ = \tfrac{1}{2}, \ \sin 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ . \operatorname{tg} 45^\circ = 1, \ \operatorname{tg}^2 45^\circ = 1, \ \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

§. 8.

Seyen a, b zwei Winkel, jeder kleiner als 90° und deren Summe



selbst kleiner als 90° sey. Sey ferner DC senkrecht auf AC, CB senkrecht auf AB, DE senkrecht auf AE und CF parallel AB.

Man wird nun leicht nachweisen können, dass auch CDF = a. Der Winkel BAD ist = a + b, und man hat zugleich CF = BE, EF = CB. Hieraus und dem, was wir im Vorstehenden gesehen, ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$\sin(a+b)=\frac{DE}{AD}=\frac{DF+FE}{AD}=\frac{DF+CB}{AD}=\frac{DF}{AD}+\frac{CB}{AD}=\frac{DF.DC}{AD.DC}$$

$$+\frac{CB.AC}{AD.AC}=\frac{DF}{DC}\cdot\frac{DC}{AD}+\frac{CB}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}.$$

Aber es ist

$$\frac{DF}{DC}=\cos a,\ \frac{DC}{AD}=\sin b,\ \frac{CB}{AC}=\sin a,\ \frac{AC}{AD}=\cos b,$$

also $\sin(a+b)=\cos a.\sin b+\sin a.\cos b$,

oder $$\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b. \quad (9)$$

Eben so ist

$$\cos(a+b)=\frac{AE}{AD}=\frac{AB-BE}{AD}=\frac{AB-CF}{AD}=\frac{AB}{AD}-\frac{CF}{AD}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}$$

$$-\frac{CF}{CD}\cdot\frac{CD}{AD}=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b,$$

d. h. $$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b. \quad (10)$$

Aus diesen Formeln zieht man (§. 2):

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}.$$

Dividirt man hier Zähler und Nenner durch cos a . cos b, so ergibt sich:

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}}{1-\frac{\sin a}{\cos a}\cdot\frac{\sin b}{\cos b}},$$

d. h. da $\frac{\sin a}{\cos a}=\operatorname{tg}a,\ \frac{\sin b}{\cos b}=\operatorname{tg}b$:

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a.\operatorname{tg}b}. \quad (11)$$

Dessgleichen

$$\operatorname{cotg}(a+b)=\frac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)}=\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\sin a\cos b+\cos a\sin b},$$

und wenn man Zähler und Nenner durch sin a sin b dividirt

$$\operatorname{cotg}(a+b)=\frac{\operatorname{cotg}a.\operatorname{cotg}b-1}{\operatorname{cotg}b+\operatorname{cotg}a}. \quad (12)$$

Die vier Formeln (9)—(12) geben die trigonometrischen Funktionen eines zusammengesetzten Winkels durch die der einfachen. So erhält man (§. 7):

$$\sin 75^0=\sin(30^0+45^0)=\sin 30^0\cos 45^0+\cos 30^0\sin 45^0=$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+\sqrt{3})=\cos 15^0,$$
$$\cos 75^0=\cos(30^0+45^0)=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}.\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}(\sqrt{3}-1)$$
$$=\sin 15^0,$$
$$\operatorname{tg}75^0=\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}+1}{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2$$ (wenn man Zähler und Nenner mit $1+\sqrt{3}$ multiplizirt), $=\tfrac{1}{2}(1+2\sqrt{3}+3)$ $=2+\sqrt{3}$,

$$\operatorname{cotg}75^0=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2$$ (wenn man Zähler und Nenner mit $\sqrt{3}-1$ multiplizirt) $=\tfrac{1}{2}(3-2\sqrt{3}+1)=2-\sqrt{3}$.

Im Seitherigen haben wir bloss Winkel betrachtet, die unter 90^0 liegen; eine solche Beschränkung entspricht aber nicht einmal den Bedürfnissen der Trigonometrie, geschweige denn überhaupt den Bedürfnissen einer weitern Anwendung dieser Lehren. Auch drängt uns die Theorie ganz unzweifelhaft zur Untersuchung, bezüglich Erklärung der trigonometrischen Funktionen von Winkeln, die über 90^0 hinausreichen.

Anmerkung. Die Seite des regelmässigen Zehnecks im Kreise wird bekanntlich erhalten, wenn man den Halbmesser so in zwei Theile theilt, dass der grössere Abschnitt die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen dem kleinern Theile und dem ganzen Halbmesser. Ist also r der Halbmesser, x der grössere, mithin r — x der kleinere Theil, so hat man

$$r(r-x)=x^2,\ r^2-rx=x^2,\ x^2+rx=r^2,$$

woraus folgt:

$$x=-\tfrac{1}{2}r\pm\sqrt{r^2+\tfrac{1}{4}r^2}=-\frac{r}{2}\pm\frac{r}{2}\sqrt{5},$$

n welcher Gleichung jedoch nur das obere Zeichen zulässig ist, da x positiv seyn muss. Sollte also in Fig. 3 bB die Seite des regelmässigen Zehnecks, BC = r der Halbmesser seyn, so wäre $EB=\tfrac{1}{2}bB=\frac{r}{4}(\sqrt{5}-1)$, und der Winkel $BCb=36^0$, also $BCA=18^0$, und man hätte

$$\sin 18^0 = \frac{BE}{CB} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) = \cos 72^0 \ (\S.\ 6),$$

woraus $\cos 18^0 = \sqrt{1 - \tfrac{1}{16}(\sqrt{5} - 1)^2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{16 - (5 - 2\sqrt{5} + 1)}$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \sin 72^0.$$

Hieraus folgt:

$$\sin 48^0 = \cos 42^0 = \sin(30^0 + 18^0) = \sin 30^0 \cos 18^0 + \cos 30^0 \sin 18^0$$
$$= \tfrac{1}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \tfrac{1}{8}(\sqrt{15} - \sqrt{3}),$$
$$\cos 48^0 = \sin 42^0 = \cos(30^0 + 18^0) = \cos 30^0 \cos 18^0 - \sin 30^0 \sin 18^0$$
$$= \tfrac{1}{8}\sqrt{30 + 6\sqrt{5}} - \tfrac{1}{8}(\sqrt{5} - 1).$$

In ähnlicher Weise erhält man:

$$\sin 36^0 = \sin(18^0 + 18^0) = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \cos 54^0,$$
$$\cos 36^0 = \cos(18^0 + 18^0) = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) = \sin 54^0,$$
$$\sin 63^0 = \sin(45^0 + 18^0) = \tfrac{1}{4}\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}}(\sqrt{5} - 1) = \cos 27^0,$$
$$\cos 63^0 = \cos(45^0 + 18^0) = \tfrac{1}{4}\sqrt{5 + \sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}}(\sqrt{5} - 1) = \sin 27^0,$$
$$\sin 78^0 = \sin(60^0 + 18^0) = \tfrac{1}{8}\sqrt{30 + 6\sqrt{5}} + \tfrac{1}{8}(\sqrt{5} - 1) = \cos 12^0,$$
$$\cos 78^0 = \cos(60^0 + 18^0) = \tfrac{1}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \tfrac{1}{8}(\sqrt{15} - \sqrt{3}) = \sin 12^0.$$

Man kennt also jetzt den sin und cos (also auch tg und cotg) von 0°, 12°, 15°, 18°, 27°, 30°, 36°, 42°, 45°, 48°, 54°, 60°, 63°, 72°, 75°, 78°, 90°.

Von weitern Winkeln finden sich die trigonometrischen Funktionen angegeben in der Anmerkung zu §. 12.

§. 9.

Ist ein Winkel zwischen 0° und 90°, so wollen wir sagen, er liege im ersten Quadranten, ist er zwischen 90° und 180°, im zweiten; im dritten Quadranten soll er liegen, wenn er zwischen 180° und 270° enthalten ist, und endlich im vierten, wenn er zwischen 270° bis 360° liegt. Bezeichnet a immer einen spitzen Winkel, der also zwischen 0° und 90° liegt, so kann man einen Winkel bezeichnen, wenn er liegt:

im zweiten Quadranten durch $90^0 + a$, oder $180^0 - a$,
„ dritten „ „ $180^0 + a$, „ $270^0 - a$,
„ vierten „ „ $270^0 + a$, „ $360^0 - a$.

Wir wollen nun das Verhalten der Winkel in den vier Quadranten etwas genauer untersuchen.

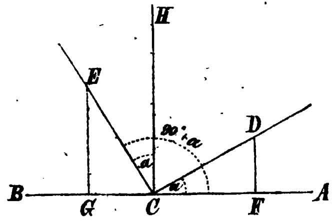


Fig. 8.

Sey $ACD = a$ ein Winkel $< 90^0$, also im ersten Quadranten, CH senkrecht auf AB, $HCE = a$, so ist $ACE = 90^0 + a$, also ein Winkel im zweiten Quadranten.

Wollen wir sin a und cos a haben, so müssen wir von einem (beliebigen)

Punkte D der Seite CD auf die Seite CA die Senkrechte DF fällen; alsdann ist (§. 2)

$$\sin a = \frac{DF}{CD}, \cos a = \frac{CF}{CD}.$$

Wollen wir nun eben so den $\sin(90^\circ + a)$ oder $\cos(90^\circ + a)$ haben, so müssen wir von der einen Seite (CE) dieses Winkels aus auf die andere (AC) eine Senkrechte (EG) fällen, wozu nothwendig ist, dass wir die Seite AC zuerst gegen B hin verlängern. Alsdann wird der Bruch $\frac{EG}{EC}$ den $\sin(90^\circ + a)$, der Bruch $\frac{CG}{CE}$ den $\cos(90^\circ + a)$ ausdrücken können. Was nun zunächst den letztern anbelangt, so ist CG entgegengesetzt gerichtet in Bezug auf CF, was wir dadurch anzeigen wollen, dass wir sagen, der $\cos(90^\circ + a)$ sey negativ, so dass also

$$\cos(90^\circ + a) = -\frac{CG}{CE}.$$

Der $\sin(90^\circ + a)$ dagegen wird positiv seyn, da EG eben so gerichtet ist, wie DF. Man kann diese Beziehungen auch so erkennen: Denken wir uns, der Winkel ACD wachse gegen 90°, so nimmt (§. 5 und §. 7) sein cosinus ab bis zu 0, was geometrisch dadurch ersichtlich ist, dass der Punkt F gegen C hin rückt. Lässt man aber dann den Winkel über 90° hinauswachsen, so wird der Fusspunkt F immer noch in derselben Weise fortrücken, somit der cosinus immer noch abnehmen; da er nun bei 90° schon 0 war, so muss er über 90° hinaus negativ werden.

Man mache nun CD = CE, so ist leicht ersichtlich, dass auch CF = EG, DF = CG (indem die Dreiecke FCD und CEG kongruent sind wegen DCF = CEG = a, CD = CE, DFC = CGE = 90°). Also ist

$$\sin(90^\circ + a) = +\frac{EG}{EC} = +\frac{CF}{CD} = +\cos a,$$

$$\cos(90^\circ + a) = -\frac{CG}{CE} = -\frac{DF}{CD} = -\sin a,$$

woraus durch Division leicht die Formeln für $\operatorname{tg}(90^\circ + a)$, $\operatorname{cotg}(90^\circ + a)$ folgen. Man hat also:

$$\sin(90^\circ + a) = +\cos a,\ \cos(90^\circ + a) = -\sin a,\ \operatorname{tg}(90^\circ + a) = \frac{\sin(90^\circ + a)}{\cos(90^\circ + a)} = \frac{\cos a}{-\sin a} = -\operatorname{cotg} a,\ \operatorname{cotg}(90^\circ + a) = -\operatorname{tg} a.$$

Ist $b < 90^0$, so ist $90^0 - b$ auch $< 90^0$ und $> 0^0$; setzt man also hier $a = 90^0 - b$, so sind diese Formeln noch richtig.

Unter Beachtung der Formeln (7) erhält man nun, wenn $a = 90^0 - b$, also $90^0 + a = 180^0 - b$:

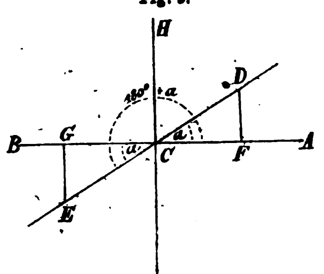
$$\sin(180^0 - b) = + \cos(90^0 - b) = + \sin b,$$
$$\cos(180^0 - b) = - \sin(90^0 - b) = - \cos b,$$
$$\operatorname{tg}(180^0 - b) = - \operatorname{cotg}(90^0 - b) = - \operatorname{tg} b,$$
$$\operatorname{cotg}(180^0 - b) = - \operatorname{tg}(90^0 - b) = - \operatorname{cotg} b.$$

Setzt man $b = 0$ und beachtet §. 7, so erhält man:

$$\sin 180^0 = + \sin 0^0 = 0, \ \cos 180^0 = - \cos 0^0 = -1,$$
$$\operatorname{tg} 180^0 = - \operatorname{tg} 0^0 = 0, \ \operatorname{cotg} 180^0 = - \operatorname{cotg} 0^0 = - \infty.$$

Sey wieder $ACD = a$, kleiner als 90^0, $ECB = a$, so ist $ACE = 180^0 + a$ ein Winkel im dritten Quadranten. Sein sinus würde also durch $\frac{EG}{EC}$, sein cosinus durch $\frac{CG}{CE}$ auszudrücken seyn, wenn EG die Senkrechte von der einen Seite EC des Winkels auf die (verlängerte) andere Seite AC ist. Ganz wie vorhin erhellt wieder, dass jetzt der cosinus ebenfalls negativ, und der sinus gleichfalls negativ seyn wird, indem EG von entgegengesetzter Richtung ist als DF. Man kann sich diess auch wieder in ähnlicher Weise erklären. Hat man den Winkel ACE der vorigen Figur bis 180^0 wachsen lassen, so ist E immer mehr gesunken, also gegen AB gelangt; lässt man den Winkel nun über 180^0 hinausgehen, so dauert diese abwärts gehende Bewegung offenbar fort, und der sinus nimmt folglich fortwährend ab. Da er für 180^0 schon 0 ist, so wird er darüber hinaus negativ. Mithin

Fig. 9.



$$\sin(180^0 + a) = - \frac{EG}{CE}, \ \cos(180^0 + a) = - \frac{CG}{CE}.$$

Sey nun $CD = CE$, DF und EG senkrecht auf AB, so ist auch $CG = CF$, $EG = DF$, also

$$\sin(180^0 + a) = - \frac{EG}{CE} = - \frac{DF}{CD} = - \sin a,$$
$$\cos(180^0 + a) = - \frac{CG}{CE} = - \frac{CF}{CD} = - \cos a,$$

so dass man hat:

$\sin(180^0+a) = -\sin a$, $\cos(180^0+a) = -\cos a$; $\operatorname{tg}(180^0+a)$
$$= \frac{\sin(180^0+a)}{\cos(180^0+a)} = \frac{-\sin a}{-\cos a} = +\operatorname{tg} a,\ \operatorname{cotg}(180^0+a) = +\operatorname{cotg} a.$$

Setzt man abermals $a = 90^0 - b$ und ist $b < 90^0$, so erhält man (§. 6), da jetzt $180^0 + a = 270^0 - b$:

$\sin(270^0 - b) = -\sin(90^0 - b) = -\cos b$, $\cos(270^0 - b) = -\cos(90^0 - b) = -\sin b$; $\operatorname{tg}(270^0 - b) = +\operatorname{cotg} b$, $\operatorname{cotg}(270^0 - b) = +\operatorname{tg} b$.

Setzt man hier $b = 0$, so ist:

$$\sin 270^0 = -\sin 90^0 = -1,\ \cos 270^0 = -\cos 90^0 = 0,$$
$$\operatorname{tg} 270^0 = \infty,\ \operatorname{cotg} 270^0 = 0.$$

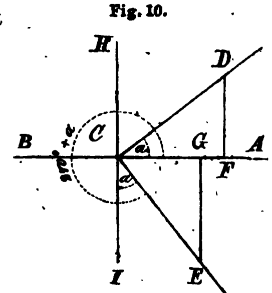


Fig. 10.

Sey endlich $ACD = JCE = a$, so ist $ACE = 270^0 + a$ ein Winkel im vierten Quadranten und aus denselben Gründen, wie wir sie nun genügend aus einander gesetzt, wird man setzen müssen:

$$\sin(270^0+a) = -\frac{EG}{CE},$$
$$\cos(270^0+a) = +\frac{CG}{CE}.$$

Sey wieder $CD = CE$, so ist auch: $DF = CG$, $EG = CF$, also:

$$\sin(270^0+a) = -\frac{CF}{CD} = -\cos a,$$
$$\cos(270^0+a) = +\frac{DF}{CD} = +\sin a,$$

so dass man hat:

$$\sin(270^0+a) = -\cos a,\ \cos(270^0+a) = +\sin a;$$
$$\operatorname{tg}(270^0+a) = -\operatorname{cotg} a,\ \operatorname{cotg}(270^0+a) = -\operatorname{tg} a.$$

Setzt man auch hier $a = 90^0 - b$, $b < 90^0$, so ist:

$$\sin(360^0 - b) = -\sin b,\ \cos(360^0 - b) = +\cos b,$$
$$\operatorname{tg}(360^0 - b) = -\operatorname{tg} b,\ \operatorname{cotg}(360^0 - b) = -\operatorname{cotg} b.$$

Für $b = 0$ zieht man daraus:

$$\sin 360^0 = 0,\ \cos 360^0 = +1,\ \operatorname{tg} 360^0 = 0,\ \operatorname{cotg} 360^0 = -\infty. *$$

* Die Grössen tg und cotg können, wie hieraus sich ergibt, selbst unendlich grosse Werthe annehmen. In Bezug auf das Vorzeichen ist jedoch noch das Folgende zu bemerken. Wir haben oben gefunden, dass z. B. $\operatorname{tg} 270^0 = +\infty$; dabei

Würde man die Winkel über 360^0 hinaus wachsen lassen, so ist klar, dass für den Winkel $360^0 + A$ und für den Winkel A dieselben trigonometrischen Funktionen zum Vorschein kommen werden, was auch A sey. Dessgleichen, wenn ein Winkel $= 2 . 360^0 + A$, $3 . 360^0 + A$, ..., allgemein $= n . 360^0 + A$ ist. Demnach

$$\sin(n . 360^0 + A) = \sin A, \quad \cos(n . 360^0 + A) = \cos A,$$
$$\operatorname{tg}(n . 360^0 + A) = \operatorname{tg} A, \quad \operatorname{cotg}(n . 360^0 + A) = \operatorname{cotg} A.$$

Man kann diess offenbar auch so ausdrücken, dass man sagt: Wenn man die trigonometrischen Funktionen eines Winkels suchen will, so kann man von diesem Winkel, in so ferne er grösser seyn sollte als 360^0, so viele Male 360^0 weglassen, als diess überhaupt möglich ist. Es mag von Interesse seyn, die so eben erhaltenen Ergebnisse übersichtlich zusammen zu stellen. Was zuerst die Vorzeichen anbelangt, so ist im

	sin	cos	tg	cotg
ersten Quadranten:	$= +$,	$= +$,	$= +$,	$= +$,
zweiten „ :	$= +$,	$= -$,	$= -$,	$= -$,
dritten „ :	$= -$,	$= -$,	$= +$,	$= +$,
vierten „ :	$= -$,	$= +$,	$= -$,	$= -$.

Ferner, wenn $a < 90^0$:

$$\left.\begin{array}{l}
\sin(90^0 - a) = + \cos a, \ \cos(90^0 - a) = + \sin a, \\
\operatorname{tg}(90^0 - a) = + \operatorname{cotg} a, \ \operatorname{cotg}(90^0 - a) = + \operatorname{tg} a, \\
\sin(90^0 + a) = + \cos a, \ \cos(90^0 + a) = - \sin a, \\
\operatorname{tg}(90^0 + a) = - \operatorname{cotg} a, \ \operatorname{cotg}(90^0 + a) = - \operatorname{tg} a, \\
\sin(180^0 - a) = + \sin a, \ \cos(180^0 - a) = - \cos a, \\
\operatorname{tg}(180^0 - a) = - \operatorname{tg} a, \ \operatorname{cotg}(180^0 - a) = - \operatorname{cotg} a,
\end{array}\right\} \quad (13)$$

---

aber setzten wir voraus, dass man zum Winkel 270^0 dadurch gelange, dass man einen kleinern Winkel wachsen lasse. Würde man zu 270^0 in umgekehrter Weise gelangen, so würde aus $\operatorname{tg}(270^0 + a) = - \operatorname{cotg} a$ für $a = 0$ folgen $\operatorname{tg} 270^0 = - \operatorname{cotg} 0^0 = - \infty$. Man wird hieraus leicht die Richtigkeit folgender Sätze erkennen:

$$\operatorname{tg} 90^0 = \pm \infty, \ \operatorname{cotg} 180^0 = \mp \infty, \ \operatorname{tg} 270^0 = \pm \infty, \ \operatorname{cotg} 360^0 = \mp \infty,$$

worin das obere Zeichen gilt, wenn man zu dem betreffenden Winkel gelangt, indem man einen Winkel aus dem vorhergehenden Quadranten wachsen lässt; das untere dagegen, wenn man einen Winkel aus dem nachfolgenden Quadranten abnehmen lässt. Wenn man will, kann man damit die folgenden Gleichungen verbinden:

$$\cos 90^0 = \pm 0, \ \operatorname{cotg} 90^0 = \pm 0, \ \sin 180^0 = \pm 0, \ \operatorname{tg} 180^0 = \mp 0, \ \cos 270^0 = \mp 0,$$
$$\operatorname{cotg} 270^0 = \pm 0, \ \sin 360^0 = \mp 0, \ \operatorname{tg} 360^0 = \mp 0,$$

welche unter denselben Bedingungen gelten.

$$\left.\begin{array}{l}\sin(180^0+a)=-\sin a,\ \cos(180^0+a)=-\cos a,\\ tg(180^0+a)=+tg\,a,\ cotg(180^0+a)=+cotg\,a,\\ \sin(270^0-a)=-\cos a,\ \cos(270^0-a)=-\sin a,\\ tg(270^0-a)=+cotg\,a,\ cotg(270^0-a)=+tg\,a,\\ \sin(270^0+a)=-\cos a,\ \cos(270^0+a)=+\sin a,\\ tg(270^0+a)=-cotg\,a,\ cotg(270^0+a)=-tg\,a,\\ \sin(360^0-a)=-\sin a,\ \cos(360^0-a)=+\cos a,\\ tg(360^0-a)=-tg\,a,\ cotg(360^0-a)=-cotg\,a.\end{array}\right\}\ (13)$$

Ist A irgend ein beliebiger Winkel, so ist ferner:

$$\sin(n.360^0+A)=\sin A,\ \cos(n.360^0+A)=\cos A,$$
$$tg(n.360^0+A)=tg\,A,\ cotg(n.360^0+A)=cotg\,A.\ (14)$$

Anmerkung. Die in den Formeln (13) enthaltenen Sätze lassen sich leicht im Gedächtnisse behalten, wenn man beachtet, dass man jeden Winkel, der in einem der vier Quadranten liegt, in doppelter Weise bezeichnen kann, indem man von der untern oder obern Gränze des Quadranten ausgeht. Ist nun bei dieser Bezeichnung 90^0 oder 270^0 mit in Rechnung, so geht der sin in cos, cos in sin, tg in cotg, cotg in tg über; ist dagegen 180^0 oder 360^0 mit in Rechnung, so geht sin in sin, cos in cos, tg in tg, cotg in cotg über. Natürlich muss man dabei zugleich auf das gehörige Vorzeichen achten.

§. 10.

Sey wieder A ein beliebiger Winkel, so ist $A+180^0$ ein um zwei volle Quadranten grösserer Winkel. Liegt also A im ersten oder zweiten, so liegt $A+180^0$ im dritten oder vierten Quadranten. In allen Fällen sieht man leicht, dass wenn (in einer der Figuren des §. 9, z. B. der zweiten) AC die eine Seite der zwei Winkel A und 180^0+A ist, die andern Seiten in die Verlängerungen von einander fallen. Daraus ergibt sich ganz unmittelbar, dass immer:

$$\sin(180^0+A)=-\sin A,\ \cos(180^0+A)=-\cos A,$$
$$tg(180^0+A)=tg\,A,\ cotg(180^0+A)=cotg\,A\ *\ (15)$$

---

* Wir wollen doch die erste dieser Formeln beweisen. Sey immer $a<90^0$ und nun:

1) A im ersten Quadranten und $=a$, also $180^0+A=180^0+a$, so ist nach (13):

$$\sin A=\sin a,\ \sin(180^0+A)=\sin(180^0+a)=-\sin a,$$
$$\text{d. h. } \sin(180^0+A)=-\sin A.$$

2) A im zweiten Quadranten $=90^0+a$, so ist $180^0+A=270^0+a$, und

$$\sin A=\sin(90^0+a)=\cos a,\ \sin(180^0+A)=\sin(270^0+a)=-\cos a,$$
$$\text{d. h. } \sin(180^0+A)=-\sin A.$$

sey, was auch immer A sey, selbst wenn $180^\circ + A$ über 360° hinausreicht. Setzt man hier $180^\circ + A$ für A, was man darf, da diese Formeln ganz unbedingt gelten, so ist:

$$\sin(2.180^\circ + A) = -\sin(180^\circ + A) = +\sin A,$$
$$\cos(2.180^\circ + A) = -\cos(180^\circ + A) = \cos A,$$
$$\operatorname{tg}(2.180^\circ + A) = \operatorname{tg}(180^\circ + A) = \operatorname{tg} A,$$
$$\operatorname{cotg}(2.180^\circ + A) = \operatorname{cotg}(180^\circ + A) = \operatorname{cotg} A \text{ (vergl.(14))}.$$

Wie man hier weiter gehen kann ist klar. Allgemein ergibt sich so:

$$\sin(n.180^\circ + A) = \pm \sin A, \quad \cos(n.180^\circ + A) = \pm \cos A,$$
$$\operatorname{tg}(n.180^\circ + A) = \operatorname{tg} A, \quad \operatorname{cotg}(n.180^\circ + A) = \operatorname{cotg} A, \quad (15')$$

in welchen Formeln die obern Zeichen gelten, wenn n eine gerade, die untern, wenn n eine ungerade Zahl ist (n ist immer ganz und positiv).

§. 11.

Wir wollen nun nachweisen, dass die Formeln des §. 8 gelten, a und b mögen was immer für Winkel seyn. Zu dem Ende unterscheiden wir die folgenden Fälle.

1) Sey $a \begin{matrix} > 0^\circ \\ < 90^\circ \end{matrix}$, $b \begin{matrix} > 0^\circ \\ < 90^\circ \end{matrix}$, und $a + b$ natürlich $< 180^\circ$, aber $> 90^\circ$. Setzen wir nun $a = 90^\circ - a'$, $b = 90^\circ - b'$, so sind a' und b' unter 90°, und es ist $a + b = 180^\circ - (a' + b')$, also da $a + b > 90^\circ$, jedenfalls $a' + b' < 90^\circ$. Für die Summe $a' + b'$ kann man also die zwei Formeln (9) und (10) anwenden. Aber es ist offenbar $\sin a = \sin(90^\circ - a') = \cos a'$, $\cos a = \cos(90^\circ - a') = \sin a'$, $\sin b$

---

3) A im dritten Quadranten $= 180^\circ + a$, also $180^\circ + A = 360^\circ + a$, und
$\sin A = \sin(180^\circ + a) = -\sin a$, $\sin(180^\circ + A) = \sin(360^\circ + a) = \sin a$,
d. h. $\sin(180^\circ + A) = -\sin A$.

4) A im vierten Quadranten $= 270^\circ + a$, also $180^\circ + A = 450^\circ + a = 360^\circ + 90^\circ + a$, mithin
$\sin A = \sin(270^\circ + a) = -\cos a$, $\sin(180^\circ + A) = \sin(90^\circ + a) = \cos a$,
d. h. $\sin(180^\circ + A) = -\sin A$.

Reicht A über 360° hinaus, so ist, wenn B unter 360°, etwa $A = 360^\circ + B$, also $180^\circ + A = 360^\circ + 180^\circ + B$, mithin
$\sin A = \sin B$, $\sin(180^\circ + A) = \sin(180^\circ + B)$
und da ja $\sin(180^\circ + B) = -\sin B$, so ist also auch $\sin(180^\circ + A) = -\sin A$.

Aehnliches gilt, wenn A über 2.360°, 3.360° u. s. w. hinausreicht.

$= \sin(90^0 - b') = \cos b'$, $\cos b = \cos(90^0 - b') = \sin b'$, also hat man (unter Beachtung der Formeln (13)):

$\sin(a+b) = \sin[180^0 - (a'+b')] = \sin(a'+b') = \sin a' \cos b'$
$+ \cos a' \sin b' = \cos a \sin b + \sin a \cos b$,

$\cos(a+b) = \cos[180^0 - (a'+b')] = - \cos(a'+b') =$
$- \cos a' \cos b' + \sin a' \sin b' = - \sin a \sin b + \cos a \cos b$,

wodurch offenbar die Richtigkeit der Formeln (9) und (10) bewiesen ist. *

2) $a \begin{matrix} > 0^0 \\ < 90^0 \end{matrix}$, $b \begin{matrix} > 90^0 \\ < 180^0 \end{matrix}$, $a+b \begin{matrix} > 90^0 \\ < 180^0 \end{matrix}$. **

$b = 90^0 + b'$, $b' < 90^0$, $a+b = 90^0 + a + b'$, $a + b' < 90^0$.

$\sin b = \sin(90^0 + b') = \cos b'$, $\cos b = \cos(90^0 + b') = - \sin b'$;

also $\sin b' = - \cos b$, $\cos b' = \sin b$.

$\sin(a+b) = \sin[90^0 + a + b'] = \cos(a+b') = \cos a \cos b' - \sin a$
$\sin b' = \cos a \sin b - \sin a . (- \cos b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$.

$\cos(a+b) = \cos(90^0 + a + b') = - \sin(a+b') = - \sin a \cos b'$
$- \cos a \sin b' = - \sin a \sin b - \cos a (- \cos b) = - \sin a \sin b$
$+ \cos a \cos b$.

3) $a \begin{matrix} > 0^0 \\ < 90^0 \end{matrix}$, $b \begin{matrix} > 90^0 \\ < 180^0 \end{matrix}$, $a+b \begin{matrix} > 180^0 \\ < 270^0 \end{matrix}$.

$a = 90^0 - a'$, $b = 180^0 - b'$, $a' < 90^0$, $b' < 90^0$;
$a + b = 270^0 - (a' + b')$, $a' + b' < 90^0$.

$\sin a = \cos a'$, $\cos a = \sin a'$, $\sin b = \sin b'$, $\cos b = - \cos b'$;
$\sin a' = \cos a$, $\cos a' = \sin a$, $\sin b' = \sin b$, $\cos b' = - \cos b$.

$\sin(a+b) = \sin[270^0 - (a'+b')] = - \cos(a'+b') = - \cos a'$
$\cos b' + \sin a' \sin b' = - \sin a . (- \cos b) + \cos a \sin b = \sin a \cos b$
$+ \cos a \sin b$.

---

* Die Formeln (9) und (10) des §. 8 sind nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Summe $a + b < 90^0$; für unsern Fall ist diess nicht mit der Summe $a + b$, wohl aber mit $a' + b'$ der Fall, so dass für letztere die genannten Formeln gelten. Da wir aber schliesslich Resultate erhalten, die identisch sind mit den in §. 8 erhaltenen, so erhellt daraus die Richtigkeit jener Formeln, auch wenn $a + b > 90^0$.

** Liegt a zwischen 0^0 und 90^0, b zwischen 90^0 und 180^0, so kann $a + b$ zwischen 90^0 und 180^0, oder zwischen 180^0 und 270^0 liegen; wir trennen diese Fälle hier sowohl als im Folgenden. Die übrigen Angaben bedürfen wohl einer weitern Erläuterung nicht, da sie sich ganz von selbst ergeben, wenn man die Formeln (13) beachtet. Da man jeweils für $\sin(a+b)$ und $\cos(a+b)$ genau die Formeln (9) und (10) erhält, so sind diese eben damit bewiesen.

$\cos(a+b) = \cos[270^\circ - (a'+b')] = -\sin(a'+b') = -\sin a' \cos b' - \cos a' \sin b' = -\cos a \,.\, (-\cos b) - \sin a \sin b = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

4) $a \begin{matrix} > 90^\circ \\ < 180^\circ \end{matrix}, b \begin{matrix} > 90^\circ \\ < 180^\circ \end{matrix}, a+b \begin{matrix} > 180^\circ \\ < 270^\circ \end{matrix}$.

$a = 90^\circ + a', \; b = 90^\circ + b' \; a' < 90^\circ, \; b' < 90^\circ;$

$a + b = 180^\circ + (a'+b'), \; a'+b' < 90^\circ.$

$\sin a = \cos a', \; \cos a = -\sin a', \; \sin b = \cos b', \; \cos b = -\sin b';$

$\sin a' = -\cos a, \; \cos a' = \sin a, \; \sin b' = -\cos b, \; \cos b' = \sin b.$

$\sin(a+b) = \sin[180^\circ + (a'+b')] = -\sin(a'+b') = -\sin a' \cos b' - \cos a' \sin b' = -(-\cos a) \sin b - \sin a (-\cos b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b.$

$\cos(a+b) = \cos[180^\circ + (a'+b')] = -\cos(a'+b') = -\cos a' \cos b' + \sin a' \sin b' = -\sin a \,.\, \sin b + (-\cos a)(-\cos b) = -\sin a \,.\, \sin b + \cos a \cos b.$

5) $a \begin{matrix} > 90^\circ \\ < 180^\circ \end{matrix}, b \begin{matrix} > 90^\circ \\ < 180^\circ \end{matrix}, a+b \begin{matrix} > 270^\circ \\ < 360^\circ \end{matrix}$.

$a = 180^\circ - a', \; b = 180^\circ - b', \; a' < 90^\circ, \; b' < 90^\circ;$

$a + b = 360^\circ - (a'+b'); \; a'+b' < 90^\circ.$

$\sin a = \sin a', \; \cos a = -\cos a', \; \sin b = \sin b', \; \cos b = -\cos b';$

$\sin a' = \sin a, \; \cos a' = -\cos a, \; \sin b' = \sin b, \; \cos b' = -\cos b.$

$\sin(a+b) = \sin[360^\circ - (a'+b')] = -\sin(a'+b') = -\sin a' \cos b' - \cos a' \sin b' = -\sin a(-\cos b) - (-\cos a) \sin b = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

$\cos(a+b) = \cos[360^\circ - (a'+b')] = \cos(a'+b') = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b' = (-\cos a)(-\cos b) - \sin a \sin b = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

Für alle Winkel unter 180° haben wir also die fraglichen zwei Formeln bewiesen.

Seyen nun a und b Winkel zwischen 180° und 360°, so setze man:

$$a = 180^\circ + a', \; b = 180^\circ + b',$$

also $\quad a' < 180^\circ, \; b' < 180^\circ, \; a + b = 360^\circ + (a'+b'),$

so ist nach §. 10:

$\sin a = \sin(180^\circ + a') = -\sin a'; \; \cos a = \cos(180^\circ + a') = -\cos a', \; \sin b = -\sin b', \; \cos b = -\cos b';$

$\sin a' = -\sin a, \; \cos a' = -\cos a, \; \sin b' = -\sin b, \; \cos b' = -\cos b.$

Ferner:

$$\sin(a+b) = \sin[360^0 + a' + b'] = \sin(a' + b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b',$$

indem diese Formel gilt, wenn $a' < 180^0$, $b' < 180^0$. Setzt man hier die gleichgeltenden Werthe, so erhält man:

$$\sin(a+b) = (-\sin a)(-\cos b) + (-\cos a)(-\sin b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Ebenso:

$$\cos(a+b) = \cos[360^0 + a' + b'] = \cos(a' + b') = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b' = (-\cos a)(-\cos b) - (-\sin a)(-\sin b) = \cos a \cos b - \sin a \,.\, \sin b.$$

Somit gelten obige Formeln für alle Werthe von a und b zwischen 0 und 360^0. Gehen a und b über 360^0 hinaus, so kann man jeweils 360^0 weglassen (§. 9) und man ersieht leicht, dass dieselben Formeln immer noch gelten. *

Die Formeln (11) und (12) des §. 8 folgen aber unmittelbar aus (9) und (10); also gelten alle vier Grundformeln des §. 8 für beliebige Winkel, natürlich unter der Voraussetzung, dass man nach §. 9 die gehörigen Vorzeichen für die vorkommenden trigonometrischen Funktionen setze.

§. 12.

Aus den Formeln (13) und (14) des §. 9 geht unmittelbar hervor, dass, was auch immer der Winkel A sey, man habe:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1, \quad \operatorname{tg} A \operatorname{cotg} A = 1. \text{**}$$

Dagegen werden die Formeln des §. 4 nicht geradezu gelten. Bei den dortigen Quadratwurzeln haben wir jeweils nur das positive Zeichen beibehalten, weil wir dort natürlich die trigonometrischen Funktionen geradezu als positiv ansehen mussten. Auf unserem jetzigen Standpunkte werden jene Formeln heissen:

$$\sin A = \pm\sqrt{1-\cos^2 A} = \pm\frac{\operatorname{tg} A}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 A}},$$

$$\cos A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}} = \pm\frac{\operatorname{cotg} A}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 A}},$$

---

* Ein auf andern Grundsätzen beruhender Beweis dieser Sätze findet sich in meiner „ebenen Polygonometrie“ (Stuttgart, Metzler) §. 5, S. 11 ff.

** Z. B. $\sin^2(270^0 + a) + \cos^2(270^0 + a) = \cos^2 a + \sin^2 a = 1$,
$\operatorname{tg}(270^0 + a) \operatorname{cotg}(270^0 + a) = (-\operatorname{cotg} a)(-\operatorname{tg} a) = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} a = 1$.

$$\operatorname{tg} A = \pm \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\cos A} = \frac{1}{\operatorname{cotg} A},$$

$$\operatorname{cotg} A = \pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 A}}{\sin A} = \pm \frac{\cos A}{\sqrt{1 - \cos^2 A}} = \frac{1}{\operatorname{tg} A},$$

worin nun die Zeichen so zu wählen sind, wie es A erfordert. Liegt z. B. A im dritten Quadranten, so ist

$$\sin A = -\sqrt{1 - \cos^2 A} = -\frac{\operatorname{tg} A}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 A}};$$

liegt A im vierten Quadranten, etwa:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} = -\frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\cos A} = \frac{1}{\operatorname{cotg} A},$$

u. s. w. Ueberhaupt ist es jetzt leicht, sich jeweils zu überzeugen, wie die Vorzeichen zu wählen sind, wenn man die Quadratwurzel auszuziehen hat.

Da man nun allgemein hat:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A . \sin B,$$
$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

so setze man hier $A = b$, $B = a - b$, wobei a und b willkürlich, jedoch zunächst $a > b$; alsdann erhält man $A + B = a$, also:

$$\sin a = \sin b \cos(a - b) + \cos b \sin(a - b),$$
$$\cos a = \cos b \cos(a - b) - \sin b \sin(a - b).$$

Man multiplizire die erste dieser Gleichungen mit cos b, die zweite mit sin b und subtrahire dann die zweite von der ersten, so erhält man:

$$\sin a . \cos b - \cos a . \sin b = (\cos^2 b + \sin^2 b) \sin(a - b),$$

also weil immer $\cos^2 b + \sin^2 b = 1$:

$$\sin a \cos b - \cos a \sin b = \sin(a - b).$$

Dessgleichen multiplizire man die erste mit sin b, die zweite mit cos b und addire beide:

$$\sin a \sin b + \cos a \cos b = (\sin^2 b + \cos^2 b) \cos(a - b) = \cos(a - b).$$

Man hat also

$$\left.\begin{aligned} \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b, \\ \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Hieraus folgt nun

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\sin(a - b)}{\cos(a - b)} = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b},$$

oder wenn man Zähler und Nenner durch cos a cos b dividirt:

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}. \quad (17)$$

Ebenso:

$$\operatorname{cotg}(a-b)=\frac{\cos(a-b)}{\sin(a-b)}=\frac{\cos a\cos b+\sin a\sin b}{\sin a\cos b-\cos a\sin b},$$

und indem man Zähler und Nenner durch sin a sin b dividirt:

$$\operatorname{cotg}(a-b)=\frac{\operatorname{cotg}a.\operatorname{cotg}b+1}{\operatorname{cotg}b-\operatorname{cotg}a}. \quad (17')$$

Die vier Formeln (16), (17) und (17′) gelten für alle möglichen (positiven) a und b, freilich noch unter der Bedingung, dass $a > b$.

Man wird sich nun leicht überzeugen, dass die Formeln (13) für jedes mögliche a ebenfalls gelten. Hat man z. B. $\cos(180^0 - a)$, so setze man in (16) 180^0 für a, a für b, und hat:

$\cos(180^0-a)=\cos 180^0 . \cos a+\sin 180^0 . \sin a=(-1)\cos a+ 0 . \sin a=-\cos a.$

Um $\sin(270^0+a)$ zu erhalten, setze man in (9) des §. 8: $a=270^0$, a für b und hat:

$\sin(270^0+a)=\sin 270^0 . \cos a+\cos 270^0 . \sin a=(-1)\cos a+ 0 . \sin a=-\cos a$ u. s. w.

Anmerkung. Benützt man die Resultate des §. 7 und 8, so kann man mittelst der Formeln (16) leicht noch die trigonometrischen Funktionen einer Anzahl weiterer Winkel ableiten, was wir jedoch dem Leser überlassen wollen, indem wir bloss die Ableitung andeuten. Man findet nämlich die trigonometrischen Funktionen des Winkels:

3^0, wenn $a = 15^0$, $b = 12^0$, wodurch dann auch die von 87^0,
6^0, „ $a = 18^0$, $b = 12$, „ „ „ „ „ 84^0,
9^0, „ $a = 27^0$, $b = 18^0$, „ „ „ „ „ 81^0,
21^0, „ $a = 36^0$, $b = 15^0$, „ „ „ „ „ 69^0,
24^0, „ $a = 36^0$, $b = 12^0$, „ „ „ „ „ 66^0,
33^0, „ $a = 45^0$, $b = 12^0$, „ „ „ „ „ 57^0,
39^0, „ $a = 54^0$, $b = 15^0$, „ „ „ „ „ 51^0,

so dass man, in Verbindung mit dem in der Anmerkung zu §. 8 Gesagten, die trigonometrischen Funktionen aller Winkel von 3^0 zu 3^0 kennt.

Wir haben in dem Seitherigen nur sin, cos, tg, cotg der Summe oder Differenz zweier Winkel betrachtet. Wollte man dieselben für drei, vier, ... Winkel haben, so unterläge diess keiner Schwierigkeit; so wäre z. B.

$\sin(a+b+c) = \sin a \cos(b+c) + \cos a \sin(b+c) = \sin a[\cos b \cos c - \sin b \sin c] + \cos a[\sin b \cos c + \cos b \sin c] = \sin a \cos b \cos c - \sin a \sin b \sin c + \cos a \sin b \cos c + \cos a \cos b \sin c,$

u. s. w.

§. 13.

Es bleibt uns, zur theoretischen Vervollständigung unserer hier geführten Untersuchungen, noch der Fall **negativer** Winkel zu betrachten übrig. Solche Winkel können nur in Folge von (gewissermassen) willkürlichen Voraussetzungen erscheinen, wenn man z. B. in §. 9 von AC aus in entgegengesetzter Richtung die Winkel durchlaufen würde, als dort geschehen. Das Verhalten negativer Winkel, wie $-A$, lässt sich jedoch am besten aus dem Satze des §. 9 finden, nach welchem ein Abzählen, also auch ein Zuzählen von 360^0 an den trigonometrischen Funktionen Nichts ändert. Demgemäss ist:

$$\left.\begin{aligned}\sin(-A) &= \sin(360^0 - A) = -\sin A,\\ \cos(-A) &= \cos(360^0 - A) = \cos A,\\ \operatorname{tg}(-A) &= \operatorname{tg}(360^0 - A) = -\operatorname{tg} A,\\ \operatorname{cotg}(-A) &= \operatorname{cotg}(360^0 - A) = -\operatorname{cotg} A.\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Die Formeln (9) bis (12) in §. 8 gehen somit in (16) bis (17′) des §. 12 über, wenn man $-b$ für $+b$ setzt, und umgekehrt gehen die letztern in die erstern über; daraus folgt offenbar, dass diese sämmtlichen Formeln nicht nur für alle positiven, sondern auch für alle möglichen negativen Winkel gelten. *

Wir haben nun im Vorstehenden die Verhältnisse der vier trigonometrischen Funktionen ganz vollständig untersucht und gesehen, dass die Grundeigenschaften derselben die folgenden sind:

I) Die Grösse $\sin A$ ist eine **periodische Grösse**, deren **Periode** 360^0 ist, d. h. sobald A um 360^0 zugenommen hat, erlangt $\sin A$ seinen vorigen Werth wieder; nimmt A nur um 180^0 zu, so erlangt allerdings $\sin A$ auch denselben Werth, er ist aber von ent-

---

* Ist namentlich in (16) $b > a$, obgleich beide positiv sind, so ist $a - b$ negativ $= -(b - a)$, also

$$\sin(a - b) = \sin[-(b - a)] = -\sin(b - a).$$

Aber sicherlich

$$\sin(b - a) = \sin b \cos a - \cos b \sin a = -[\sin a \cos b - \cos a \sin b],$$

mithin $$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

auch wenn $b > a$.

Ebenso $$\cos(a - b) = \cos[-(b - a)] = \cos(b - a),$$

fernet $$\cos(b - a) = \cos b \cos a + \sin b \sin a = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

also $$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,\ b > a.$$

gegengesetztem Zeichen. Ist A negativ, so hat sin A den entgegengesetzten Werth von dem, den es für denselben positiven Winkel A hatte. Es sind diese Beziehungen in den Gleichungen:

$$\sin(A + 360^\circ) = \sin A,\ \sin(A + 180^\circ) = -\sin A,$$
$$\sin(-A) = -\sin A$$

ausgesprochen.

Die Werthe von sin A schwanken zwischen -1 und $+1$, ohne diese Gränzen je überschreiten zu können.

2) Die Grösse cos A ist eben so periodisch und die Periode 360°; für 180° Zunahme verhält sie sich wie sin A; für ein negatives A aber erlangt sie denselben Werth wie für ein positives. Also

$$\cos(A + 360^\circ) = \cos A,\ \cos(A + 180^\circ) = -\cos A,$$
$$\cos(-A) = \cos A.$$

Die Werthe von cos A schwanken ebenfalls nur zwischen -1 und $+1$.

3) Die Grössen tg A und cotg A sind periodisch und ihre Periode ist 180°. Für negative A erlangen sie die entgegengesetzten Werthe wie für positive; man hat also:

$$\operatorname{tg}(A + 180^\circ) = \operatorname{tg} A,\ \operatorname{cotg}(A + 180^\circ) = \operatorname{cotg} A,$$
$$\operatorname{tg}(-A) = -\operatorname{tg} A,\ \operatorname{cotg}(-A) = -\operatorname{cotg} A.$$

Die Werthe dieser Grössen schwanken zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

Die übrigen Resultate würden sich natürlich eben so leicht aussprechen lassen, was wir jedoch hier füglich übergehen dürfen.

Anmerkung. Wir haben bereits darauf aufmerksam gemacht, innerhalb welcher Gränzen die Werthe der trigonometrischen Funktionen schwanken und wollen hier diesen Punkt noch einer weitern Betrachtung unterziehen, wobei wir zunächst bloss positive Werthe von A betrachten wollen.

Die Grösse sin A ändert sich mit wachsendem Winkel und zwar ist sie zuerst wachsend von $A = 0^\circ$ bis $A = 90^\circ$, dann abnehmend von $A = 90^\circ$ bis 180°, ferner abnehmend von $A = 180^\circ$ bis $A = 270^\circ$ und zunehmend von $A = 270^\circ$ bis $A = 360^\circ$. Von da an beginnt wieder derselbe Verlauf. Die Gränzwerthe sind: 0 und $+1$, $+1$ und 0, 0 und -1, -1 und 0, so dass also -1 und $+1$ die äussersten Werthe von sin A sind, die in keinem Falle überschritten werden können.

Die Grösse cos A nimmt ab von $A = 0$ bis $A = 90^\circ$, eben so nimmt sie ab von $A = 90^\circ$ bis $A = 180^\circ$; zu dagegen von $A = 180^\circ$ bis $A = 270^\circ$, und eben so zu von $A = 270^\circ$ bis 360°, von wo an derselbe Verlauf beginnt. Ihre Gränzwerthe sind: $+1$ und 0, 0 und -1, -1 und 0, 0 und $+1$, so dass also auch hier -1 und $+1$ die äussersten Werthe sind. Für $\cos A = 0$ ist nothwendig $\sin A = \pm 1$; für $\sin A = 0$ aber $\cos A = \pm 1$ (§. 12). Beide Grössen sind **stetig veränderlich**, d. h. sie ändern sich nur wenig, wenn A sich nur wenig ändert.

Die Grösse tg A nimmt zu von $A = 0^0$ bis $A = 90^0$, eben so von $A = 90^0$ bis $A = 180^0$, von wo derselbe Verlauf beginnt. Ihre Gränzwerthe sind 0 und $+\infty$, $-\infty$ und 0, so dass ihre äussersten Werthe $-\infty$ und $+\infty$ sind; bei $A = 90^0$ springt sie von $+\infty$ zu $-\infty$ über, ändert sich also hier **unstetig**. Natürlich springt sie bei $A = 270^0$ in derselben Weise über.

Die Grösse cotg A nimmt ab von $A = 0^0$ bis $A = 90^0$ und eben so von $A = 90^0$ bis $A = 180^0$; ihre Gränzwerthe sind $+\infty$ und 0, 0 und $-\infty$, so dass sie zwischen $-\infty$ und $+\infty$ schwankt. Von $A = 180^0$ hat sie denselben Verlauf wie so eben, springt aber bei $A = 180^0$ von $-\infty$ zu $+\infty$, und bei 360^0 von $-\infty$ zu $+\infty$ über.

Das Verhalten bei negativen Winkeln wird sich eben so leicht aufstellen lassen.

§. 14.

Aus den bis jetzt abgeleiteten Formeln ergeben sich in leichter Weise eine Menge anderer, wovon wir einige ableiten, die übrigen dem Leser zur eigenen Uebung vorlegen wollen. Die hier nun erhaltenen Formeln gelten natürlich für ganz beliebige (positive oder negative) Winkel.

Aus der Formel (9) in §. 8 folgt, wenn man $b = a$ setzt:

$$\sin 2a = \sin a . \cos a + \cos a . \sin a = 2 \sin a \cos a. \quad (19)$$

Setzt man in der dortigen Formel (10) dessgleichen $b = a$:

$$\cos 2a = \cos a . \cos a - \sin a . \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a. \quad (20)$$

Setzt man in (20) $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$, so ist

$$\cos 2a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a, \quad (20')$$

und wenn man $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ setzt:

$$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1. \quad (20'')$$

Ganz eben so folgt aus (11) und (12):

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}, \quad \operatorname{cotg} 2a = \frac{\operatorname{cotg}^2 a - 1}{2 \operatorname{cotg} a}. \quad (21)$$

Aus (20′) und (20″) folgt nun umgekehrt:

$$\left.\begin{array}{l} 2\sin^2 a = 1 - \cos 2a, \quad 2\cos^2 a = 1 + \cos 2a, \\ \sin a = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos 2a}{2}}, \quad \cos a = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos 2a}{2}}, \end{array}\right\} \quad (22)$$

in welchen Gleichungen das Zeichen so zu wählen ist, wie es sin a oder cos a verlangen.

Man kann diese Formeln auch etwas anders ausdrücken. Setzt man nämlich $a = \frac{A}{2}$, so ergeben sich die folgenden Formeln:

$$\left.\begin{array}{l}\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},\ \cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} \\ = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1,\ \operatorname{tg} A = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}},\ \operatorname{cotg} A = \dfrac{\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2} - 1}{2\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}, \\ 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A,\ 2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A, \\ \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}},\ \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}.\end{array}\right\}(23)$$

Die Addition der Formeln (9) und der ersten (16), (10) und der zweiten (16), so wie die Subtraktion derselben gibt ganz unmittelbar:

$$\left.\begin{array}{l}\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cdot \cos b, \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b, \\ \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b, \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b.\end{array}\right\}(24)$$

Setzt man in diesen Formeln:

$$a = \frac{A+B}{2},\ b = \frac{A-B}{2},\ \text{also } a+b = A,\ a-b = B,$$

so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \\ \sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right), \\ \cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \\ \cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \\ \qquad = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{B-A}{2}\right).\end{array}\right\}(25)$$

Diess sind die wesentlichsten Formeln, die wir später benützen werden. Wir legen dem Leser zur Uebung eine Reihe weiterer ohne Beweis vor.

$$\operatorname{tg} a = \frac{1-\cos 2a}{\sin 2a},\ \operatorname{cotg} a = \frac{1+\cos 2a}{\sin 2a},\ \operatorname{tg}^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a},$$

$$\operatorname{cotg}^2 a = \frac{1+\cos 2a}{1-\cos 2a}.$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{cotg} a}{\operatorname{cotg}^2 a - 1}, \quad \operatorname{cotg} 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{2 \operatorname{tg} a}, \quad \operatorname{cotg} 2a = \frac{\operatorname{cotg} a - \operatorname{tg} a}{2},$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2}{\operatorname{cotg} a - \operatorname{tg} a}, \quad \sin 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}, \quad \cos 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a},$$

$$\sin 2a = \frac{2 \operatorname{cotg} a}{1 + \operatorname{cotg}^2 a}, \quad \cos 2a = \frac{\operatorname{cotg}^2 a - 1}{\operatorname{cotg}^2 a + 1}.$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{1 - (\sin \tfrac{1}{2} a - \cos \tfrac{1}{2} a)^2}{\cos^2 \tfrac{1}{2} a - \sin^2 \tfrac{1}{2} a}, \quad \operatorname{cotg} a = \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2} a - \sin^2 \tfrac{1}{2} a}{1 - (\sin \tfrac{1}{2} a - \cos \tfrac{1}{2} a)^2},$$

$$1 + \sin a = 2 \sin^2 (45^0 + \tfrac{1}{2} a), \quad 1 - \sin a = 2 \cos^2 (45^0 + \tfrac{1}{2} a),$$

$$\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} = \operatorname{tg}^2 (45^0 + \tfrac{1}{2} a), \quad \sin a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 (45^0 - \tfrac{1}{2} a)}{1 + \operatorname{tg}^2 (45^0 - \tfrac{1}{2} a)},$$

$$\frac{1 + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a} = \operatorname{tg}(a + 45^0) = \operatorname{cotg}(45^0 - a), \quad \frac{\operatorname{cotg} a - 1}{\operatorname{cotg} a + 1} = \operatorname{cotg}(a + 45^0)$$

$$= \operatorname{tg}(45^0 - a), \quad 1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}, \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a},$$

$$\frac{1 - \cos a}{\cos a} = \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} \frac{a}{2}, \quad \cos a = \frac{2 \operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2} a)}{1 + \operatorname{tg}^2 (45^0 - \tfrac{1}{2} a)}, \quad \sin a + \cos a$$

$$= \sqrt{2} \,.\, \sin(45^0 + a), \quad \cos a - \sin a = \sqrt{2} \,.\, \sin(45^0 - a).$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a + b)}{\cos a \cos b}, \quad \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a - b)}{\cos a \cos b}, \quad \operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b$$

$$= \frac{\sin(a + b)}{\sin a \sin b}, \quad \operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} b = \frac{\sin(b - a)}{\sin a \sin b}, \quad \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} = \frac{\sin(a - b)}{\sin(a + b)},$$

$$\frac{\operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} b}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b} = \frac{\sin(b - a)}{\sin(b + a)}, \quad \sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a + b) \sin(a - b),$$

$$\cos^2 a - \cos^2 b = -\sin(a + b) \sin(a - b), \quad \cos^2 a - \sin^2 b$$

$$= \cos(a + b) \cos(a - b), \quad \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a + b)}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a - b)}, \quad \frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} =$$

$$-\frac{\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a + b)}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a - b)}, \quad \cos(a - b) + \sin(a + b) = 2 \sin(a + 45^0) \cos(b - 45^0),$$

$$\cos(a - b) - \sin(a + b) = 2 \sin(45^0 - a) \cos(b + 45^0), \quad \cos(a + b)$$

$$+ \sin(a - b) = 2 \sin(45^0 + a) \cos(45^0 + b), \quad \cos(a + b) - \sin(a - b)$$

$$= 2 \sin(45^0 - a) \cos(45^0 - b), \quad \frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a + b),$$

$$\frac{\cos a - \cos b}{\sin a + \sin b} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b - a), \quad \operatorname{cotg} b - \operatorname{tg} a = \frac{\cos(a + b)}{\cos a \sin b},$$

$$\operatorname{cotg} b + \operatorname{tg} a = \frac{\cos(a - b)}{\cos a \sin b}, \quad \operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \frac{\sin(a + b) \sin(a - b)}{\cos^2 a \cos^2 b},$$

$1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b=\frac{\cos(a-b)}{\cos a \cos b}$, $1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b=\frac{\cos(a+b)}{\cos a \cos b}$, $1-\operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b$
$=\frac{\cos(a+b)\cos(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$, $\frac{\operatorname{cotg} a+\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a+\operatorname{cotg} b}=\operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b$, $\frac{\operatorname{tg}^2 a-\operatorname{tg}^2 b}{1-\operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b}$
$=\operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}(a-b)$, $\frac{\operatorname{cotg}^2 b-\operatorname{cotg}^2 a}{\operatorname{cotg}^2 b \operatorname{cotg}^2 a-1}=\operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}(a-b)$.
$\sin a \cos a+\sin b \cos b=\sin(a+b)\cos(a-b)$, $\sin a \cos a-\sin b \cos b$
$=\cos(a+b)\sin(a-b)$, $\frac{\sin(a+b)}{\sin a+\sin b}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$, $\frac{\sin(a+b)}{\sin a-\sin b}$
$=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)+\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)=\frac{2\sin a}{\cos a+\cos b}$,
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)-\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)=\frac{2\sin b}{\cos a+\cos b}$.
$4\sin a \sin b \sin c=-\sin(a+b+c)+\sin(a+b-c)+\sin(a-b+c)$
$+\sin(-a+b+c)$,
$\sin a+\sin b+\sin c=\sin(a+b+c)+4\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a+c)$
$\sin\frac{1}{2}(b+c)$,
$4\cos a \cos b \cos c=\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a-b+c)$
$+\cos(-a+b+c)$,
$\cos a+\cos b+\cos c=-\cos(a+b+c)+4\cos\frac{1}{2}(a+b).\cos\frac{1}{2}(a+c)$
$\cos\frac{1}{2}(b+c)$,
$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c=1+2\cos a \cos b \cos c-4\sin\frac{1}{2}(a+b+c)$
$\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)$,
$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c+\frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cos b \cos c}$.

Zweiter Abschnitt.

Berechnung der trigonometrischen Funktionen. Tafeln derselben und Benützung dieser Tafeln.

§. 15.

Aus den im ersten Abschnitt aus einander gesetzten Lehren folgt, dass man nur die trigonometrischen Funktionen aller Winkel

zwischen 0 und 45° zu kennen brauche, um sofort die Werthe derselben für alle andern Winkel zu erhalten. Es folgt diess ganz unmittelbar aus der Ansicht der Formeln (8) und (13) in den §§. 6 und 9. Wir werden uns also zunächst mit dieser Aufgabe zu beschäftigen haben. In §. 7 haben wir allerdings bereits für einige besondere Fälle die trigonometrischen Funktionen gefunden; dieselben können aber natürlich nicht genügen, da wir, des Gebrauchs wegen, die trigonometrischen Funktionen aller zwischen 0 und 45° liegenden Winkel, wenigstens von Minute zu Minute kennen müssen. Es lassen sich zu diesem Ende auf der Stufe, auf der wir im Augenblick stehen, zwei Wege einschlagen, die wir nun beide aus einander setzen wollen, wobei wir jedoch bemerken, dass der zweite, etwas umständlichere, ohne der Deutlichkeit und dem Verständniss Eintrag zu thun, auch zunächst übergangen werden könnte. Wir haben ihn jedoch, seines theoretischen Interesses sowohl, als spätern Gebrauchs wegen, gerne beibehalten. Für beide Wege bedürfen wir übrigens des folgenden Satzes der ebenen Geometrie:

Fig. 11.

Ist C ein Winkel kleiner als 90°, BD ein mit dem Halbmesser CB = r zwischen seinen Seiten beschriebener Bogen, dessen Länge wir mit Bogen C bezeichnen wollen; sind DA, BE senkrecht auf CB, so ist

$$AD < \text{Bog. C}; \; BE > \text{Bog. C}.$$

Da CD = CB = r und

$$\frac{AD}{CD} = \sin C, \; \frac{BE}{CB} = \operatorname{tg} C, \text{ also } AD = r \sin C, \; BE = r \operatorname{tg} C,$$

so folgt hieraus unmittelbar:

$$\sin C < \frac{\text{Bog.C}}{r}, \; \operatorname{tg} C > \frac{\text{Bog.C}}{r},$$

oder, wie man auch schreiben kann:

$$\sin C < \frac{\text{Bog.C}}{r} < \operatorname{tg} C. \quad (26)$$

Daraus folgt ferner, weil $\operatorname{tg} C = \frac{\sin C}{\cos C}$:

$$\sin C < \frac{\text{Bog.C}}{r}, \; \sin C > \frac{\text{Bog.C}}{r} \cos C, \; \frac{\text{Bog.C}}{r} > \sin C > \frac{\text{Bog.C}}{r} \cos C. *$$

* Das heisst also sin C liegt seinem Werthe nach immer zwischen dem Werthe von $\frac{\text{Bog. C}}{r}$ und $\frac{\text{Bog. C}}{r} \cos C$.

Lässt man nun C kleiner werden, so wird $\cos C$ mehr und mehr gegen 1 gehen, also $\frac{\text{Bog.}C}{r}\cos C$ mehr und mehr der Grösse $\frac{\text{Bog.}C}{r}$ sich nähern. Da nun immer $\sin C$ zwischen $\frac{\text{Bog.}C}{r}$ und $\frac{\text{Bog.}C}{r}\cos C$ enthalten ist; diese zwei aber mehr und mehr einander gleich werden, so wird also mit abnehmendem C der Werth von $\sin C$ mit dem von $\frac{\text{Bog.}C}{r}$ immer mehr übereinstimmen. *

Da ferner vermöge der Beziehung (26) $\frac{\text{Bog.}C}{r}$ immer zwischen $\sin C$ und $\operatorname{tg} C$ liegt, so wird, in so ferne wir berechtigt wären, $\sin C$ und $\operatorname{tg} C$ nahezu als gleich anzunehmen, die näherungsweise Gleichheit von $\sin C$ und $\frac{\text{Bog.}C}{r}$ in die Augen fallend seyn. Endlich ist klar, dass wenn einmal C klein genug ist, dass näherungsweise $\sin C$ und $\operatorname{tg} C$ als gleich angesehen werden dürfen, diese Annahme für noch kleinere C noch mehr genähert richtig ist.

Stellt AD die halbe Seite eines in den Kreis vom Halbmesser $CB = r$ beschriebenen regelmässigen nEcks dar, so ist BE bekanntlich die halbe Seite des um den Kreis beschriebenen regelmässigen Vielecks von derselben Seitenanzahl und es ist Winkel $C = \frac{180^0}{n}$.

Daraus folgt dann:

$$\frac{AD}{r} = \sin\frac{180^0}{n},\ \frac{BE}{r} = \operatorname{tg}\frac{180^0}{n};\ AD = r\sin\frac{180^0}{n},\ BE = r\operatorname{tg}\frac{180^0}{n};$$

ferner ist

$$\frac{AC}{r} = \cos\frac{180^0}{n},\ AC = r\cos\frac{180^0}{n},\ CB = r.$$

Die Fläche des Dreiecks ACD ist aber der $2n^{te}$ Theil der Fläche des Vielecks im Kreis; eben so CBE der $2n^{te}$ Theil vom Vieleck um den Kreis. Erstere ist:

$$\frac{AC \cdot AD}{2} = \frac{r^2}{2}\sin\frac{180^0}{n}\cdot\cos\frac{180^0}{n},$$

also die Fläche des Vielecks im Kreis:

* Man sieht leicht, dass im Grunde diess darauf zurückkömmt, dass mit abnehmendem Mittelpunktswinkel eines Kreises die Sehne desselben mehr und mehr sich seinem Bogen nähert und zuletzt mit ihm zusammenfällt.

$$2n\,.\,\frac{r^2}{2}\sin\frac{180^0}{n}\,.\cos\frac{180^0}{n} = \frac{n\,.\,r^2}{2}\sin\frac{360^0}{n} \quad (\S.\,14\,(19));$$

die Fläche des Vielecks um den Kreis ist

$$2n\,.\,\frac{CB\,.\,BE}{2} = \frac{2n\,.\,r^2}{2}\,tg\,\frac{180^0}{n} = n\,.\,r^2\,tg\,\frac{180^0}{n}.$$

Geht man nun vom regelmässigen Viereck im Kreise aus, so kann man bekanntlich leicht die Inhalte der 4, 8, 16, ... Ecke in und um den Kreis berechnen * und erhält so für das regelmässige

8Eck	im Kreis: $2{\cdot}8284271\,r^2$,	um den Kreis: $3{\cdot}3137085\,r^2$,
16 „	„ „ $3{\cdot}0614674\,r^2$,	„ „ „ $3{\cdot}1825979\,r^2$,
32 „	„ „ $3{\cdot}1214451\,r^2$,	„ „ „ $3{\cdot}1517249\,r^2$,
64 „	„ „ $3{\cdot}1365485\,r^2$,	„ „ „ $3{\cdot}1441184\,r^2$,
128 „	„ „ $3{\cdot}1403311\,r^2$,	„ „ „ $3{\cdot}1422236\,r^2$,
256 „	„ „ $3{\cdot}1412772\,r^2$,	„ „ „ $3{\cdot}1417504\,r^2$,

* Man vergleiche etwa: Legendre Geometrie, Buch IV, Satz XIV. Die hieher gehörigen Formeln sind: Seyen F, F' die Flächen des regelmässigen n Ecks in und um den Kreis; f, f' die des regelmässigen 2n Ecks in und um den Kreis, so ist:

$$f = \sqrt{FF'},\; f' = \frac{2\,FF'}{F+f}.$$

Es folgt diess übrigens sehr leicht aus den im Texte angeführten Formeln. Denn man hat:

$$F = \frac{nr^2}{2}\sin\frac{360^0}{n},\; f = nr^2\sin\frac{180^0}{n},\; F' = nr^2\,tg\,\frac{180^0}{n},\; f' = 2\,nr^2\,tg\,\frac{90^0}{n},$$

also

$$FF' = \frac{n^2r^4}{2}\sin\frac{360^0}{n}\,tg\,\frac{180^0}{n} = \frac{n^2r^4}{2}\,.\,2\sin\frac{180^0}{n}\cos\frac{180^0}{n}\,.\,\frac{\sin\frac{180^0}{n}}{\cos\frac{180^0}{n}} = n^2r^4\sin^2\frac{180^0}{n} = f^2,$$

$$\frac{2FF'}{F+f} = \frac{n^2r^4\sin\frac{360^0}{n}\,tg\,\frac{180^0}{n}}{\frac{nr^2}{2}\sin\frac{360^0}{n} + nr^2\sin\frac{180^0}{n}} = \frac{2\,n^2r^4\sin^2\frac{180^0}{n}}{nr^2\sin\frac{180^0}{n}\cos\frac{180^0}{n} + nr^2\sin\frac{180^0}{n}} = \frac{2nr^2\sin\frac{180^0}{n}}{\cos\frac{180^0}{n}+1}$$

$$= \frac{4nr^2\sin\frac{90^0}{n}\cos\frac{90^0}{n}}{2\cos^2\frac{90^0}{n}} \quad (\S.\,14\,(19)\text{ und }(23)) = 2nr^2\,tg\,\frac{90^0}{n} = f'.$$

Nun ist die Fläche des Vierecks im Kreis $= 2\,r^2$, um den Kreis $= 4\,r^2$, also die des Achtecks $(n = 4)$:

$$\text{im Kreis} = \sqrt{8\,r^4} = r^2\sqrt{8} = 2{\cdot}8284271\,r^2,$$

$$\text{um den Kreis} = \frac{2\,.\,2r^2\;4r^2}{2r^2 + r^2\sqrt{8}} = \frac{16\,r^2}{2+\sqrt{8}} = 3{\cdot}3137085\,r^2 \text{ u. s. w.}$$

512Eck im Kreis:	$3{\cdot}1415138\,r^2$, um den Kreis:	$3{\cdot}1416321\,r^2$,
1024 „ „ „	$3{\cdot}1415729\,r^2$, „ „ „	$3{\cdot}1416025\,r^2$,
2048 „ „ „	$3{\cdot}1415877\,r^2$, „ „ „	$3{\cdot}1415951\,r^2$,
4096 „ „ „	$3{\cdot}1415914\,r^2$, „ „ „	$3{\cdot}1415933\,r^2$,
8192 „ „ „	$3{\cdot}1415923\,r^2$, „ „ „	$3{\cdot}1415928\,r^2$,
16384 „ „ „	$3{\cdot}1415925\,r^2$, „ „ „	$3{\cdot}1415927\,r^2$,
32768 „ „ „	$3{\cdot}1415926\,r^2$, „ „ „	$3{\cdot}1415926\,r^2$,
65536 „ „ „	$3{\cdot}1415926\,r^2$.	

Man hat also:

$$\frac{65536 r^2}{2} \sin \frac{360^0}{65536} = 3{\cdot}1415926 r^2,\ 32768 r^2 \operatorname{tg} \frac{180^0}{32768} = 3{\cdot}1415926 r^2,$$

d. h. $$32768 \sin \frac{180^0}{32768} = 3{\cdot}1415926 = 32768 \operatorname{tg} \frac{180^0}{32768},$$

$$\sin \frac{180^0}{32768} = \operatorname{tg} \frac{180^0}{32768} = \frac{3{\cdot}1415926}{32768}.$$

Aber $\frac{180^0}{32768} = \frac{180.60.60}{32768} = 20''$ ungefähr, also bis auf 7 Dezimalstellen genau:

$$\sin 20'' = \operatorname{tg} 20'',$$

mithin für jeden kleinern Winkel der Sinus der Tangente gleich, also, wenn α gleich oder kleiner als $20''$:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Bogen}\,\alpha}{r}.$$

Also z. B.

$$\sin 10'' = \frac{\text{Bog.}10''}{r} = \frac{2 r\pi . 10}{360.60.60.r} = \frac{\pi}{18.60.60},$$

wodurch $\sin 10''$ gefunden ist. (Zum Mittelpunktswinkel $360^0 = 360 : 60 . 60''$ gehört der Umfang $= 2 r\pi$, also hat man immer $360 . 60 . 60 : 2 r\pi = 10 : \text{Bog.} 10''$.) Nach §. 4 findet man hieraus $\cos 10''$ und wenn man in (9) und (10) §. 7 setzt $a = 10''$, $b = 10''$, so erhält man $\sin 20''$, $\cos 20''$; setzt man dann $a = 20''$, $b = 20''$, so erhält man $\sin 40''$, $\cos 40''$; für $a = 40''$, $b = 20''$ erhält man $\sin 1'$, $\cos 1'$; für $a = 1'$, $b = 1'$ aber $\sin 2'$, $\cos 2'$; für $a = 2'$, $b = 1'$ dagegen $\sin 3'$, $\cos 3'$. Wie man hier weiter gehen konnte, ist klar, so dass man die Sinus und Cosinus aller Winkel von Minute zu Minute (ja wenn man will von Sekunde zu Sekunde) berechnen konnte; daraus erhielt man dann nach §. 4 die Tangenten und Co-

tangenten, so dass dieselben nunmehr als bekannt angesehen werden dürfen. Die Logarithmen derselben, um 10 vermehrt, sind in den trigonometrischen Tafeln zusammengestellt, deren Einrichtungsart und Benützung immer in denselben angegeben ist.

Anmerkung. Es lässt sich allerdings noch ein anderer Weg zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen aller Winkel von 0 bis 45° (was genügt) denken. Nach dem in der Note zu §. 12 Gezeigten kennt man die trigonometrischen Funktionen der Winkel von 0 bis 45°, wenn man von 3° zu 3° fortschreitet. Da nach §. 14 der Sinus und Cosinus des halben Winkels aus dem Cosinus des ganzen gefunden wird, so kann man Cosinus und Sinus von $1\frac{1}{2}^0$ finden, und unter Anwendung der Formeln (9) und (10) in §. 8 wird man jetzt die Sinus und Cosinus aller Winkel von $1\frac{1}{2}^0$ zu $1\frac{1}{2}^0$ finden können. Aus dem cos $1\frac{1}{2}^0$ findet man wieder sin $\frac{3}{4}^0$, cos $\frac{3}{4}^0$ und kann dann von $\frac{3}{4}^0$ zu $\frac{3}{4}^0$ fortschreiten. Wie man diess weiter führen könnte, ist leicht zu übersehen. Von praktischer Bedeutung ist jedoch dieser Weg nicht, da die wirkliche Berechnung doch in dieser Weise nicht geführt wird.

Die trigonometrischen Tafeln geben in der Regel die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen nur von Minute zu Minute, für kleinere Differenzen muss man ein Interpolationsverfahren anwenden, das in den Tafeln selbst erläutert ist.

Der innere Grund dieses Verfahrens lässt sich in folgender Weise erörtern. Man findet leicht, dass für sieben Dezimalen genau (wobei wir durch 1′ den Winkel 1 Minute, durch n″ den von n Sekunden bezeichnen):

$$\sin 1' = \frac{\text{Bog.}1'}{r},\ \cos 1' = 1,$$

also, wenn $n \overline{\gtrless} 60$:

$$\sin n'' = \frac{\text{Bog.}n''}{r},\ \cos n'' = 1.$$

Demnach:

$$\sin(A + n'') = \sin A \cos n'' + \cos A \,.\, \sin n''$$
$$= \sin A + \cos A \,.\, \frac{\text{Bog.}n''}{r}.$$

$$\text{Aber}\ \frac{\text{Bog.}n''}{r} = \frac{2r\pi \,.\, n}{360\,.\,60\,.\,60\,.\,r} = n\,.\,\frac{\pi}{180\,.\,60\,.\,60},\ \text{also}$$

$$\sin(A + n'') = \sin A + n\,.\,\frac{\cos A\,.\,\pi}{180\,.\,60\,.\,60}.$$

Mithin erhält man den Werth von $\sin(A + n'')$, wenn man zu $\sin A$ noch das nfache von $\frac{\cos A\,.\,\pi}{180\,.\,60\,.\,60}$ addirt; also ist die Differenz

$\sin(A+n'') - \sin A$ eben diesem nfachen Werthe gleich. Man weiss aber aus der Lehre von den Logarithmen, dass wenn p und q zwei wenig von r verschiedene Zahlen (beide grösser als r) sind, die Differenzen $\log p - \log r$, $\log q - \log r$ sich verhalten, wie die Differenzen $p-r$, $q-r$, d. h. dass man (nahezu) hat:

$$\log p - \log r : \log q - \log r = p - r : q - r.$$

Wendet man diesen Satz hier an, so hat man:

$$\log\sin(A+n'') - \log\sin A : \log\sin(A+60'') - \log\sin A$$
$$= \sin(A+n'') - \sin A : \sin(A+60'') - \sin A,$$

d. h. $\log\sin(A+n'') - \log\sin A : \log\sin(A+60'') - \log\sin A$

$$= n \cdot \frac{\cos A \cdot \pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} : 60 \cdot \frac{\cos A \cdot \pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} = n : 60;$$

folglich:

$$\log\sin(A+n'') - \log\sin A = \left[\frac{\log\sin(A+60'') - \log\sin A}{60}\right] n,$$

$$\log\sin(A+n'') = \log\sin A + \left[\frac{\log\sin(A+60'') - \log\sin A}{60}\right] n.$$

Ferner ist

$$\cos(A+n'') = \cos A \cos n'' - \sin A \sin n'' = \cos A - \sin A \cdot \frac{\text{Bog.}n''}{r}$$

$$= \cos A - n \cdot \frac{\sin A \cdot \pi}{180 \cdot 60 \cdot 60},$$

woraus wie oben:

$$\log\cos(A+n'') - \log\cos A : \log\cos(A+60'') - \log\cos A$$
$$= \cos(A+n'') - \cos A : \cos(A+60'') - \cos A$$
$$= -n \cdot \frac{\sin A \cdot \pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} : -60 \cdot \frac{\sin A \cdot \pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} = n : 60,$$

mithin

$$\log\cos(A+n'') - \log\cos A = \frac{\log\cos(A+60'') - \log\cos A}{60} n,$$

$$\log\cos(A+n'') = \log\cos A + \frac{\log\cos(A+60'') - \log\cos A}{60} n.$$

Weiter hat man:

$$\operatorname{tg}(A+n'') = \frac{\sin(A+n'')}{\cos(A+n'')} = \frac{\sin A + n \cdot \frac{\cos A \cdot \pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}}{\cos A - n \cdot \frac{\sin A \cdot \pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}}$$

$$= \frac{\left(\sin A + n \cdot \frac{\cos A \cdot \pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}\right)\left(\cos A + n \cdot \frac{\sin A \cdot \pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}\right)}{\left(\cos A - n \frac{\sin A \cdot \pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}\right)\left(\cos A + n \frac{\sin A \cdot \pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}\right)},$$

multiplizirt man wirklich und beachtet, dass die Grössen:

$$\left(n\frac{\sin A . \pi}{180 . 60 . 60}\right)^2, \; n^2 \sin A \cos A . \left(\frac{\pi}{180 . 60 . 60}\right)^2$$

immer sehr klein sind, so erhält man: (genau genug):

$$\operatorname{tg}(A + n'') = \frac{\sin A \cos A + n(\sin^2 A + \cos^2 A)\frac{\pi}{180 . 60 . 60}}{\cos^2 A}$$

$$= \operatorname{tg} A + n . \frac{\pi}{180 . 60 . 60 . \cos^2 A},$$

woraus ganz wie früher:

$$\log \operatorname{tg}(A + n'') = \log \operatorname{tg} A + \frac{\log \operatorname{tg}(A + 60'') - \log \operatorname{tg} A}{60} n.$$

Endlich ist

$$\log \operatorname{cotg}(A + n'') = \log[-\operatorname{tg}(90^0 + A + n''],$$

also wenn man in der vorigen Formel $90^0 + A$ für A und zugleich $-\operatorname{tg}$ für tg setzt:

$$\log \operatorname{cotg}(A + n'') = \log(-\operatorname{tg}(90^0 + A))$$

$$+ \frac{\log[-\operatorname{tg}(A + 90^0 + 60'')] - \log[-\operatorname{tg}(90^0 + A)]}{60''} n$$

$$= \log \operatorname{cotg} A + \frac{\log \operatorname{cotg}(A + 60'') - \log \operatorname{cotg} A}{60} n.$$

Die Grössen

$$\frac{\log \sin(A + 60'') - \log \sin A}{60}, \quad \frac{\log \cos(A + 60'') - \log \cos A}{60},$$

$$\frac{\log \operatorname{tg}(A + 60'') - \log \operatorname{tg} A}{60}, \quad \frac{\log \operatorname{cotg}(A + 60'') - \log \operatorname{cotg} A}{60},$$

(von denen freilich die zweite und vierte nach §. 5 negativ sind) heissen die Differenzen von $\log \sin A$, $\log \cos A$, $\log \operatorname{tg} A$, $\log \operatorname{cotg} A$ für $1''$ und sind in den Tafeln angegeben. Da

$$\log \operatorname{cotg}(A + 60'') - \log \operatorname{cotg} A = \log \frac{1}{\operatorname{tg}(A + 60'')} - \log \frac{1}{\operatorname{tg} A} =$$

$$- \log \operatorname{tg}(A + 60'') + \log \operatorname{tg} A,$$

mithin

$$\frac{\log \operatorname{cotg}(A + 60'') - \log \operatorname{cotg} A}{60} = - \frac{\log \operatorname{tg}(A + 60'') - \log \operatorname{tg} A}{60},$$

so sind also die Differenzen für $1''$ bei $\log \operatorname{tg} A$ und $\log \operatorname{cotg} A$ einander gleich, wesshalb in den Tafeln nur eine Kolumne für dieselben eingeführt ist. Die Grössen

$$\frac{\log\cos(A+60'')-\log\cos A}{60},\quad \frac{\log\operatorname{cotg}(A+60'')-\log\operatorname{cotg} A}{60}$$

sind übrigens wie gesagt negativ (§. 5), während in den Tafeln bloss ihre positiven Werthe angegeben sind. Daher rührt es, dass für log cos und log cotg Subtraktionen zu machen sind.

Die doppelte Bezeichnung der Tafeln (d. h. der Eingang von oben und unten) erklärt sich sofort aus den Gleichungen (8), während die Gleichungen (13) deutlich genug zeigen, wie man die trigonometrischen Funktionen für Winkel $> 90^0$ zu suchen habe.

Ehe wir zu Zahlenbeispielen übergehen, wollen wir nun zuerst den zweiten Weg aus einander setzen, auf dem man die trigonometrischen Funktionen hätte berechnen können. Wir bemerken dazu nur noch, dass diese zweite Darstellung Lionnet zugehört. (Vergleiche Grunert's Archiv, Theil VI, S. 205.)

§. 16.

Bezeichnen wir den zu einem (Mittelpunkts-) Winkel A, den wir nicht über 45^0 voraussetzen, in einem Kreise vom Halbmesser r gehörigen Bogen durch a, so ist nach §. 15:

$$\sin A < \frac{a}{r}. \qquad (a)$$

Ferner ist nach §. 14:

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},\quad \cos\frac{A}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{A}{4},$$

also

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2} - 4\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{4}.$$

Aber da der zu $\frac{A}{2}, \frac{A}{4}, \ldots$ in demselben Kreise gehörige Bogen auch $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \ldots$ ist, so hat man ebenfalls:

$$\sin\frac{A}{2} < \frac{a}{2r},\quad \sin\frac{A}{4} < \frac{a}{4r},\quad \sin^2\frac{A}{4} < \frac{a^2}{16r^2},$$

also

$$4\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{4} < 4\cdot\frac{a}{2r}\cdot\frac{a^2}{16r^2},\ \text{d. h.} < \frac{a^3}{8r^3},$$

mithin offenbar:

$$\sin A > 2\sin\frac{A}{2} - \frac{a^3}{8r^3}.$$

Ganz eben so (indem man nach einander $\frac{A}{2}, \frac{A}{4}, \ldots$ für A, also $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \ldots$ für a setzt):

$$\sin\frac{A}{2} > 2\sin\frac{A}{4} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{a^3}{2^3 r^3},$$
$$\sin\frac{A}{4} > 2\sin\frac{A}{8} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{a^3}{2^6 r^3},$$
$$\ldots\ldots$$
$$\sin\frac{A}{2^{n-1}} > 2\sin\frac{A}{2^n} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{a^3}{2^{3(n-1)} r^3}.$$

Aus diesen Beziehungen folgt, wenn man die erste mit 1, die zweite mit 2, die dritte mit 2^2, die vierte mit 2^3, ..., die letzte mit 2^{n-1} multiplizirt:

$$\sin A > 2\sin\frac{A}{2} - \frac{a^3}{8r^3},$$
$$2\sin\frac{A}{2} > 2^2\sin\frac{A}{4} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{a^3}{2^2 r^3},$$
$$2^2\sin\frac{A}{4} > 2^3\sin\frac{A}{8} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{a^3}{2^4 r^3},$$
$$2^3\sin\frac{A}{8} > 2^4\sin\frac{A}{16} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{a^3}{2^6 r^3},$$
$$\ldots\ldots$$
$$2^{n-1}\sin\frac{A}{2^{n-1}} > 2^n\sin\frac{A}{2^n} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{a^3}{2^{2n-2} r^3}.$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$\sin A + 2\sin\frac{A}{2} + 2^2\sin\frac{A}{4} + \ldots + 2^{n-1}\sin\frac{A}{2^{n-1}} > 2\sin\frac{A}{2} + 2^2\sin\frac{A}{4}$$
$$+ \ldots + 2^{n-1}\sin\frac{A}{2^{n-1}} + 2^n\sin\frac{A}{2^n} - \tfrac{1}{8}\frac{a^3}{r^3}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^{2n-2}}\right),$$

d. h. wenn man das weglässt, was beiderseitig gleich ist:

$$\sin A > 2^n\sin\frac{A}{2^n} - \tfrac{1}{8}\frac{a^3}{r^3}\left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots + \frac{1}{2^{2n-2}}\right].$$

Dividirt man beiderseitig mit $\frac{a}{r}$, so hat man $\left(\text{da } 2^n\sin\frac{A}{2^n} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n}}\right)$:

$$\frac{\sin A}{\frac{a}{r}} > \frac{\sin\frac{A}{2^n}}{\frac{a}{2^n r}} - \tfrac{1}{8}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2n-2}}\right].$$

Denken wir uns nun n werde immer grösser, so wird $\frac{A}{2^n}$ immer kleiner, mithin nach §. 15 $\sin\frac{A}{2^n}$ sich immer mehr $\frac{a}{2^n r}$ nähern, d. h. für ein unendlich grosses n ist sicher zu setzen:

$$\frac{\sin\frac{A}{2^n}}{\frac{a}{2^n r}} = 1.$$

Ferner lehrt die Behandlung unendlicher geometrischer Reihen, dass alsdann

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

somit also, da obige Beziehung für jedes, also auch für ein unendliches n gilt:

$$\frac{\sin A}{\frac{a}{r}} > 1 - \tfrac{1}{8}.\tfrac{4}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{a}{r}\right)^2,$$

d. h.

$$\sin A > \frac{a}{r} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{a}{r}\right)^3. \quad \text{(b)}$$

Ganz eben so ist natürlich:

$$\sin\frac{A}{2} > \tfrac{1}{2}\frac{a}{r} - \frac{1}{2.3}.\frac{1}{2^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3, \quad \sin\frac{A}{4} > \tfrac{1}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{2.3}.\frac{1}{4^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3,$$

also auch

$$\sin^2\frac{A}{4} > \tfrac{1}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{2.2.3.4^3}\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \frac{1}{2^2.3^2.4^6}\left(\frac{a}{r}\right)^6,$$

d. h. da $2.2.4^3 = 2^8$:

$$\sin^2\frac{A}{4} > \tfrac{1}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{3.2^8}\left(\frac{a}{r}\right)^4,$$

mithin

$$4\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{4} > 4.\left[\frac{a}{2r} - \frac{1}{3.2^4}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]\left[\tfrac{1}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{3.2^8}\left(\frac{a}{r}\right)^4\right],$$

d. h. $$4\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{4} > \frac{1}{8}\left(\frac{a}{r}\right)^3 - \frac{1}{2^7}\left(\frac{a}{r}\right)^5 + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^{10}}\left(\frac{a}{r}\right)^7,$$

also gewiss auch $$4\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{4} > \frac{1}{2^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 - \frac{1}{2^7}\left(\frac{a}{r}\right)^5,$$

mithin $$\sin A < 2\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2^7}\left(\frac{a}{r}\right)^5,$$

eben so: $$\sin\frac{A}{2} < 2\sin\frac{A}{4} - \frac{1}{2^6}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2^{12}}\left(\frac{a}{r}\right)^5,$$

$$\sin\frac{A}{4} < 2\sin\frac{A}{8} - \frac{1}{2^9}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2^{17}}\left(\frac{a}{r}\right)^5,$$

. . . .

$$\sin\frac{A}{2^{n-1}} < 2\sin\frac{A}{2^n} - \frac{1}{2^{3n}}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2^{5n+2}}\left(\frac{a}{r}\right)^5.$$

Dasselbe Verfahren wie oben gibt hieraus:

$$\sin A < 2^n\sin\frac{A}{2^n} - \frac{1}{2^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n-2}}\right]$$
$$+ \frac{1}{2^7}\left(\frac{a}{r}\right)^5\left[1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{4n-4}}\right].$$

Dividirt man wieder durch $\frac{a}{r}$ und lässt $n = \infty$ werden, so hat man:

$$\frac{\sin A}{\frac{a}{r}} < 1 - \frac{1}{2^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\right] + \frac{1}{2^7}\left(\frac{a}{r}\right)^4\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2^4}}\right]$$

$$< 1 - \frac{4}{3.2^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{16}{2^7.15}\left(\frac{a}{r}\right)^4$$

$$< 1 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{a}{r}\right)^4,$$

$$\sin A < \frac{a}{r} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{a}{r}\right)^5. \quad \text{(c)}$$

Also weiter

$$\sin\frac{A}{2} < \frac{a}{2r} - \frac{1}{2.3.2^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4.5.2^5}\left(\frac{a}{r}\right)^5,$$

$$\sin\frac{A}{4} < \frac{a}{2^2 r} - \frac{1}{2.3.2^6}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4.5.2^{10}}\left(\frac{a}{r}\right)^5,$$

$$\sin^2\frac{A}{4} < \frac{1}{2^4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^8}\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \frac{1}{45.2^{11}}\left(\frac{a}{r}\right)^6 - \frac{1}{45.2^{19}}\left(\frac{a}{r}\right)^8$$
$$+ \frac{1}{225.2^{26}}\left(\frac{a}{r}\right)^{10}.$$

Da wir A nicht $> 45^0$ voraussetzen, so ist $\frac{a}{r}$ nicht $> \frac{\pi}{4}$ (da für $A = 45^0$, $a = \frac{2r\pi . 45}{360} = \frac{r\pi}{4}$), d. h. $\frac{a}{r} < 1$, also ganz sicherlich

$$\frac{1}{45 . 2^{19}}\left(\frac{a}{r}\right)^8 > \frac{1}{225 . 2^{26}}\left(\frac{a}{r}\right)^{10},$$

d. h.

$$-\frac{1}{45 . 2^{19}}\left(\frac{a}{r}\right)^8 + \frac{1}{225 . 2^{26}}\left(\frac{a}{r}\right)^{10} < 0,^*$$

mithin eben so sicher

$$\sin^2\frac{A}{4} < \frac{1}{2^4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^8}\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \frac{1}{45}\cdot\frac{1}{2^{11}}\left(\frac{a}{r}\right)^6,$$

$$4\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{4} < 4\left[\frac{a}{2r} - \frac{1}{3.2^4}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{15.2^8}\left(\frac{a}{r}\right)^5\right]$$

$$\left[\frac{1}{2^4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^8}\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \frac{1}{45}\cdot\frac{1}{2^{11}}\left(\frac{a}{r}\right)^6\right]$$

$$< \frac{1}{2^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 - \frac{1}{2^7}\left(\frac{a}{r}\right)^5 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{10}}\left(\frac{a}{r}\right)^7 - \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{2^{14}}\left(\frac{a}{r}\right)^9$$

$$+ \frac{1}{675}\cdot\frac{1}{2^{17}}\left(\frac{a}{r}\right)^{11},$$

mithin da wieder $-\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{2^{14}}\left(\frac{a}{r}\right)^9 + \frac{1}{675}\cdot\frac{1}{2^{17}}\left(\frac{a}{r}\right)^{11} < 0$:

$$4\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{4} < \frac{1}{2^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 - \frac{1}{2^7}\left(\frac{a}{r}\right)^5 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{10}}\left(\frac{a}{r}\right)^7,$$

also endlich

$$\sin A > 2\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2^7}\left(\frac{a}{r}\right)^5 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{10}}\left(\frac{a}{r}\right)^7,$$

$$\sin\frac{A}{2} > 2\sin\frac{A}{4} - \frac{1}{2^6}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2^{12}}\left(\frac{a}{r}\right)^5 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{17}}\left(\frac{a}{r}\right)^7,$$

$$\sin\frac{A}{4} > 2\sin\frac{A}{8} - \frac{1}{2^9}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2^{17}}\left(\frac{a}{r}\right)^5 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{24}}\left(\frac{a}{r}\right)^7,$$

---

* Für $A = 90^0$ wäre $\frac{a}{r} = \frac{\pi}{2}$ und $\log\left(45 . 2^{19} . \left(\frac{2}{\pi}\right)^8\right) = 5{\cdot}80382$, $\log\left(225 . 2^{26} . \left(\frac{2}{\pi}\right)^{10}\right) = 8{\cdot}21776$, also $225 . 2^{26}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{10} > 45 . 2^{19} . \left(\frac{2}{\pi}\right)^8$, mithin $\frac{1}{45}\cdot\frac{1}{2^{19}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^8 > \frac{1}{225}\cdot\frac{1}{2^{26}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10}$, also dieselbe Grösse wie im Texte noch negativ, selbst wenn $A = 90^0$. Alle frühern Beziehungen gelten ohnehin auch bis $A = 90^0$, so dass alles hier Gesagte für die Winkel von 0^0 bis 90^0 gilt.

$$\sin\frac{A}{2^{n-1}} > 2\sin\frac{A}{2^n} - \frac{1}{2^{3n}}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2^{5n+2}}\left(\frac{a}{r}\right)^5 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{7n+3}}\left(\frac{a}{r}\right)^7.$$

Behandelt man diese Grössen wie oben, dividirt wieder durch $\frac{a}{r}$ und lässt n unendlich werden, so erhält man:

$$\frac{\sin A}{\frac{a}{r}} > 1 - \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{1}{2^7}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^4}}\left(\frac{a}{r}\right)^4$$

$$-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^6}}\left(\frac{a}{r}\right)^6$$

$$> 1 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{a}{r}\right)^6,$$

$$\sin A > \frac{a}{r} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{a}{r}\right)^5 - \frac{1}{2\ldots.7}\left(\frac{a}{r}\right)^7. \quad \text{(d)}$$

Stellt man diese Resultate zusammen, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}\sin A &< \frac{a}{r},\\ &> \frac{a}{r} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{a}{r}\right)^3,\\ &< \frac{a}{r} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{a}{r}\right)^5,\\ &> \frac{a}{r} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{a}{r}\right)^5 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{a}{r}\right)^7,\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

richtig für alle A von 0° bis 90°. Man könnte diese Betrachtungsweise leicht fortsetzen, und es ist das Gesetz auch in den angegebenen Gliedern bereits deutlich ausgesprochen.

Man hat nun eben so:

$$\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2},$$

aber nach (27) $\quad \sin\frac{A}{2} < \frac{a}{2r},\ \sin^2\frac{A}{2} < \frac{a^2}{4r^2},$

also $\quad \cos A > 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2. \quad (a')$

Ferner nach (27)

$$\sin\frac{A}{2} > \frac{a}{2r} - \frac{1}{2.3.2^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3,\ \sin^2\frac{A}{2} > \frac{a^2}{4r^2} - \frac{1}{3.2^4}\left(\frac{a}{r}\right)^4$$

$$+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^6}\left(\frac{a}{r}\right)^6,\ \sin^2\frac{A}{2}>\tfrac{1}{4}\frac{a^2}{r^2}-\frac{1}{3.2^4}\left(\frac{a}{r}\right)^4,$$

mithin

$$\cos A<1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{a}{r}\right)^4. \quad (b')$$

Weiter nach (27)

$$\sin\frac{A}{2}<\frac{a}{2r}-\frac{1}{3.2^4}\left(\frac{a}{r}\right)^3+\frac{1}{15.2^8}\left(\frac{a}{r}\right)^5,$$

$$\sin^2\frac{A}{2}<\tfrac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}\left(\frac{a}{r}\right)^4+\frac{1}{45}\cdot\frac{1}{2^8}\left(\frac{a}{r}\right)^6-\frac{1}{45}\cdot\frac{1}{2^{11}}\left(\frac{a}{r}\right)^8$$
$$+\frac{1}{225}\cdot\frac{1}{2^{16}}\left(\frac{a}{r}\right)^{10},$$

oder da $-\frac{1}{45}\cdot\frac{1}{2^{11}}\left(\frac{a}{r}\right)^8+\frac{1}{225}\cdot\frac{1}{2^{16}}\left(\frac{a}{r}\right)^{10}<0$:

$$\sin^2\frac{A}{2}<\tfrac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2-\frac{1}{2.3.4.2}\left(\frac{a}{r}\right)^4+\frac{1}{2.3.4.5.6.2}\left(\frac{a}{r}\right)^6,$$

also

$$\cos A>1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{a}{r}\right)^4-\frac{1}{2....6}\left(\frac{a}{r}\right)^6 \quad (c')$$

u. s. w., d. h.

$$\left.\begin{aligned}\cos A&<1,\\ &>1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2,\\ &<1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{a}{r}\right)^4,\\ &>1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{a}{r}\right)^4-\frac{1}{2.3.4.5.6}\left(\frac{a}{r}\right)^6.\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Die Beziehungen (27) und (28) geben ganz deutlich zu erkennen, in welcher Weise sin A und cos A, namentlich wenn A nicht über 45° ist, wo dann $\frac{a}{r}<1$, berechnet werden können. Setzt man z. B.

$$\sin A=\frac{a}{r}-\frac{1}{2.3}\left(\frac{a}{r}\right)^3+\frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{a}{r}\right)^5=\frac{a}{r}\left[1-\tfrac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{120}\left(\frac{a}{r}\right)^4\right],$$

so ist der Fehler, den man dadurch begeht, weniger als

$$\frac{1}{2....7}\left(\frac{a}{r}\right)^7=\frac{1}{5040}\left(\frac{a}{r}\right)^7,$$

und man hat sin A etwas zu gross. Für A = 10° z. B. ist $a = \frac{2r\pi . 10}{360}$ $= \frac{\pi r}{18}$, also $\frac{a}{r} = \frac{\pi}{18}$, mithin

$$\sin 10^0 = \frac{\pi}{18} - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 = \frac{\pi}{18}\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4\right],$$

mit einem Fehler kleiner als $\frac{1}{5040}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7 = 0{\cdot}00000000098$, so dass also auf 9 Dezimalen genau der sin 10° gefunden werden kann.

Hätte man gesetzt:

$$\sin A = \frac{a}{r} - \tfrac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{a}{r}\right)^5 - \frac{1}{5040}\left(\frac{a}{r}\right)^7,$$

so wäre der Fehler kleiner als

$$\frac{1}{2 \ldots 9}\left(\frac{a}{r}\right)^9 = \frac{1}{362880}\left(\frac{a}{r}\right)^9$$

und würde für A = 45°, also $\frac{a}{r} = \frac{\pi}{4}$ betragen: 0·00000031 und hätte also erst in der 7ten Dezimale Einfluss.

Es geht ferner aus diesen Beziehungen hervor, mit welchem Rechte man für kleine A etwa

$$\sin A = \frac{a}{r}, \text{ oder } \sin A = \frac{a}{r} - \tfrac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^3,$$

$$\cos A = 1, \text{ oder } \cos A = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2$$

setzen darf, d. h. welches die oberste Gränze des begangenen Fehler ist.

Da, wie man leicht findet:

für A = 29′ noch $\tfrac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^3 < 0{\cdot}0000001$,

„ A = 5° 56′ 32″ „ $\frac{1}{120}\left(\frac{a}{r}\right)^5 < 0{\cdot}0000001$,

„ A = 1′ 32″ „ $\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 < 0{\cdot}0000001$,

„ A = 2° 15′ 18″ „ $\frac{1}{24}\left(\frac{a}{r}\right)^4 < 0{\cdot}0000001$ *.

---

* Die Berechnung dieser Grössen ist die folgende. Sey $A = \frac{180^0}{n} = \frac{180.60.60''}{n}$,

so darf man also, ohne einen Fehler in der siebenten Dezimalstelle zu fürchten zu haben:

bis $A = 1' 32''$ setzen $\cos A = 1$,

„ $A = 29'$ „ $\sin A = \frac{a}{r}$,

„ $A = 2^\circ 15' 18''$ „ $\cos A = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2$,

„ $A = 5^\circ 56' 32''$ „ $\sin A = \frac{a}{r} - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]$.

Diese letztern Beziehungen sind natürlich schon an und für sich von grossem Interesse und wir werden später auch Gebrauch davon zu machen Gelegenheit haben. Wir wollen nun zunächst für eine Reihe von Winkeln die trigonometrischen Funktionen aus den Tafeln bestimmen, und umgekehrt die Winkel aus den gegebenen trigonometrischen Funktionen.

---

so ist $\frac{a}{r} = \frac{\pi}{n}$, und man setze:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 = 0{\cdot}0000001,\ n = \frac{\pi}{\sqrt[3]{0{\cdot}0000006}},\ \log n = 2{\cdot}5710994,$$

so ist $\log \frac{180.60.60}{n} = 3{\cdot}2404756$, $\frac{180.60.60''}{n} = 1739{\cdot}7'' = 28' 59{\cdot}7''$, also nahe 29′.

$$\frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{n}\right)^5 = 0{\cdot}0000001,\ n = \frac{\pi}{\sqrt[5]{0{\cdot}0000120}},\ \log n = 1{\cdot}4813136,$$

$$\log \frac{180.60.60}{n} = 4{\cdot}3302614,\ \frac{180.60.60''}{n} = 21392'' = 5^\circ 56' 32'',\ \text{nahe } 6^\circ.$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = 0{\cdot}0000001,\ n = \frac{\pi}{\sqrt{0{\cdot}0000002}},\ \log n = 3{\cdot}8466348,$$

$$\log \frac{180.60.60}{n} = 1{\cdot}9649401,\ \frac{180.60.60''}{n} = 92'' = 1' 32''.$$

$$\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{n}\right)^4 = 0{\cdot}0000001,\ n = \frac{\pi}{\sqrt[4]{0{\cdot}0000024}},\ \log n = 1{\cdot}9020971,$$

$$\log \frac{180.60.60}{n} = 3{\cdot}9094779,\ \frac{180.60.60''}{n} = 8118'' = 2^\circ 15' 18''.$$

Die oben betrachtete Grösse $\frac{a}{r}$ ist übrigens gleich der Länge eines mit einem Halbmesser $= 1$ zwischen den Seiten des Winkels A gezogenen Kreisbogens.

§. 17.

1) Zu suchen:

log sin 54° 13′ 19·7″.

log sin 54° 13′ = 9·9091461,
19·7.15·17 = +299
log sin 54° 13′ 19·7″ = 9·9091760

log tg 30° 50′ 27·6″.

log tg 30° 50′ = 9·7759077
27·6.47·83 = +1320
log tg 30° 50′ 27·6″ = 9·7760397

log cos 74° 57′ 26·9″.

log cos 74° 57′ = 9·4144082,
26·9.78·36 = −2108
log cos 74° 57′ 26·9″ = 9·4141974

log cotg 86° 32′ 24·5″.

log cotg 86° 32′ 20″ = 8·7816216
4·5.349·5 = −1573
log cotg 86° 32′ 24·5″ = 8·7814643

2) Es sollen die vier trigonometrischen Funktionen von 102° 22′ 56·8″ gesucht werden. Nach §. 9 kann diess in doppelter Weise geschehen, indem

102° 22′ 56·8″ = 90° + 12° 22′ 56·8″ = 180° − 77° 37′ 3·2″

log cos 12° 22′ = 9·9898043
56·8.4·62 = −262
log sin 102° 22′ 56·8″ = 9·9897781

log sin 77° 37′ = 9·9897766
3·2.4·62 = +15
log sin 102° 22′ 56·8″ = 9·9897781

log sin 12° 22′ = 9·3307527
56·8.95·98 = +5451
log cos 102° 22′ 56·8″ = 9·3312978 (−) *

log cos 77° 37′ = 9·3313285
3·2.95·98 = −307
log cos 102° 22′ 56·8″ = 9·3312978 (−)

log cotg 12° 22′ = 10·6590516
56·8.100·59 = −5713
log tg 102° 22′ 56·8″ = 10·6584803 (−)

log tg 77° 37′ = 10·6584481
3·2.100·59 = +322
log tg 102° 22′ 56·8″ = 10·6584803

log tg 12° 22′ = 9·3409484 (−)
56·8.100·59 = +5713
log cotg 102° 22′ 56·8″ = 9·3415197 (−)

* Das zugefügte Zeichen (−) bedeutet, dass cos 102° 22′ 56·8″ negativ ist; ähnliche Bedeutung kommt demselben Zeichen in den folgenden Fällen zu.

$\log \operatorname{cotg}\ 77^\circ 37' = 9{\cdot}3415519$
$3{\cdot}2.100{\cdot}59 = -322$
$\log \operatorname{cotg}\ 102^\circ 22' 56{\cdot}8'' = 9{\cdot}3415197\ (-)$

3) Die vier trigonometrischen Funktionen von $196^\circ 13'$ zu suchen.

$196^\circ 13' = 180^\circ + 16^\circ 13' = 270^\circ - 73^\circ 47'.$

$\log \sin\ 16^\circ 13' = 9{\cdot}4460250$
$\log \sin\ 196^\circ 13' = 9{\cdot}4460250\ (-)$
$\log \cos\ 73^\circ 47' = 9{\cdot}4460250$
$\log \sin\ 196^\circ 13' = 9{\cdot}4460250\ (-)$
$\log \cos\ 16^\circ 13' = 9{\cdot}9823674$
$\log \cos\ 196^\circ 13' = 9{\cdot}9823674\ (-)$
$\log \sin\ 73^\circ 47' = 9{\cdot}9823674$
$\log \cos\ 196^\circ 13' = 9{\cdot}9823674\ (-)$
$\log \operatorname{tg}\ 16^\circ 13' = 9{\cdot}4636576$
$\log \operatorname{tg}\ 196^\circ 13' = 9{\cdot}4636576\ (+)$
$\log \operatorname{cotg}\ 73^\circ 47' = 9{\cdot}4636576$
$\log \operatorname{tg}\ 196^\circ 13' = 9{\cdot}4636576\ (+)$
$\log \operatorname{cotg}\ 16^\circ 13' = 10{\cdot}5363424$
$\log \operatorname{cotg}\ 196^\circ 13' = 10{\cdot}5363424\ (+)$
$\log \operatorname{tg}\ 73^\circ 47' = 10{\cdot}5363424$
$\log \operatorname{cotg}\ 196^\circ 13' = 10{\cdot}5363424\ (+).$

4) Die vier trigonometrischen Funktionen von $300^\circ 47' 20''$ zu suchen.

$300^\circ 47' 20'' = 270^\circ + 30^\circ 47' 20'' = 360^\circ - 59^\circ 12' 40''.$

$\log \cos\ 30^\circ 47' = 9{\cdot}9340482$
$20.12{\cdot}55 = -251$
$\log \sin\ 300^\circ 47' 20'' = 9{\cdot}9340231\ (-)$
$\log \sin\ 59^\circ 12' = 9{\cdot}9339729$
$40.12{\cdot}55 = +502$
$\log \sin\ 300^\circ 47' 20'' = 9{\cdot}9340231\ (-)$
$\log \sin\ 30^\circ 47' = 9{\cdot}7090943$
$20.35{\cdot}33 = +707$
$\log \cos\ 300^\circ 47' 20'' = 9{\cdot}7091650\ (+)$
$\log \cos\ 59^\circ 12' = 9{\cdot}7093063$
$40.35{\cdot}33 = -1413$
$\log \cos\ 300^\circ 47' 20'' = 9{\cdot}7091650\ (+)$

$$\begin{array}{ll}
\log\operatorname{cotg}\ 30^0 47' & = 10\cdot2249538 \\
\quad 20.47\cdot88 & = \quad -958 \\
\hline
\log\ \operatorname{tg}\ 300^0 47' 20'' & = 10\cdot2248580\,(-) \\
\log\operatorname{tg}\ 59^0 12' & = 10\cdot2246666 \\
\quad 40.47\cdot88 & = \quad +1915 \\
\hline
\log\operatorname{tg} 300^0 47' 20'' & = 10\cdot2248581\,(-) \\
\log\ \operatorname{tg}\ 30^0 47' & = 9\cdot7750462 \\
\quad 20.47\cdot88 & = \quad +958 \\
\hline
\log\operatorname{cotg} 300^0 47' 20'' & = 9\cdot7751420\,(-) \\
\log\operatorname{cotg}\ 59^0 12' & = 9\cdot7753334 \\
\quad 40.47\cdot88 & = \quad -1915 \\
\hline
\log\operatorname{cotg} 300^0 47' 20'' & = 9\cdot7751419\,(-).
\end{array}$$

Obige Beispiele umfassen alle vier Quadranten. Ist ein Winkel über 360^0, so lässt man von ihm so viele Male 360^0 weg, als diess möglich ist (§. 9) und sucht vom Rest die trigonometrische Funktion. Zur Uebung legen wir vor:

$$\begin{array}{l}
\log\cos 571^0 41' 48\cdot8'' = 9\cdot9298478\,(-), \\
\log\operatorname{cotg}(-1083^0 37' 49\cdot1'') = 11\cdot1975978\,(-), \\
\log\sin 785^0 24' 10'' = 9\cdot9586863, \\
\log\sin(-933^0 0' 40\cdot1'') = 9\cdot7362387, \\
\log\operatorname{cotg} 907^0 19' 26'' = 10\cdot8910065, \\
\log\cos(-1586^0 18' 35\cdot7'') = 9\cdot9201496\,(-), \\
\log\sin 686^0 11' 48\cdot8'' = 9\cdot7453409\,(-), \\
\log\operatorname{tg}(-566^0 33' 54\cdot2'') = 9\cdot6989700\,(-), \\
\log\operatorname{tg} 939^0 37' 40'' = 9\cdot9180770, \\
\log\sin(-842^0 54' 4\cdot6'') = 9\cdot9240764\,(-), \\
\log\cos 1325^0 47' 32\cdot1'' = 9\cdot6128330\,(-), \\
\log\cos(-974^0 46' 26\cdot9'') = 9\cdot4193355\,(-).
\end{array}$$

§. 18.

Ist nun umgekehrt der Logarithmus einer trigonometrischen Funktion eines Winkels gegeben, so kann letzterer den Tafeln entnommen werden, vorausgesetzt, dass man zuvor wisse, in welchem der vier Quadranten der Winkel liege. Dazu genügt es (§. 9) die Vorzeichen von Sinus und Cosinus, oder von Sinus und Tangente zu kennen, welch letzteres offenbar auf das erste zurückkommt.

Die im ersten Quadranten liegenden Winkel können aus den

Tafeln ganz unmittelbar entnommen werden; liegt der Winkel im zweiten Quadranten, so sucht man den Winkel im ersten Quadranten, der dieselbe trigonometrische Funktion hat, und subtrahirt ihn von 180°; läge der Winkel im dritten Quadranten, so hätte man jenen Winkel des ersten Quadranten zu 180° zu addiren; endlich müsste er von 360° abgezogen werden, wenn der Winkel im vierten Quadranten liegen würde.

Dass man hier nicht über die vier Quadranten hinausgehen wird, ist klar, da ein Zu- oder Abzählen von 360° ganz beliebig gestattet ist (§. 9).

Wir wollen nun wieder einige Beispiele als Muster aufstellen.

1) $\log\sin x = 9{\cdot}7362387\ (+)$, $\cos x$ ebenfalls positiv.

$$\begin{array}{rl} \log\sin x = & 9{\cdot}7362387 \\ \log\sin 33^\circ 0' = & \underline{9{\cdot}7361088} \\ & 1299 \end{array} \quad \frac{1299}{32{\cdot}41} = 40{\cdot}08'', \quad x = 33^\circ 0' 40{\cdot}08''$$

2) $\log\operatorname{cotg} x = 10{\cdot}1317658\ (+)$, $\sin x$ ebenfalls positiv.

$$\begin{array}{rl} \log\operatorname{cotg} x = & 10{\cdot}1317658 \\ \log\operatorname{cotg} 36^\circ 27' = & \underline{10{\cdot}1315840} \\ & 1818 \end{array} \quad \frac{1818}{44{\cdot}06} = 41{\cdot}2'', \quad \begin{array}{rr} & 36^\circ 26' 60'' \\ & \underline{-41{\cdot}2} \\ x = & 36^\circ 26' 18{\cdot}8'' \end{array}$$

3) $\log\operatorname{tg} x = 10{\cdot}3176782\ (-)$, $\sin x$ positiv.

$$\begin{array}{rl} \log\operatorname{tg} x = & 10{\cdot}3176782 \\ \log\operatorname{tg} 64^\circ 18' = & \underline{10{\cdot}3176135} \\ & 647 \end{array} \quad \frac{647}{53{\cdot}90} = 12{\cdot}0'', \quad \begin{array}{rr} & 179^\circ 59' 60'' \\ & \underline{-64\ \ 18\ \ 12{\cdot}0} \\ x = & 115^\circ 41' 48{\cdot}0'' \end{array}$$

4) $\log\sin x = 9.7958800\ (-)$, $\cos x$ negativ.

$$\begin{array}{rl} \log\sin x = & 9{\cdot}7958800 \\ \log\sin 38^\circ 40' = & \underline{9{\cdot}7957330} \\ & 1470 \end{array} \quad \frac{1470}{26{\cdot}31} = 55{\cdot}8'', \quad \begin{array}{rr} & 180^\circ \\ & \underline{+38\ \ 40' 55{\cdot}8''} \\ x = & 218^\circ 40' 55{\cdot}8'' \end{array}$$

5) $\log\operatorname{tg} x = 9{\cdot}7408015\ (-)$, $\sin x$ ebenfalls negativ.

$$\begin{array}{rl} \log\operatorname{tg} x = & 9{\cdot}7408015 \\ \log\operatorname{tg} 28^\circ 50' = & \underline{9{\cdot}7407672} \\ & 343 \end{array} \quad \frac{343}{49{\cdot}83} = 6{\cdot}8'', \quad \begin{array}{rr} & 359^\circ 59' 60'' \\ & \underline{-28\ \ 50\ \ 6{\cdot}8} \\ x = & 331^\circ\ 9' 53{\cdot}2'' \end{array}$$

6) $\log\operatorname{cotg} x = 11{\cdot}1976009\ (+)$; $\sin x$ negativ.

$$\begin{array}{rl} \log\operatorname{cotg} x = & 11{\cdot}1976009 \\ \log\operatorname{cotg} 3^\circ 37' 50'' = & \underline{11{\cdot}1975677} \\ & 332 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3^\circ 37' 50'' \\ \underline{-0{\cdot}9} \\ 3^\circ 37' 49{\cdot}1'' \end{array} \quad \begin{array}{rr} & 180^\circ \\ & \underline{+3\ \ 37' 49{\cdot}1''} \\ x = & 183^\circ 37' 49{\cdot}1'' \end{array}$$

$$\frac{332}{333{\cdot}4} = 0{\cdot}9''$$

7) $\log\cos x = 9{\cdot}9201496\,(-)$, $\sin x$ positiv.

$$\begin{array}{rcc} \log\cos x = 9{\cdot}9201496 & 33^\circ 41' 60'' & 179^\circ 59' 60'' \\ \log\cos 33^\circ 42' = 9{\cdot}9200994 & -35{\cdot}7 & -33\ \ 41\ \ 24{\cdot}3 \\ \hline 502 & 33^\circ 41' 24{\cdot}3'' & x = 146^\circ 18' 35{\cdot}7'' \end{array}$$

$$\frac{502}{14{\cdot}04} = 35{\cdot}7''$$

Zur Uebung legen wir noch vor:

$\log\operatorname{tg} x = 9{\cdot}6989700\,(+)$, $\sin x$ negativ, $x = 206^\circ 33' 54{\cdot}2''$,
$\log\cos x = 9{\cdot}6956033\,(-)$, $\sin x$ positiv, $x = 119^\circ 44' 41{\cdot}6''$,
$\log\operatorname{cotg} x = 9{\cdot}8750611\,(-)$, $\sin x$ positiv, $x = 126^\circ 52' 11{\cdot}6''$,
$\log\sin x = 9{\cdot}9240764\,(-)$, $\cos x$ positiv, $x = 302^\circ 54' 4{\cdot}6''$,
$\log\operatorname{tg} x = 10{\cdot}2649570\,(+)$, $\sin x$ negativ, $x = 241^\circ 29' 4{\cdot}5''$,
$\log\sin x = 9{\cdot}7953500\,(+)$, $\cos x$ positiv, $x = 38^\circ 37' 34{\cdot}5''$,
$\log\cos x = 9{\cdot}4193355\,(-)$, $\sin x$ negativ, $x = 254^\circ 46' 26{\cdot}9''$,
$\log\operatorname{cotg} x = 10{\cdot}1368230\,(-)$, $\cos x$ positiv, $x = 323^\circ 52' 47''$.

Es versteht sich von selbst, dass wenn zwei trigonometrische Funktionen desselben Winkels etwa gegeben wären, dieselben den in §§. 3 und 4 aufgestellten Beziehungen genügen müssen.

§. 19.

In den Anwendungen liegt die Aufgabe gewöhnlich so, dass man die trigonometrischen Funktionen in grössere Ausdrücke mit verflochten erhält und nun aus diesen Ausdrücken vermittelst logarithmischer Rechnung gewisse unbekannte Grössen suchen muss. Wir wollen diess an einigen Beispielen erläutern, die zugleich statt allgemeiner Darlegung dienen sollen.

1) $$x = 2113{\cdot}4 \cdot \frac{\sin 70^\circ 34' 17''}{\sin 42^\circ 28' 59{\cdot}7''}.$$

$$\begin{array}{r} \log 2113{\cdot}4 = 3{\cdot}3249817 \\ \log\sin 70^\circ 34' 17'' = 9{\cdot}9745378 \\ \text{E}.\log\sin 42^\circ 28' 59{\cdot}7'' = 0{\cdot}1704552\,^* \\ \hline \log x = 3{\cdot}4699747 \end{array} \quad x = 2951{\cdot}04.$$

* Das Vorzeichen E bedeutet die dekadische Ergänzung, welche man erhält, wenn man statt des betreffenden Logarithmus diejenige Zahl anschreibt, deren Ziffern mit jenen des Logarithmus 9 betragen. Man hat nämlich:

$$\begin{aligned} \log x &= \log 2113{\cdot}4 + \log\sin 70^\circ 34' 17'' - \log\sin 42^\circ 28' 59{\cdot}7'' \\ &= 3{\cdot}3249817 + 9{\cdot}9745378 - 10 - [9{\cdot}8295447 - 10] \\ &= 3{\cdot}3249817 + 9{\cdot}9745378 - 10 - [-0.1704552] \\ &= 3{\cdot}3249817 + 9{\cdot}9745378 + 0{\cdot}1704552 - 10, \end{aligned}$$

2) $$x = 6500 \cdot \frac{\sin 24^\circ 8' 45''}{\cos 31^\circ 49' 50'' \cdot \cos 34^\circ 1' 25''}.$$

$$\begin{aligned} \log 6500 &= 3{\cdot}8129134 \\ \log \sin 24^\circ 8' 45'' &= 9{\cdot}6117876 \\ E . \log \cos 31^\circ 49' 50'' &= 0{\cdot}0707796 \\ E . \log \cos 34^\circ \; 1' 25'' &= 0{\cdot}0815465 \\ \hline \log x &= 3{\cdot}5770271 \end{aligned} \qquad x = 3775{\cdot}96.$$

3) $$\sin x = 2\,\frac{\sqrt{720}}{64}.$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{\cdot}3010300 \\ \tfrac{1}{2} \log 720 &= 1{\cdot}4286662 \\ E . \log 64 &= 8{\cdot}1938200^{*} \\ \hline \log \sin x &= 9{\cdot}9235162 \end{aligned} \qquad x = 56^\circ 59' 5{\cdot}0''.$$

4) $$\operatorname{tg} x = \frac{8227{\cdot}32 \sin 38^\circ 37' 38{\cdot}3''}{7014{\cdot}23 \sin 52^\circ 44' 22{\cdot}2''}.$$

$$\begin{aligned} \log 8227{\cdot}32 &= 3{\cdot}9152584 \\ \log \sin 38^\circ 37' 38{\cdot}3'' &= 9{\cdot}7953600 \\ E . \log 7014{\cdot}23 &= 6{\cdot}1540199 \\ E . \log \sin 52^\circ 44' 22{\cdot}2'' &= 0{\cdot}0991462 \\ \log \operatorname{tg} x &= 9{\cdot}9637845 \end{aligned} \qquad x = 42^\circ 36' 49{\cdot}8''.$$

5) $$\operatorname{cotg} x = \frac{51612{\cdot}06}{9389{\cdot}28} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 35^\circ 23' 6''}.$$

$$\begin{aligned} \log 51612{\cdot}06 &= 4{\cdot}7127512 \\ E . \log 9389{\cdot}28 &= 6{\cdot}0273676 \\ E . \log \operatorname{tg} 35^\circ 23' 6'' &= 0{\cdot}1485770 \\ \hline \log \operatorname{cotg} x &= 10{\cdot}8886958 \end{aligned} \qquad x = 7^\circ 21' 45{\cdot}1''.$$

6) $$\operatorname{tg} x = -\frac{\operatorname{tg} 11^\circ 39' 52{\cdot}1''}{\operatorname{tg} 56^\circ 24' 4{\cdot}5''}.$$

---

was ganz offenbar auf das im Texte Angegebene herauskömmt. Statt also den Logarithmus einer trigonometrischen Funktion zu subtrahiren, wird man bloss seine dekadische Ergänzung addiren.

Im dritten Beispiele wäre:

$$\begin{aligned} \log \sin x = \log 2 + \tfrac{1}{2} \log 720 - \log 64 &= 0{\cdot}3010300 + 1{\cdot}4286662 - 1{\cdot}8061799 \\ &= 0{\cdot}3010300 + 1{\cdot}4286662 + 10 - 1{\cdot}8061799 - 10 \\ &= 0{\cdot}3010300 + 1{\cdot}4286662 + 8{\cdot}1938200 - 10, \end{aligned}$$

so dass man statt den Logarithmus einer Zahl zu subtrahiren, die dekadische Ergänzung desselben addirt, aber von der Summe schliesslich 10 weglassen muss.

* Die Bedeutung dieser Abkürzung ist in der vorangehenden Note bereits erläutert.

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{tg} 11^\circ 39' 52{\cdot}1'' &= 9{\cdot}3148011 \\
E \log \operatorname{tg} 56^\circ 24' 4{\cdot}5''{}^* &= \underline{9{\cdot}8224080 - 10} \qquad x = 172^\circ 11' 25{\cdot}4''. \\
\log \operatorname{tg} x &= 9{\cdot}1372091\,(-)
\end{aligned}$$

7) $$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{\sin 5^\circ 23' 24'' \,.\, \sin 66^\circ 51' 2''}{\sin 115^\circ 41' 44'' \,.\, \sin 43^\circ 27' 18''}}.$$

$$\begin{aligned}
\log \sin 5^\circ 23' 24'' &= 8{\cdot}972825\bar{3} \\
\log \sin 66^\circ 51' 2'' &= 9{\cdot}9635435 \\
E.\log \sin 115^\circ 41' 44'' &= 0{\cdot}0452218 \qquad x = 20^\circ 28' 15.9''. \\
E.\log \sin 43^\circ 27' 18'' &= \underline{0{\cdot}1625474} \\
&\ 19{\cdot}1441380
\end{aligned}$$

dividirt durch 2: $9{\cdot}5720690 = \log \operatorname{tg} x$.

8) $x = 857 \sin 102^\circ 22' 56{\cdot}8'' + 1098 \cos 210^\circ 1' 26{\cdot}8''$.

$$\begin{aligned}
\log 857 &= 2{\cdot}9329808 \\
\log \sin 102^\circ 22' 56{\cdot}8'' &= \underline{9{\cdot}9897780} \qquad 857 \sin 102^\circ 22' 56{\cdot}8'' \\
&\ 2{\cdot}9227588 \qquad\qquad = 837{\cdot}064 \\
\log 1098 &= 3{\cdot}0406023, \\
\log \cos 210^\circ 1' 26{\cdot}8'' &= \underline{9{\cdot}9374251\,(-)} \\
&\ 2{\cdot}9780274\,(-)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1098 \cos 210^\circ 1' 26{\cdot}8'' &= \underline{-950{\cdot}665} \\
x &= -113{\cdot}601
\end{aligned}$$

9) $$\operatorname{tg} x = \frac{\cos 24^\circ 10' 8'' \operatorname{cotg} 64^\circ 58' 59{\cdot}5''}{\cos 115^\circ 57' 48''}.$$

$$\begin{aligned}
\log \cos 24^\circ 10' 8'' &= 9{\cdot}9601579 \\
\log \operatorname{cotg} 64^\circ 58' 59{\cdot}5'' &= 9{\cdot}6690051 \qquad x = 135^\circ 47' 55{\cdot}2''. \\
E.\log \cos 115^\circ 57' 48'' &= \underline{0{\cdot}3587283\,(-)} \\
\log \operatorname{tg} x &= 9{\cdot}9878913\,(-)
\end{aligned}$$

10) $$\operatorname{cotg} x = \frac{520 \,.\, \sin 23^\circ 25'}{312 \,.\, \sin 238^\circ 16' \sin 32^\circ 52'}.$$

$$\begin{aligned}
\log 520 &= 2{\cdot}7160033 \\
\log \sin 23^\circ 25' &= 9{\cdot}5992441 \\
E.\log 312 &= 7{\cdot}5058453 \qquad x = 145^\circ 7' 46{\cdot}8''. \\
E.\log \sin 238^\circ 16' &= 0{\cdot}0703229\,(-) \\
E.\log \sin 32^\circ 52' &= \underline{0{\cdot}2654514} \\
\log \operatorname{cotg} x &= 10{\cdot}1568670\,(-)
\end{aligned}$$

* Da $\log \operatorname{tg} 56^\circ 24' 4{\cdot}5'' = 10{\cdot}1775919$, so wird man zuerst 10 abziehen, was durch -10 angedeutet ist, und dann die dekadische Ergänzung von $0{\cdot}1775919$ addiren.

11) $$\sin x = -\frac{325{\cdot}54 \sin 68^\circ 42'}{415{\cdot}64}.$$

$$\begin{aligned} \log 325{\cdot}54 &= 2{\cdot}5126044 \\ \log \sin 68^\circ 42' &= 9{\cdot}9692720 \\ E.\log 415{\cdot}64 &= 7{\cdot}3812826 \\ \hline \log \sin x &= 9{\cdot}8631590\,(-) \end{aligned} \qquad x = 226^\circ 51' 47{\cdot}9''.$$

Diese Beispiele mögen genügen. Wir haben in denselben jeweils für x den kleinsten positiven Winkel gewählt, der der Aufgabe genügt. Wir wollen jedoch hier noch die Untersuchung über diejenigen Winkel beifügen, welche dieselbe trigonometrische Funktion haben.

1) Sey bloss gegeben:

$$\sin x = a$$

und a positiv, so wird man für x einen zwischen 0 und 90° liegenden Winkel erhalten; derselben Gleichung genügt aber auch der Winkel $180^\circ - x$ (§. 9), so wie alle Winkel, die man durch Zu- oder Abzählen von 360° von diesen zweien erhält; so dass x, $180^\circ - x$, $n.360^\circ + x$, $n.360^\circ + 180^\circ - x$, $x - n.360^\circ$, $180^\circ - x - n.360^\circ$, wenn $n = 1, 2, \ldots$ ist, alle möglichen Winkel sind, für die $\sin x = a$ ist. So würden im Beispiel Nr. 3 für x erhalten werden können: $56^\circ 59' 5''$, $123^\circ 0' 55''$, $360^\circ + 56^\circ 59' 5''$, $2.360^\circ + 56^\circ 59' 5''$, ... $360^\circ + 123^\circ 0' 55''$, $2.360^\circ + 123^\circ 0' 55''$, ..., $123^\circ 0' 55'' - 360^\circ$, $123^\circ 0' 55'' - 2.360^\circ$, ..., $56^\circ 59' 5'' - 360^\circ$, $56^\circ 59' 5'' - 2.360^\circ$, ...

Ist a negativ, so erhält man für x einen zwischen 180° und 270° liegenden Werth, und alle Winkel, für welche $\sin x = a$, wären:

$$x,\ 540^\circ - x,\ n.360^\circ + x,\ n.360^\circ + 540^\circ - x,\ x - n.360^\circ,$$
$$540^\circ - x - n.360^\circ.$$

Dass der Werth von a zwischen -1 und $+1$ liegen muss, versteht sich von selbst.

Wäre $a = 0$, so hätte man die Winkel:

$$0,\ 180^\circ,\ n.360^\circ,\ n.360^\circ + 180^\circ,\ -n.360^\circ,\ -n.360^\circ + 180^\circ.$$

2) Sey bloss gegeben:

$$\cos x = a,$$

und a positiv, so erhält man einen zwischen 0 und 90° liegenden Winkel, und alle Winkel sind:

$$x,\ 360^\circ - x,\ n.360^\circ + x,\ n.360^\circ + 360^\circ - x,\ x - n.360^\circ,$$
$$360^\circ - x - n.360^\circ;$$

Ist a negativ, so erhält man einen zwischen 90^0 und 180^0 liegenden Winkel x, und alle Winkel, für welche $\cos x = a$ ist, sind:

$$x,\ 360^0 - x,\ n.360^0 + x,\ n.360^0 + 360^0 - x,\ x - n.360^0,$$
$$360^0 - x - n.360^0.$$

Für $a = 0$ hat man die Winkel 90^0, 270^0, $90^0 + n.360^0$, $270^0 + n.360^0$, $90^0 - n.360^0$, $270^0 - n.360^0$.

3) Sey bloss gegeben:

$$\operatorname{tg} x = a$$

und a positiv, so erhält man einen Winkel x zwischen 0 und 90^0, und alle möglichen sind:

$$x,\ n.180^0 + x,\ x - n.180^0.$$

Für ein negatives a liegt x zwischen 90^0 und 180^0, die Winkel sind aber wie so eben bestimmt.

Für $a = 0$ hat man 0, $\pm n.180^0$.

4) Sey endlich bloss gegeben:

$$\operatorname{cotg} x = a,$$

so erhält man für ein positives a einen Winkel zwischen 0 und 90^0, für ein negatives zwischen 90^0 und 180^0; alle Winkel sind alsdann:

$$x,\ x + n.180^0,\ x - n.180^0.$$

Ist $a = 0$, so hat man 90^0, $\pm n.180^0 + 90^0$.

Wir fügen schliesslich noch das Verfahren bei, nach welchem man aus den Tafeln, wenn man den Logarithmus einer trigonometrischen Funktion eines Winkels kennt, den einer andern Funktion desselben Winkels berechnen kann, ohne den Winkel selbst aufzuschlagen.

Sey x der unbekannte Winkel, X eine trigonometrische Funktion desselben (z. B. $\sin x$), die man kennt; ξ eine andere trigonometrische Funktion von x (z. B. $\operatorname{tg} x$), die man sucht. (Genauer gesprochen: Man kennt $\log X$ und sucht $\log \xi$.) In den Tafeln wird nun $\log X$ nicht geradezu enthalten seyn; sey also in der gehörigen Kolumne $\log X'$ der nächst vorangehende, $\log X''$ der nächst folgende Werth, so wird man in denselben Horizontalreihen $\log \xi'$ und $\log \xi''$ erhalten. Sind x', x'' die zu X' und X'', also auch zu ξ' und ξ'' gehörigen Winkel, so hat man nun (§. 15):

$$\log X'' - \log X' : \log X - \log X' = x'' - x' : x - x'$$
$$\log \xi'' - \log \xi' : \log \xi - \log \xi' = x'' - x' : x - x',$$

d. h.

$$\log X'' - \log X' : \log X - \log X' = \log \xi'' - \log \xi' : \log \xi - \log \xi'$$

$$\log \xi - \log \xi' = \frac{(\log X - \log X')(\log \xi'' - \log \xi')}{\log X'' - \log X'}$$

$$\log \xi = \log \xi' + \frac{(\log X - \log X')(\log \xi'' - \log \xi')}{\log X'' - \log X'}.$$

Die Differenzen $\log X'' - \log X'$, $\log \xi'' - \log \xi'$ stehen nicht geradezu in den Tafeln, wohl aber deren 60[ter] Theil, wenn die Tafeln von Minute zu Minute gehen; da aber diese beiden Grössen in einander dividirt sind, so kann man offenbar ihren 60[ten] Theil, d. h. die entsprechende Differenz für 1″, für sie setzen. Wir wollen an einem Beispiele zeigen, wie diess Verfahren anzuwenden ist. Sey gegeben $\log \sin x = 9{\cdot}9340231$, man soll $\log \cos x$, $\log tg\, x$, $\log cotg\, x$ berechnen.

1) $\log X' = 9{\cdot}9339729$, Diff. $1'' = 12{\cdot}55$, $\log \xi' = 9{\cdot}7093063$, Diff. $1'' = -35{\cdot}33$, $\log X = 9{\cdot}9340231$, $\log X - \log X' = 502$

$$\frac{(\log X - \log X')(\log \xi'' - \log \xi')}{\log X'' - \log X'} = -\frac{502\,.\,35{\cdot}33}{12{\cdot}55} = -1413.$$

$$\begin{array}{rr} \log \xi' = & 9{\cdot}7093063 \\ & -1413 \\ \hline \log \cos x = & 9{\cdot}7091650 \end{array}$$

2) $\log X$, $\log X'$ wie vorhin, $\log \xi' = 10{\cdot}2246666$, Diff. $1'' = 47{\cdot}88$.

$$\frac{(\log X - \log X')(\log \xi'' - \log \xi')}{\log X'' - \log X'} = +\frac{502\,.\,47{\cdot}88}{12{\cdot}55} = 1915.$$

$$\begin{array}{rr} \log \xi' = & 10{\cdot}2246666 \\ & +1915 \\ \hline \log tg\, x = & 10{\cdot}2248581 \end{array}$$

3) $\log X'$, $\log X$ wie früher, $\log \xi' = 9{\cdot}7753334$, Diff. $1'' = -47{\cdot}88$.

$$\frac{(\log X - \log X')(\log \xi'' - \log \xi')}{\log X'' - \log X'} = -\frac{502\,.\,47{\cdot}88}{12{\cdot}55} = -1915.$$

$$\begin{array}{rr} \log \xi' = & 9{\cdot}7753334 \\ & -1915 \\ \hline \log cotg\, x = & 9{\cdot}7751419 \end{array}$$

Der Winkel x ist übrigens $= 59^0\, 12'\, 40''$.

Dritter Abschnitt.

Berechnung der Dreiecke, oder spezielle Trigonometrie.

§. 20.

Die nächste Anwendung der seither dargestellten Lehren ist die auf die Auflösung der Dreiecke. Die Geometrie lehrt, dass wenn gewisse Theile eines Dreiecks gegeben sind, die übrigen durch Zeichnung daraus abgeleitet werden können; die Rechnung hat nun ebenso nachzuweisen, wie durch dieselbe aus den gegebenen Stücken die unbekannten gefunden werden können. Wenn auch nicht gerade nothwendig, wollen wir doch zuerst das rechtwinklige Dreieck betrachten, da die in demselben vorkommenden Fälle so einfach sind, dass sie ganz wohl als erste Beispiele der Anwendung dienen können. Was die Bezeichnung anbelangt, so werden wir künftig immer die drei Winkel eines (beliebigen) Dreiecks mit A, B, C, die ihnen entgegenstehenden Seiten mit a, b, c bezeichnen. Für unsern Fall sey B der rechte Winkel. Wir haben nun folgende Fälle zu betrachten:

Fig. 18.

1) Es ist die Hypothenuse und ein spitzer Winkel des Dreiecks gegeben. Also bekannt sey b nebst A, so ist

$$\frac{c}{b} = \cos A,\ c = b \cos A;\ \frac{a}{b} = \sin A,\ a = b \sin A;$$

$$C = 90^0 - A.$$

Eben so wenn b und C bekannt wären:

$$\frac{a}{b} = \cos C,\ a = b \cos C;\ \frac{c}{b} = \sin C,\ c = b \sin C;\ A = 90^0 - C.$$

Als Beispiel wählen wir:

$b = 475{\cdot}28$, $A = 54^0\,28'$, also $C = 90^0 - 54^0\,28' = 35^0\,32'$.

$\log b = 2{\cdot}6769495$	$\log b = 2{\cdot}6769495$
$\log \cos A = 9{\cdot}7643080$	$\log \sin A = 9{\cdot}9105057$
$\log c = 2{\cdot}4412575$	$\log a = 2{\cdot}5874552$
$c = 276{\cdot}221$	$a = 386{\cdot}772.$

2) Es ist eine Kathete und ein Winkel gegeben.

$$\frac{c}{b} = \cos A,\ c = b\cos A,\ b = \frac{c}{\cos A};\ \frac{a}{c} = \operatorname{tg} A,\ a = c \operatorname{tg} A;$$
$$C = 90^0 - A.$$

$$\frac{a}{b} = \sin A,\ a = b\sin A,\ b = \frac{a}{\sin A};\ \frac{c}{a} = \operatorname{cotg} A,\ c = a \operatorname{cotg} A;$$
$$C = 90^0 - A.$$

$c = 312$, $A = 4^0 34' 52{\cdot}4''$, also $C = 85^0 25' 7{\cdot}6''$.

$\log c = 2{\cdot}4941546,$	$\log c = 2{\cdot}4941546$
$E.\log\cos A = 0{\cdot}0013896$	$\log \operatorname{tg} A = 8{\cdot}9037856$
$\log b = 2{\cdot}4955442$	$\log a = 1{\cdot}3979402$
$b = 312{\cdot}9999$	$a = 25{\cdot}0000.$

3) Es sind die beiden Katheten gegeben.

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{c},\ \operatorname{tg} C = \frac{c}{a},\ b = \sqrt{a^2 + c^2} \text{ oder } \frac{a}{b} = \sin A,\ a = b\sin A,\ b = \frac{a}{\sin A}.$$

$c = 135{\cdot}9$, $a = 205{\cdot}893.$

$\log a = 2{\cdot}3136417$	$\log c = 2{\cdot}1332195$	$\log a = 2{\cdot}3136417$
$E \log c = 7{\cdot}8667804$	$E \log a = 7{\cdot}6863582$	$E \log \sin A = 0{\cdot}0785272$
$\log \operatorname{tg} A = 10{\cdot}7804221$	$\log \operatorname{tg} C = 9{\cdot}8195777$	$\log b = 2{\cdot}3921689$
$A = 56^0 34' 23{\cdot}2''$	$C = 33^0 25' 36{\cdot}7''$	$b = 246{\cdot}699.$

4) Es ist die Hypothenuse und eine Kathete gegeben.

$$\sin A = \frac{a}{b},\ \cos C = \frac{a}{b},\ c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{(b+a)(b-a)}.$$

$$\cos A = \frac{c}{b},\ \sin C = \frac{c}{b},\ a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{(b+c)(b-c)}.$$

Auch zieht man hieraus: $1 - \cos C = \frac{b-a}{b}$, d. h. $2\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{b-a}{b}$,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{b-a}{2b},\ \sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{b-a}{2b}}.$$

$\left(\text{Im zweiten Falle } \sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{b-c}{2b}}\right).$

$a = 760$, $b = 761.$

$\log a = 2{\cdot}8808136$	$\log(b+a) = 3{\cdot}1821292$
$E \log b = 7{\cdot}1186153$	$\log(b-a) = 0{\cdot}$
$\log \sin A = 9{\cdot}9994289$	$3{\cdot}1821292$
$A = 87^0 3' 44{\cdot}5''$	$\log c = 1{\cdot}5910646$
$C = 2^0 56' 15{\cdot}5''$	$c = 39{\cdot}000$

$$\begin{aligned}
\log(b-a) &= 0{\cdot}0000000\\
E\log b &= 7{\cdot}1186152\\
E\log 2 &= 9{\cdot}6989699\\
\hline
 &\ \ 16{\cdot}8175851\\
\log\sin\tfrac{1}{2}C &= 8{\cdot}4087925\\
\tfrac{1}{2}C &= 1^0\,28'\,7{\cdot}68''\\
C &= 2^0\,56'\,15{\cdot}4''\ \text{(genauer *)}.
\end{aligned}$$

Als Beispiele zur Uebung mögen folgende Angaben dienen:

$a = 308$, $c = 75$, $b = 317$, $A = 76^0\,18'\,52''$, $C = 13^0\,41'\,8''$,
$a = 204$, $c = 253$, $b = 325$, $A = 38^0\,52'\,48{\cdot}3''$, $C = 51^0\,7'\,11{\cdot}7''$,
$a = 48$, $c = 575$, $b = 577$, $A = 4^0\,46'\,18{\cdot}8''$, $C = 85^0\,13'\,41{\cdot}2''$,
$a = 240{\cdot}501$, $c = 311{\cdot}172$, $b = 393{\cdot}28$, $A = 37^0\,42'$, $C = 52^0\,18'$,
$a = 136$, $c = 273$, $b = 305$, $A = 26^0\,28'\,51{\cdot}7''$, $C = 63^0\,31'\,8{\cdot}3''$,
$a = 109{\cdot}032$, $c = 68{\cdot}754$, $b = 128{\cdot}9$, $A = 57^0\,45'\,54''$, $C = 32^0\,14'\,6''$.

Die einfachste Anwendung dieser Sätze ist die auf die Höhenmessung. Ist BC ein senkrechter Gegenstand, und man misst AB nebst dem Winkel A, so kann man BC leicht berechnen.

§. 21.

In §. 15 haben wir schon einmal die regelmässigen Vielecke im Kreis und die demselben umschriebenen betrachtet. Wir wollen nun hier die Formeln zusammenstellen, welche auf dieselben Bezug haben.

Fig. 13.

Sey AB die Seite eines regelmässigen Vielecks von n Seiten im Kreis, r der Halbmesser des Kreises; CG senkrecht auf AB, DE senkrecht auf CG, so ist DE die Seite des regelmässigen Vielecks von n Seiten, das dem Kreise umschrieben werden kann.

Bezeichnen wir nun die Seite AB mit s, die DE mit S, so ist $AF = \tfrac{1}{2}s$, $DG = \tfrac{1}{2}S$ und $ACB = \frac{360^0}{n}$, $ACG = \frac{180^0}{n}$, mithin da $CA = CG = r$:

$$\tfrac{1}{2}\frac{s}{r} = \sin\frac{180^0}{n},\quad s = 2r\sin\frac{180^0}{n};\quad \tfrac{1}{2}\frac{S}{r} = \operatorname{tg}\frac{180^0}{n},\quad S = 2r\operatorname{tg}\frac{180^0}{n},$$

* Man vergleiche hiemit das in §. 30 Gesagte.

vermittelst welcher Formeln s und S aus r berechnet werden. Umgekehrt folgt daraus:

$$r = \frac{s}{2\sin\frac{180^0}{n}},\quad r = \frac{S}{2}\operatorname{cotg}\frac{180^0}{n},$$

wenn man r aus s oder S sucht. Man hat übrigens auch:

$$\frac{S}{s} = \frac{\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}}{\sin\frac{180^0}{n}} = \frac{1}{\cos\frac{180^0}{n}},\quad s = S\cos\frac{180^0}{n},\quad S = \frac{s}{\cos\frac{180^0}{n}}.$$

Da $\frac{CF}{r} = \cos\frac{180^0}{n}$, $CF = r.\cos\frac{180^0}{n}$,

so ist die Fläche des Dreiecks ACB:

$$\tfrac{1}{2}s.r.\cos\frac{180^0}{n} = r^2\sin\frac{180^0}{n}\cos\frac{180^0}{n} = \tfrac{1}{2}r^2\sin\frac{360^0}{n}$$

(§. 14 Formel (19)),

ist also f die Fläche des regelmässigen nEcks im Kreis, so ist

$$f = \tfrac{1}{2}n\,r^2\sin\frac{360^0}{n}.$$

Eben so ist die Fläche des Dreiecks DCE:

$$\tfrac{1}{2}S\,r = r^2\operatorname{tg}\frac{180^0}{n},$$

also wenn F die Fläche des um den Kreis beschriebenen Vielecks ist:

$$F = n\,r^2\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}\ (\text{§. } 15).$$

Umgekehrt zieht man hieraus:

$$r = \sqrt{\frac{2f}{n\sin\frac{360^0}{n}}},\quad r = \sqrt{\frac{F}{n}\operatorname{cotg}\frac{180^0}{n}}.$$

Wollte man aus den Seiten s und S die Flächen erhalten, so hätte man:

$$f = \tfrac{1}{2}n.r^2\sin\frac{360^0}{n} = \frac{\tfrac{1}{2}n.s^2}{4\sin^2\frac{180^0}{n}}\sin\frac{360^0}{n} = \frac{n\,s^2\sin\frac{180^0}{n}\cos\frac{180^0}{n}}{4\sin^2\frac{180^0}{n}}$$

$$= \frac{n\,s^2}{4}.\operatorname{cotg}\frac{180^0}{n},$$

$$F = n \cdot r^2 \operatorname{tg} \frac{180^0}{n} = n \cdot \frac{S^2}{4} \operatorname{cotg}^2 \frac{180^0}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{n} = \frac{n S^2}{4} \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n},$$

woraus dann umgekehrt folgt:

$$s = \sqrt{\frac{4f}{n} \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}}, \quad S = \sqrt{\frac{4F}{n} \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}}.$$

Wie man überhaupt diese Formeln weiter verbinden kann, ist leicht zu übersehen. Sey z. B.

$$f = 24127 \cdot 94, \ n = 37, \ \frac{180^0}{n} = 4^0 51' 53 \cdot 51'', \ \frac{360^0}{n} = 9^0 43' 47 \cdot 02''$$

$\log f = 4 \cdot 3825202$	$\log f = 4 \cdot 3825202$
$\log 2 = 0 \cdot 3010300$	$\log 4 = 0 \cdot 6020600$
$E. \log n = 8 \cdot 4317982$	$\log \operatorname{tg} \frac{180^0}{n} = 8 \cdot 9299934$
$E. \log \sin \frac{360^0}{n} = 0 \cdot 7721112$	$E. \log n = 8 \cdot 4317982$
$3 \cdot 8874596$	$2 \cdot 3463718$
$\log r = 1 \cdot 9437298$	$\log s = 1 \cdot 1731859$
$r = 87 \cdot 8475$	$s = 14 \cdot 8998$

Stellt ACB ein gleichschenkliges Dreieck vor, in welchem $AC = CB$ und man zieht CD senkrecht auf AB, so ist $AD = DB$, $ACD = BCD$ und man hat also zwei rechtwinklige Dreiecke. Sey nun $AC = CB = a$, $AB = c$, $A = B$, so ist

Fig. 14.

$$AD = \tfrac{1}{2} c = AC \cos A = a \cos A, \quad c = 2 a \cos A;$$
$$AD = \tfrac{1}{2} c = AC \sin \tfrac{1}{2} C = a \sin \tfrac{1}{2} C, \quad c = 2 a \sin \tfrac{1}{2} C.$$

Dass diese Auflösung ganz unmittelbar ihre Anwendung findet, wenn in einem Kreise eine Sehne gezogen wird und man die beiden Halbmesser an ihre Endpunkte zieht, ist klar. Ist in der vorhergehenden Figur 13 die Sehne $AB = s$, der Winkel $ACB = \alpha$, der Halbmesser $AC = r$, so ist also

$$s = 2 r \sin \tfrac{1}{2} \alpha, \quad r = \frac{s}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha};$$

die Fläche des Dreiecks ACB ist:

$$\frac{AB \cdot CF}{2} = \frac{2 r \sin \frac{1}{2} \alpha \cdot r \cos \frac{1}{2} \alpha}{2} = \frac{r^2 \sin \alpha}{2}.$$

Bezeichnet man die Länge des Bogens AB durch Bog. α, so ist also die Fläche des Abschnitts AFBG:

$$\tfrac{1}{2}r \,.\, \text{Bog.}\,\alpha - \frac{r^2 \sin\alpha}{2}.$$

Sey z. B. $r = 824{\cdot}7$, $\alpha = 94^0\,26'\,12'' = 339972''$ und

$$\text{Bog.}\,\alpha = \frac{2\,r\,\pi \,.\, 339972}{360\,.\,60\,.\,60} = \frac{r\,\pi \,.\, 339972}{180\,.\,60\,.\,60}.$$

$$\begin{aligned}
\log r &= 2{\cdot}9162960 & \log \text{Bog.}\,\alpha &= 3{\cdot}1333140\\
\log \pi &= 0{\cdot}4971499 & \log r &= 2{\cdot}9162960\\
\log 339972 &= 5{\cdot}5314432 & \text{E}\,.\,\log 2 &= 9{\cdot}6989699\\
\text{E}\,.\,\log 180\,.\,60\,.\,60 &= 4{\cdot}1884249 & & \overline{5{\cdot}7485799}\\
\log \text{Bog.}\,\alpha &= 3{\cdot}1333140 & \tfrac{1}{2} r\,\text{Bog.}\,\alpha &= 560505{\cdot}5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \sin\alpha &= 9{\cdot}9986967\\
2 \log r &= 5{\cdot}8325920\\
\text{E}\,.\,\log 2 &= 9{\cdot}6989699\\
& \overline{5{\cdot}5302586}\\
\tfrac{1}{2} r^2 \sin\alpha &= 339046{\cdot}0
\end{aligned}$$

$$\text{Abschnitt} = 560505{\cdot}5 - 339046{\cdot}0 = 221459{\cdot}5.$$

Anmerkung. Eine weitere hieher gehörende Aufgabe wäre etwa die folgende: Man kennt die Halbmesser R und r zweier Rollen, sowie den Abstand a ihrer Mittelpunkte und soll die Länge des Riemens berechnen, der über beide weggelegt, sie umschlingt.

Der Riemen ist gemeinschaftliche Tangente an beide Kreise. Seyen also C, c die Mittelpunkte der zwei Rollen; D, d die zwei Punkte, in denen die gemeinschaftliche Tangente die zwei Kreise berührt, so gibt es zwei andere Punkte D′, d′, die unterhalb Cc liegen, in derselben Weise, wie D und d oberhalb Cc (die Konstruktion der Figur ist sehr leicht und bleibt dem Leser überlassen). Seyen nun E, e die zwei Punkte, in denen die nach beiden Seiten verlängerte Cc die zwei Kreise trifft, so ist der halbe Riemen = Dd + Bog. de + Bog. DE. Nun ist aber der Winkel DCE (wenn $R > r$) ein stumpfer $= 180^0 - \alpha$ und man hat, wie leicht ersichtlich, $\alpha = \text{dce}$, und $\cos\alpha = \frac{R - r}{a}$, wodurch α bestimmt wird. Dann ist $\text{Bog.}\,\text{de} = \text{Bog.}\,\alpha = \frac{2\,r\,\pi\,.\,\alpha}{360.60.60}$, $\text{Bog.}\,\text{DE} = \frac{2R\,\pi(180^0 - \alpha)}{360\,.\,60\,.\,60}$, wenn α und $180^0 - \alpha$ in Sekunden ausgedrückt werden. Ferner ist $\text{Dd} = \sqrt{a^2 - (R - r)^2}$, also ist die Länge des Riemens =

$$2\sqrt{a^2 - (R - r)^2} + \frac{4\,r\,\pi\,\alpha}{360\,.\,60\,.\,60} + \frac{4\,R\,\pi\,(180^0 - \alpha)}{360\,.\,60\,.\,60}.$$

Sollte eine Kreuzung des Riemens (zwischen den zwei Rollen) vor sich gehen, so wäre jetzt die Länge des Riemens =

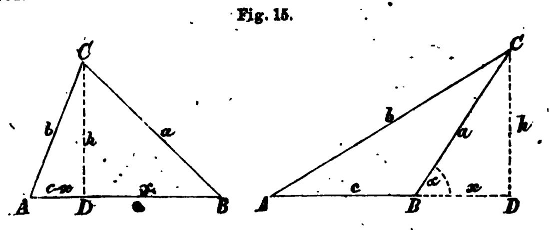
$$2\sqrt{a^2 - (R + r)^2} + \frac{4\,r\,\pi(180^0 - \alpha)}{360\,.\,60\,.\,60} + \frac{4\,R\,\pi\,(180^0 - \alpha)}{360\,.\,60\,.\,60},\ \cos\alpha = \frac{R + r}{a}.$$

§. 22.

Wenden wir uns nun zur allgemeinern Aufgabe, die uns in diesem Abschnitte beschäftigt, so haben wir zunächst drei Sätze aufzustellen, die uns in allen Fällen zur Auflösung der Dreiecke dienen müssen. Dieselben sind die folgenden.

Erster Hauptsatz der Trigonometrie. In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der ihnen entgegenstehenden Winkel.

Fig. 15.



Sey ABC das fragliche Dreieck, dessen Winkel A, B, C und dessen diesen Winkeln entgegenstehende Seiten a, b, c seyen. Man ziehe CD senkrecht auf AB und sey $CD = h$, so hat man für den Fall der ersten Figur:

$$\sin A = \frac{h}{b},\ \sin B = \frac{h}{a},\ h = b \sin A,\ h = a \sin B,$$

woraus folgt: $b \sin A = a \sin B$, $b : a = \sin B : \sin A$.

Für den Fall der zweiten Figur:

$$\sin A = \frac{h}{b},\ \sin \alpha = \frac{h}{a},\ \alpha = 180^0 - B,\ \sin \alpha = \sin B\ (§. 9),$$

$$h = b \sin A,\ h = a \sin B,\ b \sin A = a \sin B,$$

$$b : a = \sin B : \sin A.$$

Also immer:

$$a : b = \sin A : \sin B,\ a : c = \sin A : \sin C,\ b : c = \sin B : \sin C. *\quad (29)$$

Zweiter Hauptsatz der Trigonometrie. In jedem Dreieck verhält sich die Summe zweier Seiten zur Differenz dieser Seiten, wie die Tangente der halben Summe der entgegenstehenden Winkel zur Tangente der halben Differenz der nämlichen Winkel.

* Die zwei letzten Proportionen könnten ganz in derselben Weise bewiesen werden, wie die erste; doch ist ein Beweis derselben nicht mehr nothwendig, sobald die erste bewiesen ist. Letztere enthält nämlich offenbar den Beweis des ausgesprochenen Lehrsatzes, in welchem sodann die beiden andern unmittelbar enthalten sind. Wir werden im Folgenden fortwährend von dieser Art zu schliessen Gebrauch machen, ohne besonders daran zu erinnern.

Dieser Satz lässt sich aus dem ersten unmittelbar ableiten. Man hat nämlich nach (29):

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}, \frac{b}{a}+1=\frac{\sin B}{\sin A}+1, \frac{b}{a}-1=\frac{\sin B}{\sin A}-1, \text{ wenn } b>a;$$

d. h.
$$\frac{b+a}{a}=\frac{\sin B+\sin A}{\sin A}, \frac{b-a}{a}=\frac{\sin B-\sin A}{\sin A}.$$

Dividirt man diese Gleichungen durch einander, so hat man:

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{\sin B+\sin A}{\sin B-\sin A}=\frac{2\sin\frac{B+A}{2}.\cos\frac{B-A}{2}}{2\cos\frac{B+A}{2}.\sin\frac{B-A}{2}} \text{ (§. 14 Formel (25))}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{B+A}{2}.\operatorname{cotg}\frac{B-A}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B+A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}},$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned}
b+a:b-a&=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+A):\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-A),\\
b+c:b-c&=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C):\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C),\\
a+c:a-c&=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+C):\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-C),\\
&\text{oder:}\\
a+b:a-b&=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B):\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B),\\
c+b:c-b&=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C+B):\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C-B),\\
c+a:c-a&=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C+A):\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C-A),
\end{aligned}\right\}\quad(30)$$

worin die eine oder andere Form angewendet wird, nachdem $b>a$ oder $a>b$ u. s. w.

Es lässt sich dieser Satz übrigens auch leicht geometrisch nachweisen, und wir wollen diese Nachweisung, der Wichtigkeit des Satzes wegen, ebenfalls beifügen.

Fig. 16.

Sey $A>B$, also $a>b$; man mache $CD=CE=b$, ziehe DA und AE, EF parallel DA, so ist CA $=$ CD, also das Dreieck ACD gleichschenklig, mithin Winkel C (in ACB) $=2$ CAD; ist ferner CEA $=x$, EAB $=y$, so ist auch, weil CE $=$ CA: CAE $=x$, und also DAE $=$ CAD $+x$. Da ferner $x+x+\text{ACE}=180^\circ$, d. h. $2x+2\,\text{CAD}=180^\circ$, $x+\text{CAD}=90^\circ$, so steht AE auf AD senkrecht, eben so EF auf AE. Ferner ist:

$x+y=A,\ x=B+y,\ x-y=B$, also $x=\frac{1}{2}(A+B)$, $y=\frac{1}{2}(A-B)$.

$$\operatorname{tg} x=\frac{AD}{AE},\ \operatorname{tg} y=\frac{EF}{AE},\ \operatorname{tg} x:\operatorname{tg} y=AD:EF.$$

Weiter ist $\quad AD:EF=DB:BE=b+a:a-b,$

also $\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B):\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=a+b:a-b.$

Dritter Hauptsatz der Trigonometrie. In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, minus dem doppelten Produkt dieser beiden Seiten multiplizirt mit dem Cosinus des Winkels, den sie bilden.

Auch dieser Satz lässt sich aus dem ersten unmittelbar ableiten. Man hat nämlich:

$$A+B+C=180^0,\ B=180^0-(A+C),\ \cos B=-\cos(A+C),$$
$$\sin B=\sin(A+C).$$

$$a=\frac{\sin A}{\sin B}b=\frac{\sin A}{\sin(A+C)}b,\ a^2=\frac{\sin^2 A}{\sin^2(A+C)}b^2,\ 2ac=\frac{2\sin A\sin C}{\sin^2(A+C)}b^2,$$

$$c=\frac{\sin C}{\sin B}b=\frac{\sin C}{\sin(A+C)}b,\ c^2=\frac{\sin^2 C}{\sin^2(A+C)}b^2,$$

$$2ac\cos B=\frac{2\sin A\sin C}{\sin^2(A+C)}\cos B\cdot b^2=-\frac{2\sin A\sin C\cos(A+C)\cdot b^2}{\sin^2(A+C)},$$

also

$$a^2+c^2-2ac\cos B=b^2\cdot\frac{\sin^2 A+\sin^2 C+2\sin A\sin C\cos(A+C)}{\sin^2(A+C)}$$

$$=b^2\cdot\frac{\sin^2 A+\sin^2 C+2\sin A\sin C[\cos A\cos C-\sin A\sin C]}{\sin^2(A+C)}$$

$$=b^2\cdot\frac{\sin^2 A+\sin^2 C+2\sin A\cos A\cdot\sin C\cos C-2\sin^2 A\cdot\sin^2 C}{\sin^2(A+C)}$$

$$=b^2\cdot\frac{\sin^2 A+\sin^2 C+2\sin A\cos A\sin C\cos C-\sin^2 A\sin^2 C-\sin^2 A\sin^2 C}{\sin^2(A+C)}$$

$$=b^2\cdot\frac{\sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 C+\sin^2 C-\sin^2 A\sin^2 C+2\sin A\cos A\sin C\cos C}{\sin^2(A+C)}$$

$$=b^2\cdot\frac{\sin^2 A(1-\sin^2 C)+\sin^2 C(1-\sin^2 A)+2\sin A\cos A\sin C\cos C}{\sin^2(A+C)}$$

$$=b^2\cdot\frac{\sin^2 A\cos^2 C+\sin^2 C\cos^2 A+2\sin A\cos A\sin C\cos C}{\sin^2(A+C)}$$

$$=b^2\frac{(\sin A\cos C+\cos A\sin C)^2}{\sin^2(A+C)}=b^2\cdot\frac{\sin^2(A+C)}{\sin^2(A+C)}=b^2.$$

Also

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B,\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A. \quad (31)$$

Es ist jedoch wieder von Interesse, diesen Satz geometrisch nachzuweisen.

Für den Fall der ersten Figur hat man:

Fig. 17.

$$b^2 = h^2 + (c - x)^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2,$$
$$a^2 = h^2 + x^2$$
$$\overline{b^2 - a^2 = c^2 - 2cx,\ b^2 = a^2 + c^2 - 2cx.}$$

Da aber $\frac{x}{a} = \cos B$, $x = a \cos B$, so ist also

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$$

Im Falle der zweiten Figur ist:

$$b^2 = h^2 + (c + x)^2 = h^2 + c^2 + 2cx + x^2$$
$$a^2 = h^2 + x^2$$
$$\overline{b^2 - a^2 = c^2 + 2cx,\ b^2 = a^2 + c^2 + 2cx.}$$

Aber $\frac{x}{a} = \cos\alpha = \cos(180^0 - B) = -\cos B$, $x = -a \cos B$, also $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$. *

§. 23.

Ehe wir diese Sätze anwenden, wollen wir dieselben etwas umformen und einige Resultate daraus ziehen. Da immer $A + B = 180^0 - C$, $\frac{1}{2}(A+B) = 90^0 - \frac{1}{2}C$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B) = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}C$, so hat man statt des zweiten Satzes:

---

* Da ein jeder Winkel eines Dreiecks zwischen 0^0 und 180^0 liegt, so ist er nach §. 9 und §. 19 vollkommen bestimmt, wenn man seinen cos, tg oder cotg kennt; dagegen ist er durch den sin nur zweideutig bestimmt, indem man alsdann einen spitzen oder stumpfen Winkel erhalten kann. Die halben Winkel eines Dreiecks liegen immer zwischen 0^0 und 90^0; durch eine der vier trigonometrischen Funktionen ist also der halbe Winkel vollkommen bestimmt.

$$\left.\begin{array}{l} a+b:a-b=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C:\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B), \\ a+c:a-c=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B:\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-C), \\ b+c:b-c=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A:\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C), \end{array}\right\} \quad (32)$$

Eben so $\sin\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}C$, $\cos\frac{1}{2}(A+B)=\sin\frac{1}{2}C$.

Aus (29) folgt aber

$$a=\frac{c.\sin A}{\sin C},\ b=\frac{c.\sin B}{\sin C},$$

also

$$a+b=\frac{c.(\sin A+\sin B)}{\sin C}=\frac{2c.\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C.\cos\frac{1}{2}C}(\S.14)=$$

$$\frac{c.\cos\frac{1}{2}C.\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C.\cos\frac{1}{2}C}=\frac{c.\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C},$$

$$(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C=c.\cos\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Ferner:

$$a-b=\frac{c.(\sin A-\sin B)}{\sin C}=\frac{2c\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{c\sin\frac{1}{2}C.\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}=\frac{c\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C},$$

$$(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C=c.\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Man hat also auch

$$\left.\begin{array}{l} c\sin\frac{1}{2}(A-B)=(a-b)\cos\frac{1}{2}C,\ b\sin\frac{1}{2}(A-C)=(a-c)\cos\frac{1}{2}B, \\ \quad a\sin\frac{1}{2}(B-C)=(b-c)\cos\frac{1}{2}A, \\ c\cos\frac{1}{2}(A-B)=(a+b)\sin\frac{1}{2}C;\ b\cos\frac{1}{2}(A-C)=(a+c)\sin\frac{1}{2}B; \\ \quad a\cos\frac{1}{2}(B-C)=(b+c)\sin\frac{1}{2}A. \end{array}\right\} (33)$$

Für $a=b$ folgt hieraus $c=2a\sin\frac{1}{2}C$, wie in §. 21. Aus (33) folgen die (32) durch Division, so dass man also letztere Formeln in dieser Weise auch ableiten kann.

Quadrirt man beide Seiten der Gleichungen (33) und addirt die Quadrate, so erhält man:

$$c^2=(a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}C+(a+b)^2\sin^2\tfrac{1}{2}C$$
$$=(a^2-2ab+b^2)\cos^2\tfrac{1}{2}C+(a^2+2ab+b^2)\sin^2\tfrac{1}{2}C$$
$$=a^2(\cos^2\tfrac{1}{2}C+\sin^2\tfrac{1}{2}C)+b^2(\cos^2\tfrac{1}{2}C+\sin^2\tfrac{1}{2}C)-$$
$$2ab(\cos^2\tfrac{1}{2}C-\sin^2\tfrac{1}{2}C)$$
$$=a^2+b^2-2ab\cos C\ (\S.\ 14),$$

wodurch der Satz (31) in anderer Weise aus (29) (und den daraus folgenden (33)) abgeleitet ist.

Aus (31) zieht man ferner:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ 1+\cos A = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc},$$
$$1-\cos A = 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}$$
$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}.$$

Erinnert man sich nun, dass immer $M^2-N^2=(M+N)(M-N)$, so hat man:

$$1+\cos A = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc};$$
$$1-\cos A = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc},$$

d. h. (§. 14 Formeln (23)):

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc},\quad 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc},$$
$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}},$$
$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}.$$

Man setze

$$a+b+c=2s,\ \text{also}\ s=\tfrac{1}{2}(a+b+c),$$

so ist

$$a+b-c=2s-2c=2(s-c)$$
$$a-b+c=2s-2b=2(s-b),$$
$$b+c-a=2s-2a=2(s-a),$$

also

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2s.2(s-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$
$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2(s-c)2(s-b)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

woraus durch Division:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Also

$$\left.\begin{array}{l}
\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},\\
\qquad\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},\\
\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s.(s-a)}{bc}},\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s.(s-b)}{ac}},\\
\qquad\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s.(s-c)}{ab}},\\
\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s.(s-a)}},\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s.(s-b)}},\\
\qquad\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s.(s-c)}}.
\end{array}\right\}\quad(34)$$

Da $\sin A=2\sin\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}A,$

so folgt hieraus:

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\quad \sin B=\frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\quad (35)$$

woraus sich ergibt:

$$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c,$$

so dass der erste Hauptsatz auch aus dem dritten leicht abgeleitet werden kann. Wir wollen nun zur Anwendung dieser Formeln auf die Auflösung der Dreiecke übergehen.

§. 24.

In einem Dreiecke sind gegeben eine Seite und zwei Winkel, man soll die übrigen Stücke berechnen.

Da die Summe der drei Winkel $=180^0$, so kann man alle drei Winkel als gegeben ansehen. Sey ferner a die gegebene Seite, so hat man nach dem ersten Hauptsatze:

$$\sin A:\sin B=a:b,\ \sin A:\sin C=a:c,$$

$$b=a.\frac{\sin B}{\sin A},\ c=a.\frac{\sin C}{\sin A}.$$

Aus den Formeln (33) folgt übrigens auch, wenn $B>C$:

$$b-c=\frac{a\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A},\ b+c=\frac{a\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A},$$

woraus b — c, b + c gefunden werden, und man also b und c leicht erhalten wird. Rechnet man nach den ersten Formeln, so können die zweiten zur Kontrole dienen und umgekehrt.

$a = 379{\cdot}5$, $A = 40^0\,32'\,16''$, $B = 75^0\,18'\,28''$, $C = 64^0\,9'\,16''$,
also, wenn man nach den ersten Formeln rechnet:

log a =	2·5792118	log a =	2·5792118
log sin B =	9·9855621	log sin C =	9·9542292
E. log sin A =	0·1871204	E. log sin A =	0·1871204
log b =	2·7518943	log c =	2·7205614
b =	564·7995	c =	525·4862 *

Anmerkung. Will man nunmehr die Formeln (33) zur Kontrole anwenden, so muss

$$a \sin \tfrac{1}{2}(B - C) = (b - c) \cos \tfrac{1}{2} A, \quad a \cos \tfrac{1}{2}(B - C) = (b + c) \sin \tfrac{1}{2} A$$

seyn. Aber es ist

$\tfrac{1}{2}(B - C) = 5^0\,34'\,36''$, $\tfrac{1}{2}A = 20^0\,16'\,8''$, $b + c = 1090{\cdot}2857$, $b - c = 39{\cdot}3133$

also

log a =	2·5792118	log (b — c) =	1·5945395
log sin ½ (B — C) =	8·9875661	log cos ½ A =	9·9722387
	1·5667779		1·5667782
log a =	2·5792118	log (b + c) =	3·0375402
log cos ½ (B — C) =	9·9979396	log sin ½ A =	9·5396109
	2·5771514		2·5771511

so dass die Kontrole zutrifft. Es mag diess genügen, um zu zeigen, wie man in allen Fällen diese bequemen Formeln zur Prüfung der Rechnung benützen kann.

§. 25.

In einem Dreieck sind gegeben: zwei Seiten und der von ihnen gebildete Winkel; man soll die übrigen Stücke berechnen.

Seyen a, b die gegebenen Seiten, $a > b$, und C also der gegebene Winkel. Aus (32) hat man:

$$a + b : a - b = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B), \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C.$$

Hieraus findet man $\tfrac{1}{2}(A - B)$, und da $\tfrac{1}{2}(A + B) = 90^0 - \tfrac{1}{2} C$, so erhält man leicht A und B. Kennt man diese Winkel, so ergibt sich c aus:

$$a : c = \sin A : \sin C, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

oder auch, wenn man lieber will, aus den Formeln (33):

$$a = 564{\cdot}8, \quad b = 379{\cdot}5, \quad C = 64^0\,9'\,16'';$$

---

* Die Seiten sind natürlich alle in demselben Längenmaasse ausgedrückt, also alle z. B. in Ruthen, oder Fuss, oder Meter u. s. w.

also $\frac{1}{2}C = 32^\circ 4' 38''$, $a + b = 944{\cdot}3$, $a - b = 185{\cdot}3$.

$$\begin{aligned}
\log(a-b) &= 2{\cdot}2678754 \\
\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C &= 10{\cdot}2029092 \\
E.\log(a+b) &= \underline{7{\cdot}0248899} \\
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B) &= 9{\cdot}4956745 \\
\tfrac{1}{2}(A-B) &= 17^\circ 23' 6{\cdot}1''
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(A-B) &= 17^\circ 23'\ 6{\cdot}1'' \\
\tfrac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C &= \underline{57^\circ 55' 22''} \\
\text{durch Addition } A &= 75^\circ 18' 28{\cdot}1'' \\
\text{,, Subtraktion } B &= 40^\circ 32' 15{\cdot}9''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log a &= 2{\cdot}7518947 \\
\log\sin C &= 9{\cdot}9542292 \\
E.\log\sin A &= \underline{0{\cdot}0144377} \\
\log c &= 2{\cdot}7205616 \\
c &= 525{\cdot}486
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log(a-b) &= 2{\cdot}2678754 \\
\log\cos\tfrac{1}{2}C &= 9{\cdot}9280541 \\
E.\log\sin\tfrac{1}{2}(A-B) &= \underline{0{\cdot}5246318} \\
\log c &= 2{\cdot}7205613 \\
c &= 525{\cdot}486
\end{aligned}$$

Man kann übrigens die Seite c auch direkt berechnen. Es ist nämlich nach (31):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Man berechne nun den spitzen Winkel φ so, dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}C\sqrt{ab}}{a-b},$$

so ist

$$4ab\sin^2\tfrac{1}{2}C = (a-b)^2\operatorname{tg}^2\varphi,$$

also

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab(1-\cos C) - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab\sin^2\tfrac{1}{2}C$$

$$= (a-b)^2 + (a-b)^2\operatorname{tg}^2\varphi = (a-b)^2[1+\operatorname{tg}^2\varphi] = \frac{(a-b)^2}{\cos^2\varphi},$$

woraus:

$$c = \frac{a-b}{\cos\varphi},\quad a > b.$$

Für obiges Beispiel:

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{\cdot}3010300 \\
\log\sin\tfrac{1}{2}C &= 9{\cdot}7251451 \\
\tfrac{1}{2}\log a &= 1{\cdot}3759473 \\
\tfrac{1}{2}\log b &= 1{\cdot}2896059 \\
E.\log(a-b) &= \underline{7{\cdot}7321245} \\
\log\operatorname{tg}\varphi &= 10{\cdot}4238528 \\
\varphi &= 69^\circ 21' 7{\cdot}2''
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log(a-b) &= 2{\cdot}2678754 \\
E.\log\cos\varphi &= \underline{0{\cdot}4526861} \\
\log c &= 2{\cdot}7205615 \\
c &= 525{\cdot}486
\end{aligned}$$

Uebrigens wäre nach §. 19, ohne φ aufzuschlagen:

$$\log\cos\varphi = 9{\cdot}5473542 - \frac{462.55{\cdot}9}{63{\cdot}83} = 9{\cdot}5473138,$$

$$E.\log\cos\varphi = 0{\cdot}4526861.$$

Zur Kontrole kann man wieder (33) verwenden.

§. 26.

In einem Dreiecke sind alle Seiten bekannt, man soll die Winkel berechnen.

Die Formeln (34) lösen die Aufgabe ganz unmittelbar.

$$a = 9459{\cdot}31,\ b = 8032{\cdot}29,\ c = 8242{\cdot}58;$$

also

$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c) = 12867{\cdot}09,$$
$$s-a = 3407{\cdot}78,$$
$$s-b = 8434{\cdot}80,$$
$$s-c = 4624{\cdot}51.$$

$$\begin{array}{rlrl}
\log(s-b) = & 3{\cdot}6843785, & \log(s-a) = & 3{\cdot}5324716,\\
\log(s-c) = & 3{\cdot}6650657, & \log(s-c) = & 3{\cdot}6650657,\\
E.\log s = & 5{\cdot}8905196, & E.\log s = & 5{\cdot}8905196,\\
E.\log(s-a) = & \underline{6{\cdot}4675284}, & E.\log(s-b) = & \underline{6{\cdot}3156215},\\
 & 19{\cdot}7074922 & & 19{\cdot}4036784\\
\log tg\frac{A}{2} = & 9{\cdot}8537461 & \log tg\frac{B}{2} = & 9{\cdot}7018392\\
\frac{A}{2} = & 35^0\,31'\,47{\cdot}37'' & \frac{B}{2} = & 26^0\,43'\,0{\cdot}34''\\
A = & 71^0\,3'\,34{\cdot}74'' & B = & 53^0\,26'\,0{\cdot}68''
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log(s-a) = & 3{\cdot}5324716,\\
\log(s-b) = & 3{\cdot}6843785,\\
E.\log s = & 5{\cdot}8905196,\\
E.\log(s-c) = & \underline{6{\cdot}3349343},\\
 & 19{\cdot}4423040\\
\log tg\frac{C}{2} = & 9{\cdot}7211520\\
\frac{C}{2} = & 27^0\,45'\,12{\cdot}27''\\
C = & 55^0\,30'\,24{\cdot}54''
\end{array}$$

Die Summe $A+B+C = 179^0\,59'\,59{\cdot}96''$.

Zu Uebungsbeispielen mögen folgende Angaben dienen:

$a = 164{\cdot}9$, $b = 185{\cdot}7$, $c = 126{\cdot}4$, $A = 60^0\,17'\,8''$, $B = 77^0\,58'\,33''$, $C = 41^0\,44'\,19''$;

$a = 7984$, $b = 11227{\cdot}2$, $c = 9539{\cdot}28$, $A = 44^0\,17'\,56''$, $B = 79^0\,8'\,33''$, $C = 56^0\,33'\,31''$;

$a = 2313{\cdot}824$, $b = 10683{\cdot}3$, $c = 10931$, $A = 12^0\,13'\,14''$, $B = 77^0\,46'\,46''$, $C = 90^0\,0'\,0''$;

$a = 975$, $b = 845$, $c = 910$, $A = 67^0 22' 48{\cdot}5''$, $B = 53^0 7' 48{\cdot}4''$,
$C = 59^0 29' 23{\cdot}1''$;

$a = 54802$, $b = 55823{\cdot}3$, $c = 29577{\cdot}1$, $A = 72^0 35' 40''$,
$B = 76^0 24' 30''$, $C = 30^0 59' 50''$;

$\log a = 4{\cdot}1949091$, $\log b = 4{\cdot}1538831$, $\log c = 4{\cdot}2664872$,
$A = 55^0 24' 19''$, $B = 48^0 30' 9{\cdot}4''$, $C = 76^0 5' 31{\cdot}6''$.

§. 27.

In einem Dreiecke sind zwei Seiten gegeben und ein Winkel, welcher einer der beiden Seiten entgegensteht; man soll, wo möglich, die fehlenden Stücke berechnen.

Gegeben seyen a, b, A.

Man hat zunächst: $a : b = \sin A : \sin B$, $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$.

Aus dieser Gleichung wird sich jedoch B nicht immer genau bestimmen lassen. Schlägt man nämlich aus den Tafeln den spitzen Winkel auf, dessen Sinus $= \frac{b \sin A}{a}$, so gibt es noch einen zweiten Winkel, der mit dem gefundenen 180^0 ausmacht, dessen Sinus derselbe ist (§. 9). Es kann sich aber ereignen, dass beide Werthe des Winkels B zulässig sind; alsdann hat man eben zwei Dreiecke, welche besonders zu berechnen sind.

Ist nun

$a > b$, so ist auch $A > B$, also gilt für B nur der spitze Winkel,
$a = b$, „ „ „ $A = B$, „ „ „ B „ „ „ „
$a < b$, „ „ „ $A < B$,

alsdann kann der spitze Winkel sowohl als der stumpfe gelten.

Eine Doppeldeutigkeit kann also nur in dem Falle eintreten, wenn $a < b$.

Fiele $\sin B$ nach unserer Formel > 1 aus, so wäre das Dreieck mit den gemachten Angaben unmöglich. Wir wollen nun einige Beispiele berechnen.

1) $a = 415{\cdot}64$, $b = 325{\cdot}54$, $A = 68^0 42'$.

$\log b = 2{\cdot}5126044$
$\log \sin A = 9{\cdot}9692720$
$E . \log a = 7{\cdot}3812826$
$\log \sin B = 9{\cdot}8631590$
$B = 46^0 51' 47{\cdot}9''$

B kann bloss spitz seyn; man hat also nur ein Dreieck, das jetzt nach §. 24 berechnet werden kann; darin ist nun $a = 415{\cdot}64$, $b = 325{\cdot}54$, $A = 68^0 42'$, $B = 46^0 51' 47{\cdot}9''$; mithin $C = 64^0 26' 12{\cdot}1''$.

2) $a = 212{\cdot}5,\ b = 836{\cdot}4,\ A = 14^0\,24'\,35''$.

$\log b = 2{\cdot}9224140$
$\log\sin A = 9{\cdot}3959449$
$E.\log a = 7{\cdot}6726410$
$\log\sin B = 9{\cdot}9909999$
$B = 78^0\,22'\,32{\cdot}3''$
$180^0 - B = 101^0\,37'\,27{\cdot}7''$

In diesem Falle gibt es also zwei Dreiecke. Für das eine ist
$a = 212{\cdot}5,\ b = 836{\cdot}4,\ A = 14^0\,24'\,35'',$
$B = 78^0\,22'\,32{\cdot}3'',\ C = 87^0\,12'\,52{\cdot}7''$;
für das andere:
$a = 212{\cdot}5,\ b = 836{\cdot}4,\ A = 14^0\,24'\,35'',$
$B = 101^0\,37'\,27{\cdot}7'',\ C = 63^0\,57'\,57{\cdot}3''$.

3) $a = 86.93,\ b = 918{\cdot}54,\ A = 68^0\,22'\,30''$.

$$\begin{aligned} \log b &= 2{\cdot}9630981 \\ \log\sin A &= 9{\cdot}9683034 \\ E.\log a &= 8{\cdot}0608302 \\ \hline \log\sin B &= 10{\cdot}9922317, \end{aligned}$$

also kein Dreieck möglich.

Zur Uebung mögen dienen:

$a = 379{\cdot}5,\ b = 564{\cdot}8,\ A = 40^0\,32'\,16'',\ B = \begin{cases} 75^0\,18'\,28{\cdot}1'' \\ 104^0\,41'\,31{\cdot}9'' \end{cases}$

$a = 9459{\cdot}31,\ b = 8032{\cdot}29,\ A = 71^0\,3'\,34{\cdot}7'',\ B = 53^0\,26'\,0{\cdot}6'',$

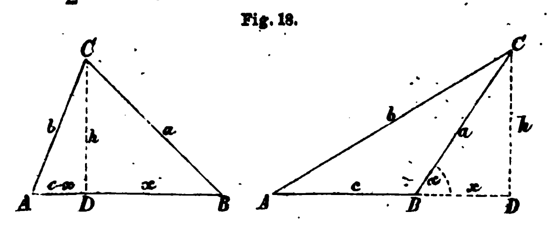
$a = 56{\cdot}73,\ b = 876{\cdot}24,\ A = 85^0\,23'\,24{\cdot}8''$, B unmöglich.

Wir hätten hier allerdings noch einige besondere Bemerkungen beizufügen für den Fall, wenn die gegebenen oder gesuchten Winkel sehr klein, oder nahe an 90^0 oder nahe an 180^0 sind. Wir wollen dieselben jedoch, als nur ganz spezielle Fälle betreffend, für den nächsten Abschnitt verschieben, wo man sie in §§. 29, 30 zusammengestellt finden wird. Einige rein geometrische Aufgaben mögen zunächst als Beispiele der Anwendung des Vorstehenden folgen.

§. 28.

1) Will man den Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen drei Seiten wie früher a, b, c sind, und denen die Winkel A, B, C entgegenstehen, berechnen, so hat man, wenn wie in §. 22, h die Höhe des Dreiecks, also $\frac{ch}{2}$ die Fläche desselben bedeutet:

Fig. 18.



$$\frac{h}{a} = \sin B, \; h = a \sin B,$$

mithin ist diese Fläche

$$= \frac{ac}{2} \sin B = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ab \sin C}{2},$$

wie sich nach (29) leicht findet. Diese Formeln geben den Flächeninhalt durch zwei Seiten und den von denselben gebildeten Winkel. Will man die Fläche durch eine Seite a und die Winkel erhalten, so ist

$$c : a = \sin C : \sin A, \; c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

also die Fläche des Dreiecks $= \frac{ac \sin B}{2}$

$$= \frac{a^2 \sin B . \sin C}{2 \sin A} = \frac{b^2 \sin A . \sin C}{2 \sin B} = \frac{c^2 \sin A . \sin B}{2 \sin C}.$$

Will man sie endlich durch die drei Seiten ausgedrückt erhalten, so ist nach §. 23:

$$\sin B = \frac{2}{ac} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

also die Fläche $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

2) Es leitet sich hieraus leicht eine Formel zur Berechnung eines Vierecks aus seinen zwei Diagonalen und dem Winkel, unter dem sie sich schneiden, ab.

Fig. 19.

Sey nämlich $BC = d$, $AD = d'$, α der Winkel, also sein Nebenwinkel $180^0 - \alpha$, so ist

Fläche des Dreiecks $OAB = \tfrac{1}{2} xy \sin \alpha$,

„ „ „ $OBD = \tfrac{1}{2} x(d'-y) \sin \alpha$,

„ „ „ $OCD = \tfrac{1}{2} (d'-y)(d-x) \sin \alpha$,

„ „ „ $OAC = \tfrac{1}{2} (d-x) y \sin \alpha$.

Fläche des Vierecks $= \tfrac{1}{2} \sin \alpha [xy + x(d'-y) + (d'-y)(d-x) + (d-x)y] = \tfrac{1}{2} dd' \sin \alpha$.

3) Gesetzt in dem so eben betrachteten Vierecke seyen je zwei entgegenstehende Winkel zusammen 180^0, in welchem Falle bekanntlich um das Viereck sich ein Kreis beschreiben lässt. Sey ferner

$AB = a$, $BD = b$, $DC = c$, $CA = d$, $CAB = \varphi$, $CDB = 180^0 - \varphi$,

wo ist (§. 22 (31)):

$$BC^2 = a^2 + d^2 - 2\,ad\cos\varphi,\quad BC^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos(180^0 - \varphi),$$

also

$$a^2 + d^2 - 2\,ad\cos\varphi = b^2 + c^2 + 2\,bc\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + d^2 - (b^2 + c^2)}{2(ad + bc)}.$$

Die Fläche des Dreiecks ABC ist aber $\frac{ad\sin\varphi}{2}$, die von BCD $= \frac{bc\sin\varphi}{2}$, also

$$\text{Fläche des Vierecks} = \frac{ad + bc}{2}\sin\varphi = \frac{ad + bc}{2}\sqrt{1 - \cos^2\varphi}$$

$$= \frac{ad + bc}{2}\sqrt{(1 + \cos\varphi)(1 - \cos\varphi)}.$$

Aber

$$1 + \cos\varphi = 1 + \frac{a^2 + d^2 - (b^2 + c^2)}{2ad + 2bc} = \frac{2ad + 2bc + a^2 + d^2 - (b^2 + c^2)}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{a^2 + 2ad + d^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2(ad + bc)} = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{(a + d + b - c)(a + d - b + c)}{2(ad + bc)} \quad (\S.\ 23),$$

$$1 - \cos\varphi = 1 - \frac{a^2 + d^2 - (b^2 + c^2)}{2ad + 2bc} = \frac{2ad + 2bc - (a^2 + d^2) + (b^2 + c^2)}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{b^2 + 2bc + c^2 - (a^2 - 2ad + d^2)}{2(ad + bc)} = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{(b + c + a - d)(b + c - a + d)}{2(ad + bc)},$$

also die Fläche des Vierecks:

$$\frac{ad + bc}{2}\sqrt{\frac{(a + b - c + d)(a + c + d - b)}{2(ad + bc)}}\sqrt{\frac{(a + b + c - d)(b + c + d - a)}{2(ad + bc)}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a + b - c + d)(a - b + c + d)(a + b + c - d)(b + c + d - a)}.$$

Setzt man

$$a + b + c + d = 2s,\quad a + b + c - d = 2(s - d),\quad a + b - c + d = 2(s - c),$$

$$a - b + c + d = 2(s - b),\quad -a + b + c + d = 2(s - a),$$

so ist diese Fläche mithin:

$$\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

Es folgt hieraus, dass, wie man auch die vier Seiten im Kreise an einander legen mag, die Fläche des entstehenden Vierecks immer dieselbe sey.

4) Wären in obigem Vierecke die zwei Winkel CAB und CDB, der erste gebildet von den Seiten a und d, der letzte von b und c, einander gleich, so hätte man:

$$a^2+d^2-2ad\cos\varphi=b^2+c^2-2bc\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi=\frac{a^2+d^2-(b^2+c^2)}{2(ad-bc)},$$

woraus ganz wie vorhin für die Fläche des Vierecks folgt:

$$\pm\tfrac{1}{4}\frac{ad+bc}{ad-bc}\sqrt{(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(-a+b-c+d)},$$

wo das Zeichen so zu wählen ist, dass das Ganze positiv ausfällt.

5) Man soll diejenigen Kreise bestimmen, die sich in und um ein Dreieck zeichnen lassen.

Sey r der Halbmesser des ersten, r′ des zweiten, so sind die Seiten des Dreiecks Tangenten an den ersten Kreis und Sehnen im zweiten. Daraus folgt leicht, dass die drei Halbirungslinien der Dreieckswinkel sich im Mittelpunkt des ersten treffen; zieht man sie, so wird das Dreieck in drei Dreiecke getheilt, deren Spitzen im Mittelpunkte sind; nimmt man die Seiten des Dreiecks zu Grundlinien, so hat jedes r zur Höhe, und wenn folglich F die nach Nr. 1 berechnete Fläche des Dreiecks ist, so hat man

$$\tfrac{1}{2}ar+\tfrac{1}{2}br+\tfrac{1}{2}cr=F,\ r=\frac{2F}{a+b+c}.$$

Was den zweiten Halbmesser anbelangt, so werden die zwei nach A und B gezogenen Halbmesser mit einander einen Winkel 2C machen, so dass (§. 21):

$$c=2r'\sin C,\ r'=\frac{c}{2\sin C}=\frac{abc}{2ab\sin C}=\frac{abc}{4F}.$$

6) Man soll den Halbmesser desjenigen Kreises finden, der sich um das Viereck in Nr. 3 beschreiben lässt.

Nennt man die Diagonale CB = x, so geht der Kreis, der sich um ACB beschreiben lässt, durch D, und umgekehrt, der Kreis um BCD geht durch A. Demnach ist, wenn r sein Halbmesser, derselbe bestimmt durch die Gleichung

$$r=\frac{x}{2\sin\varphi},\ \varphi=BAC.$$

Ferner ist

$$x=\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\varphi},\ \cos\varphi=\frac{a^2+d^2-(b^2+c^2)}{2(ad+bc)},$$

$$x = \sqrt{a^2 + d^2 - ad \cdot \left[\frac{a^2 + d^2 - (b^2 + c^2)}{ad + bc}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+d^2)ad + (a^2+d^2)bc - (a^2+d^2)ad + (b^2+c^2)ad}{ad + bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+d^2)bc + (b^2+c^2)ad}{ad + bc}}.$$

Nach Nr. 3 ist $\sin\varphi = \frac{2F}{ad + bc}$, wenn F die Fläche des Vierecks, also

$$r = \frac{ad + bc}{4F}\sqrt{\frac{(a^2+d^2)bc + (b^2+c^2)ad}{ad + bc}}$$

$$= \frac{1}{4F}\sqrt{[ad + bc]\,[(a^2+d^2)bc + (b^2+c^2)ad]}$$

$$= \frac{1}{4F}\sqrt{(ad + bc)(ab + cd)(bd + ac)}.$$

Diese Aufgaben, denen wir keine Zahlenbeispiele beifügen, da deren Berechnung ziemlich einfach ist, mögen für den Augenblick genügen.

Anmerkung. Aus Nr. 1 ergibt sich unmittelbar, dass die Länge der vom Scheitel C eines Dreiecks auf die entgegenstehende Seite c gefällten Senkrechten gleich ist

$$\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Hieraus folgt auch leicht ein Ausdruck für die Berechnung der Fläche eines Paralleltrapezes aus seinen Seiten. Stellt nämlich ABCD ein Paralleltrapez vor (die Figur wird sich der Leser leicht konstruiren können), in dem AB parallel CD, und ist AB = a, CD = b, wobei $a > b$ vorausgesetzt werde, AC = c, BD = d, ferner h die Entfernung beider Parallelen, so ist $(a + b)\frac{h}{2}$ der Flächeninhalt des Trapezes. Zieht man aber durch C mit BD die Parallele CE, welche AB in E trifft, so ist AE = a — b und die Höhe des Dreiecks ACE, dessen Seiten c, d, a — b sind, ist h, so dass also

$$h = \frac{2}{a-b}\sqrt{s(s-c)(s-d)(s-(a-b))},\ s = \tfrac{1}{2}(c + d + a - b)$$

ist. Demnach die Fläche des Paralleltrapezes =

$$\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\tfrac{1}{2}(c+d+a-b)\,\tfrac{1}{2}(d+a-b-c)\,\tfrac{1}{2}(c+a-b-d)\,\tfrac{1}{2}(c+d+b-a)}.$$

Setzt man nunmehr $\sigma = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$, so ist dieselbe, wie leicht ersichtlich:

$$\frac{a+b}{a-b}\sqrt{(\sigma-a)(\sigma-b)(\sigma-b-c)(\sigma-b-d)}.$$

Es ist leicht zu ersehen, welchen Werth die hier gegebenen Formeln für die

Praxis haben. Wir wollen in dieser Beziehung nur auf eine Anwendung der Formel in Nr. 2 hinweisen. Gesetzt nämlich, man solle in einem Walde eine vierseitige Fläche von einem badischen Morgen = 400 Quadratruthen abstecken, und lasse zu dem Ende zwei schmale Gänge AD, CB (Fig. 19) durchhauen (oder finde sie bereits vor), die mit einander einen Winkel von $75\frac{1}{2}^0$ machen. Der eine davon, AD, sey = 32·4 Ruthen, und man solle nun die Länge des andern, CB, bestimmen. Also, wenn CB = x:

$$\frac{32{\cdot}4\, x \sin 75^0 30'}{2} = 400,\ x = \frac{800}{32{\cdot}4 \sin 75^0 30'} = 25{\cdot}50\,\text{R}.$$

Steckt man also, von dem gewählten Anfangspunkte C aus, eine Länge von 25·50 R. = $25^0 5' 0''$ ab, so wird das Viereck ABCD genau ein Morgen gross seyn. Wollte man beide Gänge gleich lang machen, so hätte man, wenn BC = AD = x:

$$\frac{x^2 \sin 75^0 30'}{2} = 400,\ x = \sqrt{\frac{800}{\sin 75^0 30'}} = 28{\cdot}74\,\text{R}.$$

Vierter Abschnitt.

Untersuchung einiger speziellen Punkte. Umformungen. Auflösung trigonometrischer Gleichungen.

§. 29.

In §. 15 haben wir, um das dortige Interpolationsverfahren zu rechtfertigen, uns auf den Satz gestützt, dass, bei kleinen Winkelunterschieden, die Differenzen der Logarithmen z. B. des Sinus zweier Winkel sich (nahezu) verhalten wie die Differenzen der Winkel. Dieser Satz setzt voraus, dass die Differenzen der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen unmittelbar auf einander folgender Winkel nahezu gleich sind. Es ist diess, für die gewöhnlichen Vega'schen Tafeln, die von Minute zu Minute fortgehen, für die Winkel, die über 5^0 hinausliegen, allerdings der Fall. Zwischen $1^0\ 30'$ und 5^0 ist es der Fall, wenn die Winkel von 10 zu 10 Sekunden fortgehen, unter der ersten Gränze müssen sie jedoch von Sekunde zu Sekunde angegeben seyn. Es bezieht sich diess jedoch nur auf den Sinus und die Tangente (bezüglich auch Cotangente). Die neuern Vega'schen Tafeln haben daher diese Einrichtung erhalten. Man hat also z. B.

	Winkel		log sin	Differenzen:
Winkel	0° 4′18″:	log sin	= 7·0971945	
	0° 4′19″:	„	= 7·0988745	16800
	0° 4′20″:	„	= 7·1005481	16736
	0° 4′21″:	„	= 7·1022153	16672
	0° 4′22″:	„	= 7·1038760	16607.
Winkel	1°41′ 0″:	„	= 8·4679850	„
	1°41′10″:	„	= 8·4687009	7159
	1°41′20″:	„	= 8·4694156	7147
	1°41′30″:	„	= 8·4701291	7135
	1°41′40″:	„	= 8·4708414	7123
	1°41′50″:	„	= 8·4715526	7112
	1°41′ 0″:	„	= 8·4722626	7100
Winkel	22°25′ :	„	= 9·5813116	„
	22°26′ :	„	= 9·5816177	3061
	22°27′ :	„	= 9·5819236	3059
	22°28′ :	„	= 9·5822292	3056
	22°29′ :	„	= 9·5825345	3053
	22°30′ :	„	= 9·5828397	3052,

wodurch unsere Behauptung augenscheinlich gerechtfertigt ist. Die neuern Ausgaben der Vega'schen Tafeln haben somit dem in dieser Beziehung in den frühern obwaltenden Mangel abgeholfen. Auch die Gallet'schen Tafeln geben für die ersten fünf Grade den log sin und log tg von Sekunde zu Sekunde, und für alle übrigen Grade von 10 zu 10 Sekunden, sind also noch schärfer als die Vega'schen.

Um bei anderer Einrichtung der Tafeln den hier obwaltenden Uebelständen abzuhelfen, wurden früher zwei Hülfsformeln aufgestellt, deren Kenntniss immerhin noch von Interesse ist, und die sich leicht aus den in §. 16 entwickelten Grundsätzen herleiten lassen. Bezeichnet man die in §. 16 $\frac{a}{r}$ genannte Grösse mit α, so hat man sehr nahe für kleine Winkel A:

$$\sin A = \alpha - \frac{\alpha^3}{6}, \quad \cos A = 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Aber es ist

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)^3 = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{12}\alpha^4 - \frac{1}{216}\alpha^6,$$

also da man $\frac{1}{12}\alpha^4$ und noch mehr $\frac{1}{216}\alpha^6$ wird weglassen können:

$$\left(1-\frac{\alpha^2}{6}\right)^3 = 1-\frac{\alpha^2}{2},\ 1-\frac{\alpha^2}{6} = \sqrt[3]{1-\frac{\alpha^2}{2}},$$

$$\alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{6}\right) = \alpha\sqrt[3]{1-\frac{\alpha^2}{2}},$$

d. h.

$$\sin A = \alpha\sqrt[3]{\cos A}.$$

Gesetzt nun der Winkel A sey a″, so ist $\alpha = \frac{a\pi}{180.60.60}$, also

$\sin a'' = \frac{a\pi}{180.60.60}\sqrt[3]{\cos a''}$, wo $\log\frac{\pi}{180.60.60} = 4{\cdot}6855749 - 10.$

Ferner

$$\operatorname{tg} a'' = \frac{\sin a''}{\cos a''} = \frac{a\pi}{180.60.60}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2 a''}}.$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}\log\sin a'' &= \log a + 4{\cdot}6855749 + \tfrac{1}{3}\log\cos a'' - 10\\ \log\operatorname{tg} a'' &= \log a + 4{\cdot}6855749 - \tfrac{2}{3}\log\cos a'' - 10\end{aligned}\right\}\ (36)$$

Umgekehrt ergibt sich hieraus:

$$\left.\begin{aligned}\log a &= \log\sin a'' + 5{\cdot}3144251 - \tfrac{1}{3}\log\cos a''\\ \log a &= \log\operatorname{tg} a'' + 5{\cdot}3144251 + \tfrac{2}{3}\log\cos a''\end{aligned}\right\}\ (36')$$

welche Formeln dazu dienen, a (in Sekunden) aus dem bekannten log sin a″ oder log tg a″ zu suchen. Für log cos a″ kann man aus den Tafeln den nächst kleinern oder grössern log cos a″ nehmen, da im Anfang die log cos sehr langsam sich ändern.

Ein Beispiel nach den frühern Ausgaben der Vega'schen Tafeln, die von 0° bis 6° nur von 10″ zu 10″ gingen, mag diess erläutern. Es sey gegeben log sin a″ = 7·8327909. Jedenfalls liegt also der Winkel zwischen 0°23′20″ und 0°23′30″. Man kann somit

$$\log\cos a'' = 9{\cdot}9999900,\ \text{also}$$

$$\tfrac{1}{3}\log\cos a'' = \tfrac{1}{3}[9{\cdot}9999900 - 10] = \tfrac{1}{3}[29{\cdot}9999900 - 30]$$
$$= 9{\cdot}9999966 - 10$$

setzen. Mithin:

$$\begin{aligned}\log\sin a'' &= 7{\cdot}8327909\\ &\ 5{\cdot}3144251\\ E.\tfrac{1}{3}\log\cos a'' &= \underline{0{\cdot}0000033}\\ \log a'' &= 3{\cdot}1472193\\ a &= 1403{\cdot}522'' = 0^\circ 23' 23{\cdot}522''\end{aligned}$$

Nach den Tafeln hätte man:

$$\begin{array}{r} 7{\cdot}8327909 \\ \log\sin 0^\circ 23' 20'' = \underline{7{\cdot}8316996} \\ \frac{10913}{3091} = 3{\cdot}53,\ a = 0^\circ 23' 23{\cdot}53''. \end{array}$$

Ist gegeben

$$\log \operatorname{tg} a'' = 6{\cdot}9758273,$$

so liegt der Winkel zwischen $0^\circ 3' 10''$ und $0^\circ 3' 20''$; für $\log\cos a''$ hat man also $9{\cdot}9999998$. Mithin:

$$\begin{array}{r} \log \operatorname{tg} a'' = 6{\cdot}9758273 \\ 5{\cdot}3144251 \\ \tfrac{2}{3}\log\cos a'' = \underline{9{\cdot}9999998} \\ \log a'' = 2{\cdot}2902522 \\ a'' = 195{\cdot}098 = 0^\circ 3' 15{\cdot}098''. \end{array}$$

Nach den Tafeln:

$$\begin{array}{r} 6{\cdot}9758273 \\ \log \operatorname{tg} 0^\circ 3' 10'' = \underline{9{\cdot}9643286} \\ \frac{114987}{22276{\cdot}4} = 5{\cdot}16,\ a = 0^\circ 3' 15{\cdot}16''. \end{array}$$

Die neuern Tafeln geben:

$$\begin{array}{r} 6{\cdot}9758273 \\ \log \operatorname{tg} 0^\circ 3' 15'' = \underline{6{\cdot}9756096} \\ 2177 \qquad a = 0^\circ 3' 15{\cdot}098'' \end{array}$$

$$22215 : 2177 = 1 : x,\ x = \frac{2177}{22215} = 0{\cdot}098,$$

also ganz übereinstimmend mit obigem Resultate, während die frühern Tafeln den Winkel zu gross gegeben hätten. Man sieht hieraus, mit welcher Schärfe die Formeln (36′) den (kleinen) Winkel a'' geben. Aus den Untersuchungen des §. 16 geht hervor, dass übrigens der Winkel bis über 2° gehen kann.

Was wir hier von Sinus und Tangente der Winkel nahe an 0° gesagt, gilt natürlich von Cosinus und Cotangente der Winkel nahe an 90° und Sinus und Tangente der Winkel nahe an 180° u. s. w. ebenfalls.

§. 30.

Wie die Ansicht der Tafeln zeigt, und wie aus den Untersuchungen des §. 16 ganz klar hervorgeht, werden für Winkel nahe an 0° die Logarithmen der Cosinus sehr langsam sich ändern (eben so

die Logarithmen der Sinus für Winkel nahe an 90^0); da man bei der Bestimmung des Winkels durch den gegebenen Logarithmus einer trigonometrischen Funktion desselben die Aenderungen braucht, so wird mithin ein nahe an 0^0 liegender Winkel durch seinen log cos (ein nahe an 90^0 liegender durch seinen log sin) nicht genau bestimmt werden können. In diesem Falle wird man entweder überhaupt die Bestimmung durch log cos vermeiden, oder etwa für cos A setzen $1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$ (§. 14) und nun $\sin\frac{A}{2}$ bestimmen. Wir wollen in dieser Beziehung die frühern Formeln der §§. 20 und 24—27 spezieller untersuchen.

Ist wie in §. 29 α der zum Winkel A (als Mittelpunktswinkel) in einem Kreise vom Halbmesser 1 gehörige Bogen, und ist A sehr klein, so kann man immer setzen $\cos A = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, also etwa statt der Formel (§. 20, Nr. 1)

$$c = b \cos A,$$

wenn A klein ist, anwenden:

$$c = b\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) = b - \frac{\alpha^2 b}{2},\text{*}$$

oder auch

$$c = b\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) = b - 2b\sin^2\frac{A}{2},$$

welche beide Formeln gleich genau sind.

In (§. 20, Nr. 2)
$$b = \frac{c}{\cos A},$$

wird man ähnlich haben

$$b = \frac{c}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} = \frac{c\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)} = \frac{c\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)}{1 - \frac{\alpha^4}{4}},$$

oder da $\frac{\alpha^4}{4}$ sehr klein ist:

$$b = c + \frac{\alpha^2 c}{2}.$$

---

* Ist der Winkel A = a Sekunden, so hat man:
$\log\alpha = \log a + 4{\cdot}6855749 - 10$, $\log a = \log\alpha + 5{\cdot}3144251$.

Soll aus der Formel (§. 20, Nr. 3)

$$\cos C = \frac{a}{b},$$

bei nahezu $b = a$, C bestimmt werden, so wird diess nicht genau genug geschehen. Alsdann hat man besser (vergl. §. 20):

$$1 - \cos C = \frac{b-a}{b}, \quad 1 + \cos C = \frac{b+a}{b},$$

d. h.

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{b-a}{b}, \quad 2\cos^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{b+a}{b},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{b-a}{2b}}, \ \cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{b+a}{2b}}, \ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{b-a}{b+a}},$$

welch letztere Formel in der Regel die grösste Genauigkeit gewährt. Dieser letztere Fall ist es vorzugsweise, in dem die Umformung nothwendig ist; die frühern verlangen diess weniger. Angenommen für die Formel $c = b \cos A$ sey $b = 8347{\cdot}5$, $A = 0^0 4' 15{.}78''$, so hat man:

$$\begin{aligned} \log b &= 3{\cdot}9215564 \\ \log \cos A &= 9{\cdot}9999997 \\ \hline \log c &= 3{\cdot}9215561 \\ c &= 8347{\cdot}494 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{\cdot}3010300 \\ \log b &= 3{\cdot}9215564 \\ 2 \log \sin \frac{A}{2} &= 3{\cdot}5848202 \\ \hline \log 2 b \sin^2 \frac{A}{2} &= 7{\cdot}8074066 \\ 2 b \sin^2 \frac{A}{2} &= 0{\cdot}006418 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 8347{\cdot}500000 \\ 2 b \sin^2 \frac{A}{2} &= \phantom{8347{\cdot}}0{\cdot}006418 \\ \hline c &= 8347{\cdot}493582 \end{aligned}$$

Da $A = 255{\cdot}78''$, so ist $\log \alpha = 0{\cdot}0934415 - 3$, mithin hat man auch:

$$\begin{aligned} \log b &= 3{\cdot}9215564 \\ 2 \log \alpha &= 0{\cdot}1868830 - 6 \\ E . \log 2 &= 9{\cdot}6989699 \\ \hline & 0{\cdot}8074093 - 3 \\ \tfrac{1}{2} \alpha^2 b &= 0{\cdot}006418 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 8347{\cdot}500000 \\ \tfrac{1}{2} \alpha^2 b &= \phantom{8347{\cdot}}0{\cdot}006418 \\ \hline c &= 8347{\cdot}493582 \end{aligned}$$

Kommt in den Formeln des §. 24 A nahe an 90^0, in welchem Falle $\sin A$ sich sehr langsam ändert, so wird man zur Bestimmung

von b und c besser die Formeln für b — c und b + c anwenden, die gerade in diesem Falle diesem Uebelstande ausweichen.

Dasselbe gilt, wenn noch einer der andern zwei Winkel nahe an 90° geht. Dass man bei sehr kleinen Winkeln die Sinus derselben in der mehrfach angegebenen Weise ersetzen kann, ist klar. Doch wird, bei der bessern Einrichtung der Tafeln diess keinen wesentlichen Nutzen bringen.

$$a = 7365{\cdot}4,\ A = 89^\circ 57' 34{\cdot}8'',\ B = 67^\circ 14' 22{\cdot}6'';$$
$$A = 90^\circ - 0^\circ 2' 25{\cdot}2'',\ C = 22^\circ 48' 2{\cdot}6''.$$

$\log a = 3{\cdot}8671963$	$\log a = 3{\cdot}8671963$
$\log \sin B = 9{\cdot}9647925$	$\log \sin C = 9{\cdot}5883022$
$E.\log\cos 0^\circ 2' 25{\cdot}2'' = 0{\cdot}0000001$	$E.\log\cos 0^\circ 2' 25{\cdot}2'' = 0{\cdot}0000001$
$\log b = 3{\cdot}8319889$	$\log c = 3{\cdot}4554986$
$b = 6791{\cdot}863$	$c = 2854{\cdot}293$
$\log a = 3{\cdot}8671963$	$\log a = 3{\cdot}8671963$
$\log\sin\frac{1}{2}(B - C) = 9{\cdot}5776698$	$\log\cos\frac{1}{2}(B - C) = 9{\cdot}9664901$
$E.\log\cos\frac{1}{2}A = 0{\cdot}1503621$	$E.\log\sin\frac{1}{2}A = 0{\cdot}1506678$
$\log(b - c) = 3{\cdot}5952282$	$(\log b + c) = 3{\cdot}9843542$
$b - c = 3937{\cdot}569$	$b + c = 9646{\cdot}152$

$$\tfrac{1}{2}(b + c) = 4823{\cdot}076$$
$$\tfrac{1}{2}(b - c) = 1968{\cdot}784$$
$$b = 6791{\cdot}860$$
$$c = 2854.292,$$

welch letztere Werthe jedenfalls sicherer sind.

Eine besondere Erinnerung ist zu §. 25 wohl nicht nöthig, da die erste Auflösung ohnehin als allgemeinere aufgestellt worden. Dasselbe gilt für die §§. 26 und 27, da namentlich für §. 26 eine genügende Auswahl von Formeln stattfindet.

§. 31.

Ein zweiter Punkt, den wir hier besonders noch in's Auge fassen wollen, betrifft die Anwendung der Einführung von Hülfswinkeln, wovon wir in der zweiten Auflösung des §. 25 ein Beispiel gesehen haben. Die Auflösung einer Reihe weiterer Beispiele mag über das dabei einzuhaltende Verfahren, das sich in allgemeine Regeln nicht gut fassen lässt, weitern Aufschluss geben.

1) Man soll $\sqrt[m]{a^n + b^n}$ vermittelst Logarithmen berechnen. Man

bestimme zuerst den spitzen Winkel φ (a^n und b^n positiv vorausgesetzt) so, dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{b^n}{a^n}},$$

so ist

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{b^n}{a^n},\quad b^n = a^n \operatorname{tg}^2\varphi,$$

also

$$\sqrt[m]{(a^n + b^n)} = \sqrt[m]{a^n(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)} = \sqrt[m]{\frac{a^n}{\cos^2\varphi}},$$

also

$$\log \sqrt[m]{a^n + b^n} = \frac{n}{m}\log a - \frac{2}{m}\log\cos\varphi.$$

Für den speziellen Fall $\sqrt{a^2 + b^2}$, ist $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b}{a}$ (wobei a und b als positiv angesehen werden), und man hat

$$\log\sqrt{a^2 + b^2} = \log a - \log\cos\varphi.$$

Hat man $\sqrt[m]{a^n - b^n}$ zu berechnen, so bestimme man den spitzen Winkel φ aus

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{b^n}{a^n}},\quad b^n < a^n,$$

so ist $a^n \sin^2\varphi = b^n$, also

$$\sqrt[m]{a^n - b^n} = \sqrt[m]{a^n(1 - \sin^2\varphi)} = \sqrt[m]{a^n\cos^2\varphi},$$

$$\log\sqrt[m]{a^n - b^n} = \frac{n}{m}\log a + \frac{2}{m}\log\cos\varphi.$$

Sey z. B. zu berechnen $\sqrt[4]{a^3 - b^3}$,

wo man bloss weiss, dass

$$\log a = 3\cdot7812475,\quad \log b = 2\cdot9876547.$$

Zunächst hat man φ zu berechnen. Dazu hat man

$$\log b^3 = 8\cdot9629641$$
$$E.\log a^3 = 8\cdot6562574 - 10$$
$$\overline{17\cdot6192215}$$
$$\log\sin\varphi = 8\cdot8096107$$

$$\begin{array}{lr} & 8\cdot8096107 \\ \log\sin 3^0 41' 50'' & 4515 \\ \hline & 1592 \end{array} \qquad \frac{1592.1\cdot4}{325\cdot7} = 6$$

$$\begin{array}{lr} \log\cos 3^0 41' 50'' = & 9\cdot9990952 \\ & 6 \\ \hline \log\cos\varphi = & 9\cdot9990946 \end{array} \quad (\S.\ 19)$$

$$\begin{array}{lr} \frac{3}{4}\log a = & 2\cdot8359356 \\ \frac{2}{4}\log\cos\varphi = & 9\cdot9995473 \\ \hline & 2\cdot8354829 \end{array}$$

$$\sqrt[4]{a^3 - b^3} = 684\cdot6725.$$

Uebrigens wäre:

$$\frac{a^3}{b^3} = 240\cdot3136,\quad \log\left(\frac{a^3}{b^3} - 1\right) = 2\cdot3789674$$

$$\frac{a^3}{b^3} - 1 = 239\cdot3136,\qquad \begin{array}{r} \log b^3 = 8\cdot9629641 \\ \hline 11\cdot3419315 \end{array}$$

$$\log\sqrt[4]{(a^3 - b^3)} = 2\cdot8354829$$

so dass die direkte Berechnung vielleicht bequemer wäre. Die erste Form ist jedoch sicherlich geschmeidiger, und desshalb auch hier aufgeführt.

2) Man soll

$$x = a[\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma]$$

durch logarithmische Rechnung finden.

Man bestimme den Winkel φ so, dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha\cos\gamma,\ \varphi \text{ zwischen } 0 \text{ und } 180^\circ,$$

also

$$\sin\alpha\cos\gamma = \operatorname{tg}\varphi \,.\, \cos\alpha = \frac{\sin\varphi : \cos\alpha}{\cos\varphi},$$

so ist

$$x = a\left[\cos\alpha\cos\beta + \frac{\sin\varphi \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin\beta}{\cos\varphi}\right]$$

$$= \frac{a\cos\alpha}{\cos\varphi}[\cos\varphi\cos\beta + \sin\varphi\sin\beta] = \frac{a\cos\alpha\cos(\varphi - \beta)}{\cos\varphi}.$$

Durch Einführung zweier Hülfsgrössen kann man x übrigens auch auf eine andere Form bringen. Bestimmt man nämlich r und ψ so, dass

$$r\sin\psi = \cos\alpha,\ r\cos\psi = \sin\alpha\cos\gamma,$$

so ist

$$x = ar[\sin\psi\cos\beta + \sin\beta\cos\psi] = ar\sin(\psi + \beta).$$

Zur Bestimmung von r und ψ hat man:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\cos\gamma},\ r = \frac{\cos\alpha}{\sin\psi},\ \text{oder } r = \frac{\sin\alpha\cos\gamma}{\cos\psi},\ \psi \text{ zwischen } 0 \text{ und } 180^\circ.$$

3) Man soll

$$a\sin\alpha\sin\beta + b\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

logarithmisch berechnen. Man bestimme den Winkel φ (zwischen 0 und 180°) so, dass

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{b}{a}\operatorname{cotg}\alpha\cos\gamma,$$

also

$$b\cos\alpha\cos\gamma = \frac{a\cos\varphi \,.\, \sin\alpha}{\sin\varphi},$$

so ist

$$a\sin\alpha\sin\beta + b\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = a\sin\alpha\sin\beta + \frac{a\cos\varphi\sin\alpha\cos\beta}{\sin\varphi}$$

$$= \frac{a\sin\alpha}{\sin\varphi}[\sin\varphi\sin\beta + \cos\varphi\cos\beta] = \frac{a\sin\alpha\cos(\varphi - \beta)}{\sin\varphi}.$$

4) Man soll $a+b$ oder $a-b$ berechnen, wenn man bloss die Logarithmen von a und b kennt, d. h. also aus log a, log b soll man $\log(a+b)$ oder $\log(a-b)$ suchen, wo $a>b$ und beide Grössen positiv sind.

Man bestimme den Winkel φ so, dass

$$\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{a}{b},\ a=b\operatorname{tg}^2\varphi,$$

so ist

$$\log(a+b)=\log[b(\operatorname{tg}^2\varphi+1)]=\log\frac{b}{\cos^2\varphi}=\log b-2\log\cos\varphi.$$

Man bestimme weiter ψ so, dass

$$\sin^2\psi=\frac{b}{a},\ b=a\sin^2\psi,$$

so ist

$$\log(a-b)=\log[a(1-\sin^2\psi)]=\log a+\log\cos^2\psi$$
$$=\log a+2\log\cos\psi.$$

Die Gaussischen Logarithmentafeln, wie sie zuerst in der „Monatlichen Korrespondenz“ XXVI. Band, S. 498 ff. veröffentlicht wurden, sind bekanntlich zu dem Zwecke konstruirt, aus log a und log b den $\log(a+b)$ und $\log(a-b)$ zu erhalten.

5) Man soll

$$\frac{a\sin\alpha-b\sin\beta}{a\sin\alpha+b\sin\beta}=x$$

zur logarithmischen Rechnung bequemer einrichten.

Man bestimme φ so, dass

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha},\ b\sin\beta=a\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi,$$

so ist

$$x=\frac{a\sin\alpha-a\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi}{a\sin\alpha+a\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi}=\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}=\operatorname{tg}(45^0-\varphi),$$

wenn $\varphi<45^0$; ist $\varphi>45^0$, so ist diese Grösse $=-\operatorname{tg}(\varphi-45^0)$.

Diese Beispiele mögen genügen, da wir ohnehin bei den Anwendungen Gelegenheit haben werden, weitere beizufügen. In vielen Fällen mag die unmittelbare Berechnung wohl eben so schnell zum Ziele führen; namentlich dann aber werden diese Umformungen von wesentlichem Nutzen seyn, wenn man bloss die Logarithmen der vorkommenden Grössen kennt und natürlich also das Aufschlagen der Zahlen zu vermeiden wünscht. Wir wollen nun noch einige Bei-

spiele von Auflösungen sogenannter trigonometrischer Gleichungen anführen, die zugleich zu weiterer Erläuterung des Vorgekommenen dienen werden.

Anmerkung. Einige allgemeine Bemerkungen mögen hier noch beigefügt werden. Will man einen Hülfswinkel φ einführen dadurch, dass man

$$\sin\varphi = A \text{ oder } \cos\varphi = A$$

setzt, wo A eine bekannte Grösse ist, so muss der Werth von A nicht über 1 hinausgehen. Da, wenn A positiv ist, die erste Gleichung zwei zwischen 0 und 180° liegende Werthe von φ gibt (die zusammen 180° ausmachen), so wäre man im Zweifel, welcher zu wählen sey; in diesem Falle muss man sich für den einen oder andern entscheiden — in der Regel wird diess für den kleinern geschehen. Die zweite Gleichung bestimmt den zwischen 0 und 180° liegenden Winkel φ vollkommen; ist $A > 0$, so liegt φ zwischen 0 und 90°, ist dagegen $A < 0$, so liegt φ zwischen 90° und 180°.

Soll dagegen φ aus

$$\operatorname{tg}\varphi = A \text{ oder } \operatorname{cotg}\varphi = A$$

bestimmt werden, und man nimmt φ zwischen 0 und 180°, so kann A einen ganz beliebigen Werth haben. Ist dabei $A > 0$, so liegt φ zwischen 0 und 90°; ist dagegen $A < 0$, so wird man φ zwischen 90° und 180° erhalten. Wollte man φ etwa aus

$$\sin^2\varphi = A, \text{ oder } \cos^2\varphi = A$$

bestimmen, so müsste A positiv und nicht > 1 seyn; φ wäre dann zwischen 0 und 90° enthalten. Sollte dagegen φ aus

$$\operatorname{tg}^2\varphi = A, \text{ oder } \operatorname{cotg}^2\varphi = A$$

bestimmt werden, so müsste A positiv seyn, und man würde φ zwischen 0 und 90° nehmen.

§. 32.

1) Aus der Gleichung

$$a\sin x + b\cos x = c$$

soll x bestimmt werden.

Man bestimme den zwischen 0 und 180° liegenden Winkel φ so, dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a},\ b = \frac{a\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

so ist also

$$a\sin x + \frac{a\sin\varphi\cos x}{\cos\varphi} = c,$$

$$a\sin x\cos\varphi + a\sin\varphi\cos x = c\,.\cos\varphi$$

$$a\sin(x+\varphi) = c\,.\cos\varphi$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c\,.\cos\varphi}{a}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man allerdings $\sin(x+\varphi)$. Schliesst man alle ausserhalb 0 bis 360° liegenden Werthe von x aus, so wird, wenn $\sin(x+\varphi) > 0$, $x+\varphi$ im ersten oder zweiten, wenn $\sin(x+\varphi) < 0$, $x+\varphi$ im dritten oder vierten Quadranten liegen.* Man erhält also immer zwei gleich mögliche Werthe von x. Wäre $\frac{c.\cos\varphi}{a} > 1$, so wäre die Aufgabe unmöglich.

Sey z. B.

$$\log a = 2\cdot8734275,\ \log b = 1\cdot8727342\,(-),\ \log c = 2\cdot2473402.$$

$$\begin{array}{rlrl} \log b &= 1\cdot8727342\,(-) & \log c &= 2\cdot2473402 \\ E.\log a &= 7\cdot1265724 & \log\cos\varphi &= 9\cdot9978462\,(-) \\ \log tg\,\varphi &= 8\cdot9992066\,(-) & E.\log\cos a &= 7\cdot1265724 \\ \varphi &= 174^0\,17'\,54\cdot5'' & \log\sin(x+\varphi) &= 9\cdot3717588\,(-) \\ & & & 13^0\,36'\,49\cdot2'' \end{array}$$

$$x+\varphi = \begin{cases} 193^0\,36'\,49\cdot2'' \\ 346^0\,23'\,10\cdot8'' \end{cases},\quad x = \begin{cases} 19^0\,18'\,54\cdot7'' \\ 172^0\ \ 5'\,16\cdot3'' \end{cases}$$

Die beliebige Zufügung von 360° wäre natürlich gestattet, indem auch $a\sin(x+n.360^0) + b\cos(x+n.360^0) = c$, wenn $a\sin x + b\cos x = c$ ist (§. 9).

Die Gleichung

$$a\cos(x+\alpha) + b\cos(x+\beta) = c$$

kommt auf

$$(a\cos\alpha + b\cos\beta)\cos x - (a\sin\alpha + b\sin\beta)\sin x = c,$$

also auf die obige, zurück. Dasselbe gilt offenbar von den Gleichungen

$$a\sin(x+\alpha) + b\sin(x+\beta) = c,\ a\sin(x+\alpha) + b\cos(x+\beta) = c.$$

2) Aus der Gleichung

$$\cos nx + \cos(n-2)x = \cos x$$

die zwischen 0 und 360° liegenden Werthe von x zu ermitteln.

---

* Ist $\varphi < 90^0$ und $\sin(x+\varphi) > 0$, so liegt, wie gesagt, $x+\varphi$ im ersten oder zweiten Quadranten; dabei könnte es sich aber ereignen, dass der so erhaltene, im ersten Quadranten liegende Werth von $x+\varphi$ kleiner als φ wäre; alsdann wäre x negativ. Wollte man den negativen Werth von x vermeiden, so braucht man ihm bloss 360° zuzuzählen.

Ist $\varphi > 90^0$ und $\sin(x+\varphi) > 0$, so wird der eben erwähnte Fall eines negativen x sicherlich für $x+\varphi < 90^0$ eintreten; er kann aber auch für $x+\varphi > 90^0$ eintreten. Will man die negativen Winkel vermeiden, so wird man sich natürlich wie so eben helfen.

Man hat (§. 14):

$$\cos nx + \cos(n-2)x = 2\cos(n-1)x\cos x,$$

demnach ist obige Gleichung

$$\cos x = 2\cos(n-1)x \, . \cos x,$$

und ihr wird Genüge geleistet, wenn

$$\cos x = 0, \text{ oder } 2\cos(n-1)x = 1, \cos(n-1)x = \tfrac{1}{2}.$$

Die erste dieser zwei Gleichungen verlangt (§. 9), dass $x = 90^0$ oder 270^0; die zweite dagegen, dass (n als positive ganze Zahl vorausgesetzt):

$$(n-1)x = 60^0, 300^0, 420^0, 660^0, \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots, (n-2)360^0 + 60^0, (n-2)360^0 + 300^0,$$

woraus die Werthe von x folgen. (Ausser den zwei ersten, für welche $\cos(n-1)x = \frac{1}{2}$, erhält man die übrigen durch Zufügen von 360^0, 2.360^0 u. s. w.. Bis zu $(n-1)\,360^0 + 60^0$ wird man nicht gehen, da sonst $x > 360^0$ wäre. Vergl. §. 19, S. 56.)

3) Die Gleichung $a\sin x = b\,tg\,x$

gibt, wenn man nach §. 12 setzt:

$$\sin x = \pm \frac{tg\,x}{\sqrt{1+tg^2x}}, \quad \pm \frac{a\,tg\,x}{\sqrt{1+tg^2x}} = b\,tg\,x,$$

woraus durch Quadrirung:

$$\frac{a^2tg^2x}{1+tg^2x} = b^2tg^2x, \quad a^2tg^2x = b^2tg^2x(1+tg^2x).$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$tg\,x = 0 \text{ oder } a^2 = b^2(1+tg^2x).$$

Die erste Gleichung verlangt, dass $x = 0$ oder 180^0 (wenn man x zwischen 0 und 360^0 nimmt); die zweite dagegen gibt

$$tg\,x = \pm\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b}}, \quad \cos x = \pm\frac{b}{a},$$

woraus freilich vier Werthe von x folgen, die in den vier Quadranten liegen, wobei jedoch $a^2 > b^2$ seyn muss. Alle vier Werthe werden indessen nicht zulässig seyn, da, wenn a und b von demselben Zeichen sind, auch $tg\,x$ und $\sin x$ es seyn müssen, und wenn a und b verschiedenes Zeichen haben, eben so $tg\,x$ und $\sin x$ von verschiedenem Zeichen sind. *

---

* Die vorgelegte Gleichung ist übrigens auch $a\cos x = b$, $\cos x = \frac{b}{a}$.

Sey a = 5, b = 1, also

$$\text{tg}\,x = 5\sin x,$$

so ist, nach letzterer Gleichung:

$$\text{tg}\,x = \pm\sqrt{24}.$$

$$\log\text{tg}\,x = \tfrac{1}{2}\log(24)(\pm) = 10\text{·}6901056(\pm).$$

$$\text{Winkel} = 78^0\,27'\,46\text{·}9''$$

also hat x die vier Werthe (nebst 0⁰ und 180⁰):

$78^0\,27'\,46\text{·}9''$, $258^0\,27'\,46\text{·}9''$, $101^0\,32'\,13\text{·}1''$, $281^0\,32'\,13\text{·}1''$,

von denen für die ersten zwei $\text{tg}\,x = +\sqrt{24}$, für die andern zwei $\text{tg}\,x = -\sqrt{24}$. Von diesen genügen der erste und letzte der vorgelegten Gleichung; die zwei andern der Gleichung $\text{tg}\,x = -5\sin x$.

Durch beliebiges Zufügen von 360⁰ erhielte man alle beliebigen Winkel, welche der vorgelegten Gleichung genügen; wollte man negative Winkel zulassen, so würde man sie durch beliebiges Abziehen von 360⁰ erhalten, oder auch dadurch, dass man obige Werthe nur negativ nehmen würde, da auch $\text{tg}(-x) = 5\sin(-x)$, wenn $\text{tg}(+x) = 5\sin(+x)$ (§. 13).

4) Man soll aus den zwei Gleichungen

$$x\sin(\alpha - z) = a,\; x\sin(\beta - z) = b$$

die Werthe von x und z bestimmen, wenn α, β, a, b bekannt sind.

Die Addition dieser zwei Gleichungen gibt:

$$x[\sin(\alpha - z) + \sin(\beta - z)] = a + b,$$

d. h. $$2x\sin[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - z]\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = a + b.\;\;(\text{§. }14.)$$

Eben so die Subtraktion:

$$x[\sin(\alpha - z) - \sin(\beta - z)] = a - b,$$

d. h. $$2x\cos[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - z]\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = a - b.$$

Dividirt man beide Gleichungen, so hat man:

$$\text{tg}[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - z]\,\text{cotg}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a+b}{a-b},$$

$$\text{tg}[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - z] = \frac{a+b}{a-b}\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

worin, wenn $\alpha-\beta$ negativ seyn sollte, $\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$ durch $-\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)$ zu ersetzen ist (§. 13). Setzt man noch

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{b}{a},\; b = a\,\text{tg}\,\varphi,\; \frac{a+b}{a-b} = \frac{1+\text{tg}\,\varphi}{1-\text{tg}\,\varphi} = \text{tg}(\varphi + 45^0)\;\;(\text{§. }8),$$

so ist $$\text{tg}[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - z] = \text{tg}(\varphi + 45^0)\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich $\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - z$ (immer mit zwei

Werthen, die um 180° verschieden sind), also auch z. Kennt man nun z, so findet man x aus den Gleichungen

$$x = \frac{a}{\sin(\alpha - z)} = \frac{b}{\sin(\beta - z)},$$

oder auch

$$x = \frac{a+b}{2\sin[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-z]\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{a-b}{2\cos[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-z]\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Wären bloss die Logarithmen von a und b gegeben, so würde man natürlich die erstern Gleichungen bequemer anwenden.

Die Gleichungen

$$x\cos(\alpha - y) = a, \quad x\cos(\beta - y) = b$$

kommen auf die frühern zurück, wenn man setzt:

$$y = z - 90^0.$$

Als Beispiel wollen wir $\alpha = 180^0$, $\beta = 90^0$ voraussetzen, also die Gleichungen

$$x\sin z = a, \quad x\cos z = b$$

uns vorlegen. Dann sey

$$\log a = 0{\cdot}1727600(-), \quad \log b = 0{\cdot}3531154(-),$$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = 135^0, \quad \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = 45^0;$$

$$\begin{aligned}
\log b &= 0{\cdot}3531154(-)\\
\text{E}.\log a &= 9{\cdot}8272399(-)\\
\hline
\log tg\,\varphi &= 10{\cdot}1803553, \; \varphi = 56^0 34' 8{\cdot}6'', \; \varphi + 45^0 = 101^0 34' 8{\cdot}6''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log tg(\varphi+45^0) &= 10{\cdot}6888658(-)\\
\log tg\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= 10{\cdot}0000000\\
\hline
\log tg[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-z] &= 10{\cdot}6888658(-)\\
& \; 101^0 34' 8{\cdot}6''
\end{aligned}
\qquad
135^0 - z = \begin{cases} 101^0 34' 8{\cdot}6'' \\ 281^0 34' 8{\cdot}6'' \end{cases}
\qquad
z = \begin{cases} 33^0 25' 51{\cdot}4'' \\ -146^0 34' \; 8{\cdot}6'' \end{cases}$$

Will man den negativen Winkel nicht annehmen, so addire man 360° und erhält $z = 213^0 25' 51{\cdot}3''$.* Da a und b negativ sind, so wird x negativ seyn, wenn man den ersten Werth von z, positiv wenn man den zweiten wählt. Man hat im letzten Falle:

* Diese Zufügung von 360° zu z ist hier offenbar gestattet, da in den ursprünglichen Gleichungen eine solche erlaubt ist. Ist nämlich

$$x\sin(\alpha - z) = a, \quad x\sin(\beta - z) = b,$$

so ist auch

$$x\sin[\alpha - (z + 360^0)] = a, \quad x\sin[\beta - (z + 360^0)] = b,$$

gemäss §. 9. Bevor man jedoch eine solche Zufügung vornimmt, muss man sich immerhin überzeugen, ob sie auch geradezu gestattet ist, was immer sehr leicht ist.

$$\log a = 0{\cdot}1727600\,(-)$$
$$\text{E}.\log\sin(\alpha - z) = 0{\cdot}2589023\,(-)$$
$$\log x = 0{\cdot}4316623$$
$$x = 2{\cdot}70185 \text{ (im ersten Falle } x = -2{\cdot}70185).$$

Uebrigens hätte man in diesem Beispiele auch direkt:

$$\operatorname{cotg} z = \frac{b}{a},\ x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}.$$

5) Aus den Gleichungen

$$\sin x = a \sin y,\ 2 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} y$$

sollen x und y bestimmt werden.

Man hat zuerst hieraus durch Division

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2} y}{a \sin y},$$

d. h.
$$\frac{2}{\cos x} = \frac{\sin\frac{1}{2} y}{2 a \sin\frac{1}{2} y \cos\frac{1}{2} y \cdot \cos\frac{1}{2} y} = \frac{1}{2 a \cos^2\frac{1}{2} y},$$
$$\cos x = 4 a \cos^2\tfrac{1}{2} y = 2 a (1 + \cos y)\ \ (\S.\ 14).$$

Da aber $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, so ist also $\cos^2 x + a^2 \sin^2 y = 1$,

d. h.
$$a^2 \sin^2 y + 4 a^2 (1 + \cos y)^2 = 1,$$
oder
$$a^2 - a^2 \cos^2 y + 4 a^2 + 8 a^2 \cos y + 4 a^2 \cos^2 y = 1,$$
$$3 a^2 \cos^2 y + 8 a^2 \cos y = 1 - 5 a^2$$
$$\cos^2 y + \tfrac{8}{3} \cos y = \frac{1}{3 a^2} - \tfrac{5}{3},$$
$$\cos y = -\tfrac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{3 a^2} + \tfrac{1}{9}}.$$

Setzt man nun

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{3}{a^2},\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{a},\ \frac{1}{3 a^2} = \tfrac{1}{9} \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

so ist

$$\cos y = -\tfrac{4}{3} \pm \tfrac{1}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1} = -\tfrac{4}{3} \pm \frac{1}{3 \cos \varphi},$$
$$1 + \cos y = -\tfrac{1}{3} \pm \frac{1}{3 \cos \varphi} = -\tfrac{1}{3}\left[1 \mp \frac{1}{\cos \varphi}\right] = -\tfrac{1}{3} \cdot \frac{\cos \varphi \mp 1}{\cos \varphi}.$$

Aber (§. 14)

$$\frac{\cos \varphi - 1}{\cos \varphi} = -\left(\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}\right) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{2 \sin^2\frac{1}{2} \varphi}{2 \sin\frac{1}{2} \varphi \cos\frac{1}{2} \varphi} \operatorname{tg} \varphi =$$
$$- \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} \varphi \operatorname{tg} \varphi,$$
$$\frac{\cos \varphi + 1}{\cos \varphi} = \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi}\right) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{2 \cos^2\frac{1}{2} \varphi}{2 \sin\frac{1}{2} \varphi \cos\frac{1}{2} \varphi} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2} \varphi \operatorname{tg} \varphi,$$

mithin

$$1+\cos y=\begin{cases}\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\operatorname{tg}\varphi\\ -\frac{1}{3}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi\operatorname{tg}\varphi.\end{cases}$$

Daraus ergibt sich zur Lösung unserer Aufgabe das folgende Gleichungssystem (da $2a(1+\cos y)=\cos x$):

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{a},\quad \cos x=\begin{cases}\frac{2a}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\operatorname{tg}\varphi, & \operatorname{tg}\frac{1}{2}y=2\operatorname{tg}x.\\ -\frac{2a}{3}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi\operatorname{tg}\varphi\end{cases}$$

Sey z. B. $\log a=0\cdot8593277-1$, so hat man die nachstehende Rechnung:

$\frac{1}{2}\log 3=$	$0\cdot2385606$	$\log 2=$	$0\cdot3010300$
$E.\log a=$	$9\cdot1406722+1$	$\log a=$	$0\cdot8593277-1$
$\log\operatorname{tg}\varphi=$	$10\cdot3792328$	$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi=$	$9\cdot8235321$
$\varphi=$	$67^\circ 20' 3\cdot37''$	$\log\operatorname{tg}\varphi=$	$10\cdot3792328$
$\frac{1}{2}\varphi=$	$33^\circ 40' 1\cdot68''$	$E.\log 3=$	$9\cdot5228786$
		$\log\cos x=$	$9\cdot8860012$
		$x=$	$39^\circ 43' 26\cdot18''$

$$\begin{aligned}\log 2&=0\cdot3010300\\ \log\operatorname{tg}x&=9\cdot9195602\\ \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}y&=10\cdot2205902\\ \tfrac{1}{2}y&=58^\circ 57' 46\cdot58''\\ y&=117^\circ 55' 33\cdot16''.\end{aligned}$$

Wir haben hiebei nur den einen Werth von $\cos x$ benützt, und x bloss $=39^\circ 43' 26\cdot18''$ gesetzt, während auch

$$x=360^\circ-39^\circ 43' 26\cdot18''$$

seyn könnte. (Die hier behandelte Aufgabe kommt in der Astronomie vor. Vergl. Grunert's Archiv XX, S. 295.)

§. 33.

Bereits früher haben wir Gelegenheit gehabt, Bögen, welche Winkel umspannen, zu betrachten; wir haben dort den Halbmesser willkürlich gelassen. Oft ist es jedoch bequemer, denselben $=1$ zu setzen, da dadurch der Bogen leicht auszudrücken ist. Beschreibt man nämlich zwischen den Seiten eines Winkels x mit einem Halbmesser $=1$ einen Bogen, so ist dessen Länge:

wenn x in Graden gegeben ist,

$$\text{gleich } \frac{\pi x}{180},\ \log\frac{\pi}{180} = 8{\cdot}2418773674 - 10,$$

wenn x in Minuten gegeben ist,

$$\text{gleich } \frac{\pi x}{180 . 60},\ \log\frac{\pi}{180 . 60} = 6{\cdot}4637261170 - 10,$$

wenn x in Sekunden gegeben ist,

$$\text{gleich } \frac{\pi x}{180 . 60 . 60},\ \log\frac{\pi}{180 . 60 . 60} = 4{\cdot}6855748666 - 10.$$

Wir wollen die Bezeichnung so wählen, dass wir schreiben arc x und darunter denjenigen Bogen (arcus) verstehen, der zwischen den Seiten des Winkels x mit einem Halbmesser = 1 beschrieben ist.

1) Wir wollen nun annehmen, man lege uns die Gleichung

$$\text{arc } x = 2 \sin x$$

zur Auflösung vor. Es tritt diese Frage dann auf, wenn man in einem Kreis diejenige Sehne sucht, welche den zu ihr gehörigen Kreisausschnitt halbirt. Ist nämlich x der Mittelpunktswinkel, r der Halbmesser, so ist r . arc x die Länge des Bogens, also $\frac{r^2}{2}$ arc x die Fläche des Ausschnitts; die Fläche des von der Sehne und beiden Halbmessern gebildeten Dreiecks ist $\frac{r^2}{2} \sin x$, also muss

$$\frac{r^2}{2} \text{arc } x = r^2 \sin x,\ \text{arc } x = 2 \sin x$$

seyn.

Um diese Gleichung zu lösen, verfährt man in folgender Weise:

Gesetzt man kenne zwei nur wenig von einander verschiedene Winkel α und β ($\beta > \alpha$) so beschaffen, dass

$$\text{arc } \alpha - 2 \sin \alpha \text{ und arc } \beta - 2 \sin \beta$$

von verschiedenen Zeichen sind, so wird der gesuchte Werth von x nothwendig zwischen α und β liegen. *

---

* Sey z. B. die Grösse arc α — 2 sin α negativ, arc β — 2 sin β positiv; ferner wird, da arc x sowohl als 2 sin x sich mit x nur allmälig ändern, die Grösse arc x — 2 sin x auch sich mit x nur allmälig ändern. Da nun für $x = \alpha$ diese Grösse negativ für $x = \beta$ ($> \alpha$) aber positiv ist, so wird sie, wenn man x von α bis β allmälig wachsen lässt, einmal durch Null gehen, d. h. es wird einen Werth von x zwischen α und β geben, für den arc x — 2 sin x = 0, also arc x = 2 sin x ist. Gerade diesen aber suchen wir.

Man wird also setzen können

$$x = \alpha + u,$$

wo die Grösse u klein im Verhältniss zu α ist (also z. B. nur wenige Minuten oder Sekunden beträgt).

Der Annahme nach hat man also:

$$\operatorname{arc}(\alpha + u) - 2\sin(\alpha + u) = 0.$$

Ferner ist offenbar

$$\operatorname{arc}(\alpha + u) = \operatorname{arc}\alpha + \operatorname{arc}u, \quad \sin(\alpha + u) = \sin\alpha + \operatorname{arc}u\cos\alpha,$$

wenn man $\cos u = 1$, $\sin u = \operatorname{arc} u$ setzt (§. 15), was man beiläufig darf. Demnach ist

$$\operatorname{arc}\alpha + \operatorname{arc}u - 2\sin\alpha - 2\operatorname{arc}u\cos\alpha = 0$$

$$\operatorname{arc}u\,[1 - 2\cos\alpha] = 2\sin\alpha - \operatorname{arc}\alpha$$

$$\operatorname{arc}u = \frac{2\sin\alpha - \operatorname{arc}\alpha}{1 - 2\cos\alpha}$$

aus welcher Gleichung beiläufig arc u, also auch u gefunden wird. Ob nun der wahre Werth zwischen α und $\alpha + u$, oder $\alpha + u$ und β liege, entscheidet sich durch die Zeichen von

$$\operatorname{arc}\alpha - 2\sin\alpha, \quad \operatorname{arc}(\alpha + u) - 2\sin(\alpha + u), \quad \operatorname{arc}\beta - 2\sin\beta;$$

sind die zwei ersten Grössen von demselben Zeichen, so wird x zwischen $\alpha + u$ und β liegen; sind sie von entgegengesetztem Zeichen, zwischen α und $\alpha + u$, immer unter der Voraussetzung, dass $\alpha + u < \beta$. Man hat jetzt zwei nähere Gränzen von x, mit denen man in derselben Weise verfährt. Es gibt noch eine andere Art der Auflösung, die wir sogleich aus einander setzen wollen, nachdem wir obiges Beispiel nach der angegebenen Weise gelöst haben.

Von diesem Werthe an wird arc x natürlich immer wachsen, da ja arc x überhaupt wächst mit wachsendem x; da diess bei 2 sin x nicht der Fall ist, so wird also nicht mehr $\operatorname{arc} x = 2\sin x$ werden können, so dass es nur einen einzigen Werth von x gibt, der unserer Gleichung genügt. Wir setzen freilich dabei x nur positiv voraus. Würden wir auch negative Werthe zulassen, so gäbe es noch einen zweiten Werth, der, dem ersten gleich, aber negativ wäre.

Uebrigens ist auch für $x = 0$: $\operatorname{arc} x = 2\sin x$; diesen Werth aber wollen wir nicht weiter beachten.

Unsere Auflösung setzt voraus, dass man zum voraus zwei Gränzen kenne, zwischen denen x liegt. Diese selbst hat man durch Probiren zu finden, was keineswegs sehr schwer ist. Man hat zu dem Ende ja bloss die zwei (z. B. um 1^0 verschiedenen) Werthe α und β zu suchen, so beschaffen, dass

$$2\sin\alpha > \operatorname{arc}\alpha, \quad 2\sin\beta < \operatorname{arc}\beta$$

ist.

Man findet für $\alpha = 108^\circ$, $\beta = 109^\circ$, wenn man die Tafeln für die zum Halbmesser 1 gehörigen Bögen benützt:

$$\begin{array}{rl} \text{arc}\,100^\circ = & 1{\cdot}74532 \\ \text{arc}\quad 8^\circ = & 0{\cdot}13962 \\ \hline \text{arc}\,108^\circ = & 1{\cdot}88494 \\ \log 2 = & 0{\cdot}30103 \\ \log\sin 108^\circ = & 9{\cdot}97821 \\ \hline & 0{\cdot}27924 \\ 2\sin 108^\circ = & 1{\cdot}9021, \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{arc}\,100^\circ = & 1{\cdot}74533 \\ \text{arc}\quad 9^\circ = & 0{\cdot}15708 \\ \hline \text{arc}\,109^\circ = & 1{\cdot}90241 \\ \log 2 = & 0{\cdot}30103 \\ \log\sin 109^\circ = & 9{\cdot}97567 \\ \hline & 0{\cdot}27670 \\ 2\sin 109^\circ = & 1{\cdot}891 \end{array}$$

also $\text{arc}\,108^\circ - 2\sin 108^\circ < 0$, $\text{arc}\,109^\circ - 2\sin 109^\circ > 0$, d. h. x zwischen 108° und 109°. Mithin:

$$\text{arc}\,u = \frac{2\sin 108^\circ - \text{arc}\,108^\circ}{1 - 2\cos 108^\circ}.$$

$$\begin{array}{rl} \log 2 = & 0{\cdot}30103 \\ \log\cos 108^\circ = & 9{\cdot}48998(-) \\ \hline & 9{\cdot}79101(-) \\ 2\cos 108^\circ = & -0{\cdot}61803 \\ 1-2\cos 108^\circ = & 1{\cdot}61803. \\ 2\sin 108^\circ - \text{arc}\,108^\circ = & 0{\cdot}0172 \end{array} \qquad \text{arc}\,u = \frac{0{\cdot}0172}{1{\cdot}6180} = 0{\cdot}0106,$$

u zwischen $36'$ und $37'$, also ungefähr $x = 108^\circ 36'$, so dass man vermuthet, es liege x zwischen $108^\circ 36'$ und $108^\circ 37'$.

Es ist nunmehr:

$$\begin{array}{rl} \text{arc}\,100^\circ = & 1{\cdot}7453292 \\ \text{arc}\quad 8^\circ = & 0{\cdot}1396263 \\ \text{arc}\quad 36' = & 0{\cdot}0104720 \\ \hline \text{arc}\,108^\circ 36' = & 1{\cdot}8954275 \\ \log 2 = & 0{\cdot}3010300 \\ \log\sin 108^\circ 36' = & 9{\cdot}9767022 \\ \hline & 0{\cdot}2777322 \\ 2\sin 108^\circ 36' = & 1{\cdot}895536 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{arc}\,100^\circ = & 1{\cdot}7453292 \\ \text{arc}\quad 8^\circ = & 0{\cdot}1396263 \\ \text{arc}\quad 37' = & 0{\cdot}0107629 \\ \hline \text{arc}\,108^\circ 37' = & 1{\cdot}8957184 \\ \log 2 = & 0{\cdot}3010300 \\ \log\sin 108^\circ 37' = & 9{\cdot}9766597 \\ \hline & 0{\cdot}2776897 \\ 2\sin 108^\circ 37' = & 1{\cdot}89535 \end{array}$$

Da somit

$$\text{arc}\,180^\circ 36' - 2\sin 108^\circ 36' < 0,\quad \text{arc}\,108^\circ 37' - 2\sin 108^\circ 37' > 0,$$

so liegt x zwischen $108^\circ 36'$ und $108^\circ 37'$. Man setzt also jetzt $\alpha = 108^\circ 36'$ und hat:

$$\begin{array}{rl} \log\cos\alpha = & 9{\cdot}5037353\,(-) \\ \log 2 = & 0{\cdot}3010300 \\ \hline & 9{\cdot}8047653\,(-) \end{array}$$

$$2\cos\alpha = -0{\cdot}6379187,\quad 1 - 2\cos\alpha = 1{\cdot}6379187,$$

$$\text{arc}\,u = \frac{1{\cdot}895536 - 1{\cdot}895427}{1{\cdot}6379187} = \frac{0{\cdot}000109}{1{\cdot}6379},$$

also wenn man u in Sekunden hiernach logarithmisch berechnet (vergleiche die Note zu §. 30):

$$\begin{array}{r} \log \operatorname{arc} u'' = 0.82315-5 \\ 5\cdot31442 \\ \hline 1\cdot13757 \\ u = 13\cdot72''. \end{array}$$

Also beiläufig $x = 108^\circ 36' 13''$. Man hat $108^\circ 36' 13'' = 390973''$, mithin wenn man arc $108^\circ\ 36'\ 13''$ logarithmisch berechnen will (Note zu §. 30):

$$\begin{array}{rlrl} \log 390973 = & 5\cdot5921468 & \log 2 = & 0\cdot3010300 \\ & 4\cdot6855749 & \log\sin 108^\circ 36' 13'' = & 9\cdot9766930 \\ \hline \log\operatorname{arc} 390973'' = & 0\cdot2777217 & \log 2\sin 108^\circ 36' 13'' = & 0\cdot2777230 \end{array}$$

$$\begin{array}{rlrl} \log 390974 = & 5\cdot5921479 & \log 2 = & 0\cdot3010300 \\ & 4\cdot6855749 & \log\sin 108^\circ 36' 14'' = & 9\cdot9766923 \\ \hline \log\operatorname{arc} 390974'' = & 0\cdot2777228 & \log 2\sin 108^\circ 36' 14'' = & 0\cdot2777223 \end{array}$$

also
$$\operatorname{arc} 108^\circ 36' 13'' - 2\sin 108^\circ 36' 13'' < 0,$$
$$\operatorname{arc} 108^\circ 36' 14'' - 2\sin 108^\circ 36' 14'' > 0,$$
d. h. der gesuchte Winkel x liegt zwischen
$$108^\circ 36' 13'' \text{ und } 108^\circ 36' 14''.$$

Wir haben oben gesagt, dass es noch eine zweite Methode gebe, nach welcher man Gleichungen dieser Art lösen kann, und es ist von Interesse, dieselbe ebenfalls darzustellen.

Da man
$$\operatorname{arc} x = 2\sin x,$$
also auch
$$\log\operatorname{arc} x = \log(2\sin x)$$
haben soll, so wird man wieder wie vorhin zuerst zwei wenig verschiedene Werthe α und β suchen, für welche die Grössen
$$\log\operatorname{arc}\alpha - \log(2\sin\alpha),\ \log\operatorname{arc}\beta - \log(2\sin\beta)$$
von entgegengesetztem Zeichen sind. Der wahre Werth x liegt dann zwischen α und β, so dass man
$$x = \alpha + u$$
wird setzen können. Da $\alpha + u$ nicht viel verschieden ist von α, β dessgleichen, so hat man nach §. 15:
$$\log 2\sin(\alpha+u) - \log 2\sin\alpha : \log 2\sin\beta - \log 2\sin\alpha = u : \beta - \alpha,$$
$$\log\operatorname{arc}(\alpha+u) - \log\operatorname{arc}\alpha : \log\operatorname{arc}\beta - \log\operatorname{arc}\alpha = u : \beta - \alpha,$$
woraus leicht folgt, wenn man die ersten Seiten beider Proportionen subtrahirt:

$\log 2 \sin(\alpha + u) - \log \operatorname{arc}(\alpha + u) - \log 2 \sin \alpha + \log \operatorname{arc} \alpha :$

$\log 2 \sin \beta - \log \operatorname{arc} \beta - \log 2 \sin \alpha + \log \operatorname{arc} \alpha = u : \beta - \alpha,$

und da $\log 2 \sin(\alpha + u) = \log \operatorname{arc}(\alpha + u)$, so ist also $\log \operatorname{arc} \alpha - \log 2 \sin \alpha : \log 2 \sin \beta - \log \operatorname{arc} \beta - [\log 2 \sin \alpha - \log \operatorname{arc} \alpha] = u : \beta - \alpha,$

$$u = (\beta - \alpha) \cdot \frac{\log \operatorname{arc} \alpha - \log 2 \sin \alpha}{\log 2 \sin \beta - \log \operatorname{arc} \beta - [\log 2 \sin \alpha - \log \operatorname{arc} \alpha]}.$$

Im obigen Beispiele ist $\alpha = 108^\circ$, $\beta = 109^\circ$, $\beta - \alpha = 60'$, $\log \operatorname{arc} 108^\circ - \log 2 \sin 108^\circ = -0{\cdot}00395$, $\log 2 \sin \beta - \log \operatorname{arc} \beta = -0{\cdot}00260$, also

$$u' = 60 \cdot \frac{-0{\cdot}00395}{-0{\cdot}00260 - 0{\cdot}00395} = 60 \cdot \frac{395}{655} = 36'.$$

Weiter $\alpha = 108^\circ 36' = 6516'$;

$\log \operatorname{arc} 108^\circ 36' = 0{\cdot}2777072$, $\log 2 \sin 108^\circ 36' = 0{\cdot}2777322$,

$\beta = 108^\circ 37' = 6517'$, $\beta - \alpha = 60''$;

$\log \operatorname{arc} 108^\circ 37' = 0{\cdot}2777738$, $\log 2 \sin 108^\circ 37' = 0{\cdot}2776897$,

$$u'' = 60 \cdot \frac{-250}{-841 - 250} = 60 \cdot \frac{250}{1091} = 13'',$$

also $x = 108^\circ 36' 13''$ wie oben.

2) Sey vorgelegt:

$$\operatorname{arc} x = \tfrac{1}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{4}\pi,$$

welche Gleichung wir ebenfalls nach beiden Methoden lösen wollen. *

Zunächst hat man wieder zwei Werthe von x, α und β, zu suchen, für welche

$$\operatorname{arc} \alpha - \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha - \tfrac{1}{4}\pi, \quad \operatorname{arc} \beta - \tfrac{1}{2} \sin \beta - \tfrac{1}{4}\pi$$

von verschiedenen Zeichen sind. Alsdann setzt man

$$x = \alpha + u,$$

sodann $\cos u = 1$, $\sin u = \operatorname{arc} u$, $\sin 2u = 2 \operatorname{arc} u$,

---

* Man findet diese Gleichung, wenn man einen Viertelskreis durch eine Senkrechte auf einen der zwei begränzenden Halbmesser halbiren will. Würde etwa in der Figur 13 man sich einen senkrechten Halbmesser auf CG in C denken und es sollte AFG gleich $= \frac{1}{8}$ der Kreisfläche seyn, so wäre GCA = x und also

Ausschnitt $GAC = \frac{r^2 \operatorname{arc} x}{2}$, $AFC = \frac{r^2 \sin x \cos x}{2} = \frac{r^2 \sin 2x}{4}$,

d. h. mithin: $\frac{r^2 \operatorname{arc} x}{2} - \frac{r^2 \sin 2x}{4} = \frac{r^2 \pi}{8}$, $\operatorname{arc} x - \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\pi}{4}$,

oder

$$\operatorname{arc} x = \tfrac{1}{2} \sin 2x + \frac{\pi}{4}.$$

und hat: $\operatorname{arc}(\alpha + u) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha + 2u) + \frac{1}{4}\pi$,

d. h. $\operatorname{arc}\alpha + \operatorname{arc}u = \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \operatorname{arc}u \,.\, \cos 2\alpha + \frac{1}{4}\pi$

$$\operatorname{arc}u = \frac{\operatorname{arc}\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha - \frac{1}{4}\pi}{\cos 2\alpha - 1} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{4}\pi - \operatorname{arc}\alpha}{1 - \cos 2\alpha},$$

nach welcher Formel arc u erhalten wird, und u sodann leicht gefunden werden kann.

Der ganze Rechnungsmechanismus ist nun der folgende, wobei wir wieder Tafeln von arc α benützen wollen.

$$\operatorname{arc}66^0 = 1{\cdot}1519173$$
$$\operatorname{arc}67^0 = 1{\cdot}1693705$$

$\log\sin 132^0 = 9{\cdot}8710735$	$\log\sin 134^0 = 9{\cdot}8569341$
$E.\log 2 = 9{\cdot}6989699$	$E.\log 2 = 9{\cdot}6989699$
$0{\cdot}5700434 - 1$	$0{\cdot}5559040 - 1$
$\frac{1}{2}\sin 132^0 = 0{\cdot}3715724$	$\frac{1}{2}\sin 134^0 = 0{\cdot}35967$
$\frac{1}{4}\pi = 0{\cdot}7853982$	$\frac{1}{4}\pi = 0{\cdot}78539$
$1{\cdot}1569706$	$1{\cdot}14506$

$$\operatorname{arc}66^0 < \tfrac{1}{2}\sin 132^0 + \tfrac{1}{4}\pi,\ \operatorname{arc}67^0 > \tfrac{1}{2}\sin 134^0 + \tfrac{1}{4}\pi,$$
$$\alpha = 66^0,\ \beta = 67^0.$$
$$\cos 132^0 = -0{\cdot}6691306,\ 1 - \cos 132^0 = 1{\cdot}6691306$$
$$\operatorname{arc}u = \frac{1{\cdot}1569706 - 1{\cdot}1519173}{1{\cdot}6691306} = \frac{50533}{16691306} = 0{\cdot}00302,$$

u zwischen 10′ und 11′.

$\operatorname{arc}66^0 = 1{\cdot}1519173$	$\operatorname{arc}66^0 = 1{\cdot}1519173$
$\operatorname{arc}10' = 0{\cdot}0029089$	$\operatorname{arc}11' = 0{\cdot}0031998$
$\operatorname{arc}66^0\,10' = 1{\cdot}1548262$	$\operatorname{arc}66^0\,11' = 1{\cdot}1551171$
$\log\sin 132^0\,20' = 9{\cdot}8687851$	$\log\sin 132^0\,22' = 9{\cdot}8685548$
$E.\log 2 = 9{\cdot}6989699$	$E.\log 2 = 9{\cdot}6989699$
$0{\cdot}5677550 - 1$	$0{\cdot}5675247 - 1$
$\frac{1}{2}\sin 132^0\,20' = 0{\cdot}3696196$	$\frac{1}{2}\sin 132^0\,22' = 0{\cdot}36942$
$\frac{1}{4}\pi = 0{\cdot}7853982$	$\frac{1}{4}\pi = 0{\cdot}78539$
$1{\cdot}1550178$	$1{\cdot}15482$

$$\alpha = 66^0\,10',\ \beta = 66^0\,11'.$$
$$\cos 132^0\,22' = -0{\cdot}6738726,\ 1 - \cos 2\alpha = 1{\cdot}6738726,$$
$$\operatorname{arc}u = \frac{1{\cdot}1550178 - 1{\cdot}1548262}{1{\cdot}6738726} = 0{\cdot}0001145,$$

u zwischen 23″ und 24″; also $x = 66^0\,10'\,23''$, auf Sekunden genau.

Nach der zweiten Methode muss

$$\log[\operatorname{arc} x - \tfrac{1}{4}\pi] = \log \tfrac{1}{2} \sin 2x$$

seyn. Demnach:

$$\log \tfrac{1}{2} \sin(2\alpha + 2u) - \log \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha : \log \tfrac{1}{2} \sin 2\beta - \log \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha = u : \beta - \alpha,$$

$$\log[\operatorname{arc}(\alpha + u) - \tfrac{1}{4}\pi] - \log(\operatorname{arc}\alpha - \tfrac{1}{4}\pi) : \log[\operatorname{arc}\beta - \tfrac{1}{4}\pi] - \log[\operatorname{arc}\alpha - \tfrac{1}{4}\pi] = u : \beta - \alpha,$$

woraus dann, da $\log[\operatorname{arc}(\alpha + u) - \tfrac{1}{4}\pi] = \log \tfrac{1}{2} \sin(2\alpha + 2u)$:

$$\log[\operatorname{arc}\alpha - \tfrac{1}{4}\pi] - \log \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha : \log \tfrac{1}{2} \sin 2\beta - \log[\operatorname{arc}\beta - \tfrac{1}{4}\pi] - \{\log \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha - \log[\operatorname{arc}\alpha - \tfrac{1}{4}\pi]\} = u : \beta - \alpha$$

$$u = (\beta - \alpha) \cdot \frac{\log[\operatorname{arc}\alpha - \tfrac{1}{4}\pi] - \log \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha}{\log \tfrac{1}{2} \sin 2\beta - \log[\operatorname{arc}\beta - \tfrac{1}{4}\pi] - \{\log \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha - \log[\operatorname{arc}\alpha - \tfrac{1}{4}\pi)\}}$$

$$\alpha = 66^0,\ \beta = 67^0,\ \beta - \alpha = 60'.$$

$$\log[\operatorname{arc} 66^0 - \tfrac{1}{4}\pi] = \log 0{\cdot}3665191 = 0{\cdot}5640966 - 1$$

$$\log \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha = 0{\cdot}5700434 - 1$$

$$-\,0{\cdot}0059468$$

$$\log[\operatorname{arc} 67^0 - \tfrac{1}{4}\pi] = \log 0{\cdot}3839724 = 0{\cdot}5843000 - 1$$

$$\log \tfrac{1}{2} \sin 2\beta = 0{\cdot}5539040 - 1$$

$$0{\cdot}0283960$$

$$u = 60 \cdot \frac{-0{\cdot}0059468}{-0{\cdot}0283960 - 0{\cdot}0059468} = 60 \cdot \frac{59468}{343428} = 10'.$$

$$\alpha = 66^0\,10',\ \beta = 66^0\,11',\ \beta - \alpha = 60''.$$

$$\log[\operatorname{arc} 66^0\,10' - \tfrac{1}{4}\pi] = \log 0{\cdot}3694279 = 0{\cdot}5675297 - 1$$

$$\log \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha = 0{\cdot}5677550 - 1$$

$$-\,0{\cdot}0002253$$

$$\log[\operatorname{arc} 66^0\,11' - \tfrac{1}{4}\pi] = \log 0{\cdot}3697188 = 0{\cdot}5678715 - 1$$

$$\log \tfrac{1}{2} \sin 2\beta = 0{\cdot}5675247 - 1$$

$$0{\cdot}0003468$$

$$u = 60 \cdot \frac{-0{\cdot}0002253}{-0{\cdot}0003468 - 0{\cdot}0002253} = 60 \cdot \frac{2253}{5721} = 23{\cdot}6'',$$

also

$$x = 66^0\,10'\,23{\cdot}6''.$$

3) Man habe die Gleichung:

$$\operatorname{arc} x \,.\, \sin \tfrac{1}{2} x = 1.\,*$$

---

* Man erhält diese Gleichung, wenn man sich die Aufgabe stellt, in einem Viertelskreis einen von einem Endpunkte aus gerechneten Bogen zu bestimmen, so, dass seine Sehne, wenn man sie verlängert, bis sie den Halbmesser des andern Endpunkts des Viertelskreises trifft, mit ihrer Verlängerung dem Bogen gleich sey.

Hier ist also

$$\operatorname{arc}[\alpha+u]\sin[\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}u]=1,$$

$$\{\operatorname{arc}\alpha+\operatorname{arc}u\}\{\sin\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\operatorname{arc}u\cos\tfrac{1}{2}\alpha\}=1,$$

oder wenn man $\operatorname{arc}^2 u$ vernachlässigt:

$$\operatorname{arc}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\alpha+\operatorname{arc}u[\sin\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\operatorname{arc}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha]=1$$

$$\operatorname{arc}u=\frac{1-\operatorname{arc}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{arc}\alpha}.$$

Rechnet man nach diesem Schema, so ergibt sich

$$x=84^\circ 53' 38{\cdot}8''.$$

Nach der zweiten Methode müsste

$$\log\operatorname{arc}x+\log\sin\tfrac{1}{2}x=0$$

seyn. Nun ist

$$\log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+u)-\log\sin\tfrac{1}{2}\alpha:\log\sin\tfrac{1}{2}\beta-\log\sin\tfrac{1}{2}\alpha=u:\beta-\alpha,$$

$$\log\operatorname{arc}(\alpha+u)-\log\operatorname{arc}\alpha:\log\operatorname{arc}\beta-\log\operatorname{arc}\alpha=u:\beta-\alpha,$$

woraus durch Addition, da

$$\log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+u)+\log\operatorname{arc}(\alpha+u)=0 \text{ ist},$$

$$-\log\sin\tfrac{1}{2}\alpha-\log\operatorname{arc}\alpha:\log\sin\tfrac{1}{2}\beta+\log\operatorname{arc}\beta-\log\sin\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$-\log\operatorname{arc}\alpha=u:\beta-\alpha$$

$$u=(\beta-\alpha)\cdot\frac{\log[\operatorname{arc}\alpha\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha]}{\log[\operatorname{arc}\alpha\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha]-\log[\operatorname{arc}\beta\sin\tfrac{1}{2}\beta]}.$$

Wir wollen hiernach die Rechnung nochmals durchführen:

$$\alpha=84^\circ,\ \beta=85^\circ,\ \beta-\alpha=60'.$$

$\log\operatorname{arc}84^\circ=0{\cdot}1661565$, $\log\operatorname{arc}85^\circ=0{\cdot}1712962$

$\log\sin 42^\circ=9{\cdot}8255109$, $\log\sin 42^\circ 30'=9{\cdot}8296833$

$0{\cdot}9916674-1$, $0{\cdot}0009795$

$=-0{\cdot}0083325$

$$u=60\,.\frac{-0{\cdot}0083325}{-0{\cdot}0083325-0{\cdot}0009795}=60\,.\frac{83325}{93120}=53'.$$

$$\alpha=84^\circ 53',\ \beta=84^\circ 54',\ \beta-\alpha=60''.$$

$\log\operatorname{arc}84^\circ 53'=0{\cdot}1706997$, $\log\operatorname{arc}84^\circ 54'=0{\cdot}1707850$

$\log\sin 42^\circ 26' 30''=9{\cdot}8292003$, $\log\sin 42^\circ 27'=9{\cdot}8292694$

$0{\cdot}9999000-1$, $0{\cdot}0000544$

$=-0{\cdot}0000999$

$$u=60\,.\frac{-0{\cdot}0000999}{-0{\cdot}0000999-0{\cdot}0000544}=60\,.\frac{999}{1543}=38{\cdot}8''$$

$$x=84^\circ 53' 38{\cdot}8''.$$

Zur Uebung mögen dienen:

$$\text{arc}\, x = \cos x,\ x = 42^\circ 20' 47\cdot2'';$$
$$\text{arc}\, x = \sin x + \tfrac{1}{2}\pi,\ x = 132^\circ 20' 47\cdot2'',$$
$$\text{arc}\, x = \sin x + \tfrac{2}{3}\pi,\ x = 149^\circ 16' 27\cdot0'';$$
$$\text{arc}\, x = \tfrac{1}{2}\,\text{tg}\, x,\ x = 66^\circ 46' 54\cdot2''.$$

(*Euler*, introductio II.)

Fünfter Abschnitt.

Bestimmung eines Dreiecks aus Verbindungen einzelner Stücke.

§. 34.

Wir haben im dritten Abschnitte gesehen, in welcher Weise ein Dreieck zu berechnen ist, wenn gewisse Stücke in demselben bekannt sind. Die dort als gegeben angesehenen Stücke waren jeweils nur einzelne Seiten und einzelne Winkel. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass die gegebenen Stücke nicht einfach Seiten und Winkel, sondern Verbindungen mehrerer Seiten und Winkel sind, oder dass weitere Grössen bekannt sind, die das Dreieck geometrisch vollkommen bestimmen, so dass es auch analytisch muss bestimmt werden können. Wir wollen, ohne uns in weitere allgemeine Erörterungen einzulassen, an einer Reihe von Aufgaben zeigen, wie man hier zu verfahren hat.

1) In einem Dreieck ist gegeben eine Seite a, ein ihr anliegender Winkel B, und die Differenz der beiden andern Seiten; man soll das Dreieck berechnen.

Die beiden andern Seiten sind b und c; wenn nicht gesagt ist, welches die grössere der beiden seyn soll, so ist die Differenz $b - c$ positiv oder negativ zu nehmen, so dass wenn α die gegebene Differenz, man hat $b - c = \pm \alpha$.

Nun ist (§. 22 (29)):

$$\sin A : \sin B = a : b,\ \sin C : \sin A = c : a,$$
$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},\ c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

mithin, da sicherlich $A + B + C = 180^\circ$, $C = 180^\circ - (A + B)$, $\sin C = \sin(A + B)$:

$$b-c=\frac{a}{\sin A}[\sin B-\sin(A+B)]=a\left[\frac{2\cos\left(B+\frac{A}{2}\right)\sin\left(-\frac{A}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\right]$$

(§. 14)

$$=-\frac{a\cos\left(B+\frac{A}{2}\right)\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\ (\text{§. } 13)=-\frac{a\cos\left(B+\frac{A}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=-a\cos B+a\sin B\operatorname{tg}\frac{A}{2}\ (\text{§. } 8),$$

d. h.

$$\pm\alpha=-a\cos B+a\sin B\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{a\cos B\pm\alpha}{a\sin B},$$

woraus, da $\frac{A}{2}<90^0$, der Winkel A bestimmt werden kann, vorausgesetzt, dass die zweite Seite dieser Gleichung positiv ausfalle. Ist also z. B. B stumpf, so kann bei α bloss das obere Zeichen gelten, da natürlich dann $b>c$ ist u. s. w. Ist nunmehr A bestimmt, so kennt man in dem Dreiecke eine Seite und alle Winkel und kann dasselbe nach §. 24 berechnen.

Sey etwa $a=173$, $B=56^0 25' 13''$, $b>c$, $\alpha=27$, so ist

$$a\cos B=95{\cdot}686,\ a\cos B+\alpha=122{\cdot}686,$$

$$\log(a\cos B+\alpha)=2{\cdot}0887950,\ \log a\sin B=2{\cdot}1587521,$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{A}{2}=9{\cdot}9300428,\ \frac{A}{2}=40^0 24' 18{\cdot}5'',\ A=80^0 48' 37{\cdot}1''.$$

Anmerkung. Wären beide Grössen $a\cos B+\alpha$, $a\cos B-\alpha$ positiv, so gäbe es zwei Werthe von $\frac{A}{2}$, also auch zwei Dreiecke; in dem einen (α mit dem obern Zeichen) wäre $b>c$, in dem andern $b<c$. Es versteht sich von selbst, dass, wenn das Dreieck möglich seyn soll, nicht bloss $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ positiv ausfallen muss, sondern es muss auch $A+B<180^0$ seyn. Ueberhaupt dürfen bei all diesen Aufgaben die Resultate den Grundbedingungen der Möglichkeit eines Dreiecks nicht widersprechen. — Fiele $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ negativ aus, so wäre mit den gemachten Angaben ein Dreieck unmöglich.

2) Der Umfang eines Dreiecks ist gegeben, so wie die drei Winkel, man soll das Dreieck berechnen.

Man hat: $a:b = \sin A : \sin B,\ a:c = \sin A : \sin C,$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},\ c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

also da $a + b + c = \alpha$ gegeben ist:

$$\alpha = a + \frac{a \sin B}{\sin A} + \frac{a \sin C}{\sin A} = a\left[\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A}\right].$$

Aber

$$\sin C = \sin(A+B) = 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B) . \cos\tfrac{1}{2}(A+B),$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B) . \cos\tfrac{1}{2}(A-B), \qquad (§. 14)$$

also

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\left[\cos\tfrac{1}{2}(A+B) + \cos\tfrac{1}{2}(A-B)\right]$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\left[2\cos\frac{A}{2} . \cos\frac{B}{2}\right] = 4\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2},$$

und da $\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \sin[90^0 - \tfrac{1}{2}C] = \cos\tfrac{1}{2}C,$

also

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

so ist

$$\alpha = a . \frac{4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin A} = a . \frac{4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}{2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A}$$

$$= 2a . \frac{\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin\tfrac{1}{2}A}.$$

Hieraus:

$$a = \tfrac{1}{2}\alpha . \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},\ b = \tfrac{1}{2}\alpha . \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}},\ c = \tfrac{1}{2}\alpha . \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

Für $\alpha = 13000,\ A = 48^0\,17'\,30'',\ B = 63^0\,39'\,40'',\ C = 68^0\,2'\,50'',$ erhält man:

$$a = 3775{\cdot}96,\ b = 4532{\cdot}85,\ c = 4691{\cdot}19.$$

Wollte man den Flächeninhalt des Dreiecks durch die gegebenen Stücke finden, so hätte man für denselben (§. 28):

$$\frac{ab\sin C}{2} = \tfrac{1}{8}\alpha^2\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin C}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos^2\frac{C}{2}} = \frac{\alpha^2}{8}\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} . 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\alpha^2 . \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \tfrac{1}{4}\alpha^2\,\mathrm{tg}\frac{A}{2} . \mathrm{tg}\frac{B}{2} . \mathrm{tg}\frac{C}{2}.$$

3) Man kennt die sämmtlichen Winkel eines Dreiecks und die Summe $a+b$ zweier Seiten.

Aus §. 23 folgt:

$$c = \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)},$$

wodurch die dritte Seite gefunden, und somit die Aufgabe auf §. 24 reduzirt ist.

Man hat übrigens auch nach §. 23 Formel (32):

$$a-b = (a+b)\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C} = (a+b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)\operatorname{tg}\frac{1}{2}C,$$

wodurch $a-b$ gefunden wird, und da man $a+b$ bereits kennt, so erhält man leicht a und b.

Für

$a+b=650, A=65^\circ 28' 13{\cdot}6'', B=42^\circ 30' 3{\cdot}6'', C=72^\circ 1' 42{\cdot}8''$

findet sich $a=373,\ b=277,\ c=390.$

4) Ist die Differenz $a-b$ gegeben und die Winkel, so hat man (§. 23):

$$c = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(A-B)} \text{ oder } a+b=(a-b)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(A-B).$$

Für

$a-b=3243{\cdot}2, A=79^\circ 8' 33'', B=44^\circ 17' 56'', C=56^\circ 33' 31''$

folgt: $a=11227{\cdot}2,\ b=7984,\ c=9539{\cdot}18.$

5) Man kennt eine Seite a eines Dreiecks, die Differenz $B-C$ der beiden Winkel an derselben ($B>C$) und die Differenz der zwei andern Seiten $b-c$ (natürlich auch $b>c$).

Nach §. 23 Formel (33):

$$\cos\frac{1}{2}A = \frac{a\sin\frac{1}{2}(B-C)}{b-c}$$

wodurch A gefunden wird. Dann ist (§. 23 Formel (32)):

$$b+c=(b-c)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(B-C),$$

wodurch $b+c$ erhalten wird, also, da man $b-c$ kennt, auch b und c, so dass jetzt genügende Stücke bekannt sind (§. 26).

$a=5691{\cdot}99,\ b-c=1363{\cdot}02,\ B-C=25^\circ 57' 20''$, gibt
$A=40^\circ 37' 20''$; $b=8671{\cdot}03,\ c=7308{\cdot}01,\ B=82^\circ 40' 0''$,
$C=56^\circ 42' 40''$.

6) Man kennt nebst den drei Winkeln die Grösse $a+b-c$ und soll das Dreieck berechnen.

Wie in Nr. 2 ist

$$a + b - c = a\left[\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A}\right]$$

$$= a \cdot \left[\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B) - 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}\right]$$

$$= a \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}\left[\cos\frac{1}{2}(A-B) - \cos\frac{1}{2}(A+B)\right]$$

$$= \frac{2a\cos\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A} = \frac{2a\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A},$$

$$a = \frac{(a+b-c)\cos\frac{1}{2}A}{2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C},\ b = \frac{(a+b-c)\cdot\cos\frac{1}{2}B}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C},$$

$$c = (a+b) - (a+b-c).$$

$a + b - c = 910$, $A = 67^\circ 22' 48{\cdot}5''$, $B = 53^\circ 7' 48{\cdot}4''$,
$C = 59^\circ 29' 23{\cdot}1$ gibt $a = 975$, $b = 845$, $c = 910$.

7) Es ist die Summe $a + b$, die Seite c und Winkel C gegeben. Da C gegeben ist, so hat man $A + B = 180^\circ - C$; ferner folgt aus §. 23:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{c},$$

also wenn man $A > B$ voraussetzt, so findet sich hieraus $\frac{A-B}{2}$, indem ganz sicher $\frac{1}{2}(A-B) < 90^\circ$, mithin da auch $\frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C$, so findet man A und B und die Aufgabe ist auf §. 24 zurückgeführt.

$a + b = 944{\cdot}3$, $c = 525{\cdot}486$, $C = 64^\circ 9' 16''$ gibt
$A = 40^\circ 32' 16''$, $B = 75^\circ 18' 28''$, $a = 379{\cdot}5$, $b = 564{\cdot}8$.

§. 35.

8) Man kennt den Flächeninhalt F eines Dreiecks, eine Seite a und den Umfang $U = a + b + c$.

Aus §. 23 Formel (34) folgt, da $2s = U$:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}U-b)(\frac{1}{2}U-c)}{\frac{1}{2}U(\frac{1}{2}U-a)}} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}U-a)(\frac{1}{2}U-b)(\frac{1}{2}U-c)\frac{1}{2}U}{(\frac{1}{2}U)^2(\frac{1}{2}U-a)^2}}$$

$$= \frac{F}{\frac{1}{2}U(\frac{1}{2}U-a)}\ (\S.\ 28,\ \text{Nr. } 1).$$

Hieraus findet sich A. Da $b + c = U - a$, so kennt man auch $b + c$, mithin erhält man aus §. 23:

$$\cos\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{(b+c)\sin\frac{1}{2}A}{a}$$

und wenn man $B > C$ voraussetzt, den Winkel $B - C$; da $B + C = 180^0 - A$, so findet man jetzt B und C und kann, da

$$b - c = (b + c) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B - C) \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \text{ (§. 23 Formel (32))},$$

leicht noch $b - c$ berechnen, also b und c finden; oder auch, da a, A, B, C bekannt sind, die Aufgabe auf §. 24 reduziren.

$F = 151872$, $a = 625$, $U = 2034$ gibt $A = 41^0\, 42'\, 32{\cdot}1''$, $B = 32^0\, 31'\, 13{\cdot}5''$, $C = 105^0\, 46'\, 14{\cdot}4''$, $b = 505$, $c = 904$.

9) Man kennt den Flächeninhalt F, den Umfang $U = a + b + c$ und den Winkel A.

Aus §. 28 folgt:

$$bc = \frac{2F}{\sin A},\quad b + c = U - a,$$

also

$$(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 = (U - a)^2.$$

Nach §. 22 (31) ist aber

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos A = a^2 + \frac{4F \cos A}{\sin A} = a^2 + 4F \operatorname{cotg} A,$$

also hat man

$$(U - a)^2 = a^2 + 4F \operatorname{cotg} A + \frac{4F}{\sin A},$$

$$U^2 - 2aU + a^2 = a^2 + 4F \operatorname{cotg} A + \frac{4F}{\sin A},$$

$$U^2 - 2aU = 4F \operatorname{cotg} A + \frac{4F}{\sin A},$$

$$U^2 - 4F\left(\operatorname{cotg} A + \frac{1}{\sin A}\right) = 2aU.$$

Aber

$$\operatorname{cotg} A + \frac{1}{\sin A} = \frac{\cos A + 1}{\sin A} = \frac{2\cos^2 \frac{1}{2} A}{2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A} = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A,$$

also

$$2aU = U^2 - 4F \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A,$$

$$a = \frac{U^2 - 4F \operatorname{cotg} \frac{1}{2} A}{2U} = \frac{U}{2} - \frac{2F}{U} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A.$$

Kennt man hiedurch a, so hat man auch $b + c = U - a$, und dann aus §. 23:

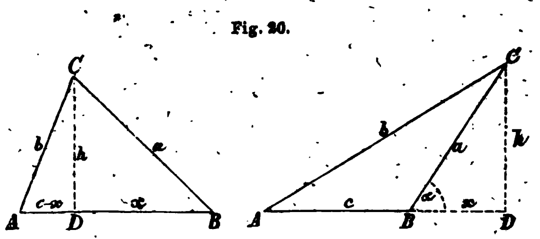
$$\cos \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{(b + c) \sin \frac{1}{2} A}{a},$$

wodurch, wenn man $B > C$ voraussetzt, $B - C$ gefunden ist. Da $B + C = 180^0 - A$, so findet man nunmehr B und C und kann jetzt das Dreieck leicht berechnen.

Natürlich muss a positiv und $< b + c$, d. h. $< U - a$ ausfallen.

10) Man kennt einen Winkel C eines Dreiecks, so wie die zwei Stücke, in welche die von diesem Winkel auf die entgegenstehende Seite c gefällte Senkrechte diese Seite theilt.

Fig. 20.



Fällt die Senkrechte CD innerhalb des Dreiecks, so soll x positiv seyn; fällt sie ausserhalb, so soll dagegen x negativ genommen werden. Alsdann sind die zwei Abschnitte immer $c-x = AD$ und $x = \pm BD$, und es muss also in der Aufgabe geradezu angegeben seyn, ob die Senkrechte innerhalb des Dreiecks fällt, oder nicht. Die zwei Grössen $c-x$ und x als bekannt angesehen, hat man:

$$c-x = b\cos A,\ x = a\cos B,$$

also

$$\frac{b\cos A}{a\cos B} = \frac{c-x}{x}.$$

Ferner:

$$a:b = \sin A:\sin B,\ \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A},$$

also

$$\frac{\cos A\sin B}{\sin A\cos B} = \frac{c-x}{x},\ \frac{\cos A\sin B}{\sin A\cos B}+1 = \frac{c}{x},\ \frac{\cos A\sin B}{\sin A\cos B}-1 = \frac{c-2x}{x},$$

worin $c = (c-x)+x = AD \pm BD$, und $c-2x = (c-x)-x = AD \mp BD$ bekannt sind,

d. h. $$\frac{\cos A\sin B+\sin A\cos B}{\sin A\cos B} = \frac{c}{x},\ \frac{\cos A\sin B-\sin A\cos B}{\sin A\cos B} = \frac{c-2x}{x},$$

oder $$\frac{\sin(B+A)}{\sin A\cos B} = \frac{c}{x},\ \frac{\sin(B-A)}{\sin A\cos B} = \frac{c-2x}{x},$$

woraus: $$\frac{\sin(B+A)}{\sin(B-A)} = \frac{c}{c-2x},$$

also da $B+A = 180^\circ - C$, $\sin(B+A) = \sin C$:

$$\frac{\sin C}{\sin(B-A)} = \frac{c}{c-2x},\ \sin(B-A) = \frac{c-2x}{c}\sin C.$$

Ist hier $\frac{c-2x}{c}$ negativ, so hat man statt dieser Gleichung:

$$\sin(A-B)=-\frac{c-2x}{c}\sin C.$$

Hieraus ergibt sich $A-B$ oder $B-A$, welche Differenz bei positivem x sicherlich $< 90^0$ ist, da sowohl A als B unter 90^0 liegen; bei negativem x, in welchem Falle $\frac{c-2x}{c}$ positiv, also $B > A$ ist, könnte die Differenz $B-A$ kleiner oder grösser als 90^0 seyn, so dass man für $B-A$ einen spitzen und einen stumpfen Winkel erhielte. Beide Auflösungen werden dann im Allgemeinen zuzulassen seyn. Da $A+B=180^0-C$, so erhält man A, B, und es muss B (bei negativem x) stumpf ausfallen. Man wird also in diesem Falle zwei Dreiecke erhalten, wie diess auch durch geometrische Konstruktion leicht gezeigt werden kann. Denkt man sich nämlich die Linie DC verlängert, so wird man auf ihr noch einen zweiten Punkt sich wählen können, für den die Linien nach B und A mit einander denselben Winkel machen, wie die von C nach A und B. Es ist diess schon daraus ersichtlich, dass wenn man den Punkt C zuerst in D legt und sich dann denselben auf der unbegränzten Geraden DC (die wegen gegebenen AB und BD ja gegeben ist) fortbewegen lässt, der Winkel C eine Zeit lang wachsen, dann einen grössten Werth erreichen und von da an wieder abnehmen wird. Ein jeder Winkel C, der nicht jenen grössten Werth überschreitet, kann mithin zweimal vorkommen. Für den Fall des grössten Werthes wird $B-A=90^0$, wie leicht ersichtlich, da dann $\sin C$ am grössten ist, und dann freilich sind die zwei aus obiger Gleichung folgenden Werthe von $B-A$ einander gleich.

11) Kennt man in der vorigen Aufgabe statt des Winkels C etwa die Seite b, so ist:

$$\cos A=\frac{c-x}{b},$$

wodurch man sicher A erhält. Aus $c(=AD \pm BD)$, b und A berechnet man das Dreieck nach §. 25.

12) Man kennt die drei Höhenlinien eines Dreiecks, dasselbe zu berechnen.

Seyen α, β, γ die drei Höhenlinien von den Spitzen A, B, C aus, so ist offenbar

$$\alpha a=\beta b=\gamma c,$$

da die Hälfte jeder dieser Grössen die Fläche des Dreiecks ausdrückt. Daraus folgt:

$$b = \frac{\alpha}{\beta} a, \quad c = \frac{\alpha}{\gamma} a,$$

also die Fläche auch (§. 28):

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{\left(a+\frac{\alpha}{\beta}a+\frac{\alpha}{\gamma}a\right)\left(a+\frac{\alpha}{\beta}a-\frac{\alpha}{\gamma}a\right)\left(a-\frac{\alpha}{\beta}a+\frac{\alpha}{\gamma}a\right)\left(-a+\frac{\alpha}{\beta}a+\frac{\alpha}{\gamma}a\right)} = \tfrac{1}{2}\alpha a,$$

d. h.

$$a\sqrt{(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)(\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta)(\beta\gamma-\alpha\gamma+\alpha\beta)(-\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)} = 2\alpha\beta^2\gamma^2,$$

$$a = \frac{2\alpha\beta^2\gamma^2}{\sqrt{(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)(\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta)(\beta\gamma-\alpha\gamma+\alpha\beta)(-\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)}}$$

woraus dann b und c. Aus den drei Seiten folgen dann die Winkel (§. 26).

13) In einem Dreiecke kennt man den Winkel C, die von C auf c gefällte Senkrechte h und den Umfang des Dreiecks

$$U = a + b + c.$$

Zur Bestimmung der drei Seiten a, b, c hat man offenbar folgende Gleichungen (§§. 28, 22):

$$ab \sin C = ch, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \quad a + b + c = U.$$

Daraus folgt

$$a + b = U - c, \quad a^2 + 2ab + b^2 = U^2 - 2Uc + c^2,$$

d. h. da

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos C = c^2 + \frac{2ch}{\sin C}\cos C = c^2 + 2ch \operatorname{cotg} C:$$

$$c^2 + 2ch\operatorname{cotg} C + \frac{2ch}{\sin C} = U^2 - 2Uc + c^2,$$

$$2ch\left[\operatorname{cotg} C + \frac{1}{\sin C}\right] = U^2 - 2Uc,$$

$$2ch\left[\frac{\cos C + 1}{\sin C}\right] = U^2 - 2Uc, \quad 2ch.\frac{2\cos^2\frac{1}{2}C}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C} = U^2 - 2Uc,$$

$$2ch.\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C = U^2 - 2Uc, \quad 2c[h.\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C + U] = U^2$$

$$c = \tfrac{1}{2}\frac{U^2}{h\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C + U}.$$

Kennt man nun c, nimmt ferner an, es sey $a > b$, so kennt man auch $ab = \frac{ch}{\sin C}$, ferner $a + b = U - c$; man hat also

$$a + b = \alpha, \ ab = \beta, \ \alpha \text{ und } \beta \text{ bekannt.}$$

Daraus

$$\begin{array}{rl} a^2 + 2ab + b^2 &= \alpha^2 \\ 4ab \quad &= 4\beta \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 &= \alpha^2 - 4\beta, \end{array}$$

d. h. $(a - b)^2 = \alpha^2 - 4\beta, \ a - b = \sqrt{\alpha^2 - 4\beta},$

und da $a + b = \alpha, a - b = \sqrt{\alpha^2 - 4\beta},$

so findet man a und b. Aus den drei Seiten ergeben sich sodann die drei Winkel.

14) In einem Dreieck kennt man die drei Winkel A, B, C, sowie die Senkrechte h, die von der Spitze C auf c gefällt ist.

Man hat offenbar (Fig. 20):

$$\frac{h}{b} = \sin A, \ \frac{h}{a} = \sin B,$$

d. h.

$$b = \frac{h}{\sin A}, \ a = \frac{h}{\sin B}.$$

Sind nun a, b, C bekannt, so ist das Dreieck gegeben. (§. 25).

Diese Aufgaben mögen genügen, um zu zeigen, wie man sich in ähnlichen Fällen zu helfen hat.

Statt weitere Aufgaben dieser Art beizufügen, ziehen wir es vor, nunmehr eine Reihe praktisch mehr oder minder wichtiger Fälle zu betrachten, die uns Gelegenheit genug geben werden, die vorgetragenen Lehren anzuwenden.

Anmerkung. Wir haben bereits in der Anmerkung zu Nr. 1 in §. 34 darauf aufmerksam gemacht, dass wenn die Aufgaben, die hier gestellt wurden, eine Lösung zulassen sollen, die Resultate nicht den Grundbedingungen der Existenz eines Dreiecks widersprechen dürfen. Diese sind aber:

Drei positive Winkel, deren Summe $= 180^0$ ist, können immer in einem Dreiecke vorkommen.

Drei Gerade, von denen je zwei grösser sind, als die dritte, können immer ein Dreieck bilden.

Sollen drei gegebene Winkel, welche der ersten Bedingung entsprechen, mit drei gegebenen Graden, die der zweiten entsprechen, in demselben Dreiecke vereinigt seyn, so müssen die Winkel und Geraden den Formeln (29) in §. 22 entsprechen (also natürlich auch allen übrigen Formeln der §§. 22 und 23).

Ein Winkel, der gesucht wird, muss also immer positiv und kleiner als 180^0 seyn; zwei Winkel müssen zusammen kleiner als 180^0 seyn u. s. w.

Sechster Abschnitt.

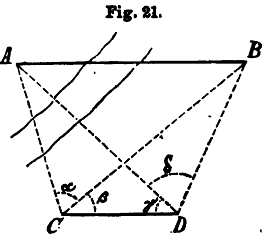
Auflösung einer Reihe praktischer Aufgaben.

§. 36.

Indem wir nachstehend eine Reihe Aufgaben, die mehr oder minder für die Praxis wichtig sind, lösen, haben wir natürlich nicht die Absicht, einen Kursus der praktischen Geometrie aufzustellen. Die Aufgaben sind für uns hier nur in so ferne von Interesse, als sie Anwendungen der vorgetragenen Lehren fordern; die wirkliche Ausführung, die dabei nöthige Vorsicht u. s. w. kann begreiflich nicht Gegenstand dieses Abschnitts seyn. Eben so haben wir auch gar zu einfache Aufgaben nicht berührt, wenn sie gleich vielleicht für die Praxis sehr wichtig sind.

1) Man soll die Länge der unzugänglichen Geraden AB bestimmen, wenn man von zwei Punkten C und D aus sowohl A und B als auch jeweils D oder C sehen kann.

Fig. 21.



Man messe die Standlinie $CD = a$, sodann die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so wird sich hieraus $AB = x$ bestimmen lassen.

In dem Dreieck ACD kennt man nämlich die Seite CD nebst den Winkeln $ACD = \alpha + \beta$, $ADC = \gamma$, kann also nach §. 24 das Dreieck berechnen, namentlich also die Seite AD; in dem Dreieck BCD kennt man eben so CD und $BCD = \beta$, $CDB = \gamma + \delta$, kann dasselbe also gleichfalls berechnen, speziell die Seite DB. In dem Dreieck ADB endlich kennt man AD, DB nebst $ADB = \delta$, kann also dasselbe nach §. 25 berechnen, d. h. die Seite AB finden.

Zur Uebung legen wir vor:

$$CD = 45501 \cdot 62,\ \alpha = 39^\circ 8' 48 \cdot 1'',\ \beta = 67^\circ 13' 57 \cdot 4'',$$
$$\gamma = 44^\circ 12' 39 \cdot 6'',\ \delta = 18^\circ 30' 9 \cdot 2'',$$

woraus $AB = 40876 \cdot 03$ folgt:

Es wäre auch möglich, dass AB die Standlinie CD durchschneiden würde. Misst man nun wieder $CD = a$, die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,

so kann man in dem Dreieck CAD, nach §. 24 die Seite AD, in dem Dreieck CBD nach §. 24 die Seite BD berechnen. Alsdann erhält man aus dem Dreieck ADB nach §. 25 die Seite AB.

Fig. 22.

Sey für diesen Fall:

$$CD = 88901{\cdot}14,\ \alpha = 29^0 24' 34{\cdot}9'',$$
$$\beta = 25^0 8' 35{\cdot}0'',\ \gamma = 44^0 12' 39{\cdot}6'',$$
$$\delta = 18^0 30' 9{\cdot}2'',$$

so hat man (§§. 22, 25):

$$CAD = 180^0 - (\alpha + \gamma),\ CBD = 180^0 - (\beta + \delta);$$
$$AD = \frac{CD \,.\, \sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)},\quad BD = \frac{CD \,.\, \sin\beta}{\sin(\beta+\delta)};$$
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)\sqrt{AD \,.\, BD}}{BD - AD},\quad AB = \frac{BD - AD}{\cos\varphi};$$
$$\alpha + \gamma = 73^0 37' 14{\cdot}5'',\ \beta + \delta = 43^0 38' 44{\cdot}2'',$$
$$\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta) = 31^0 21' 24{\cdot}4''.$$

$$\begin{array}{rlrl}
\log CD = & 4{\cdot}9489073 & \log CD = & 4{\cdot}9489073 \\
\log\sin\alpha = & 9{\cdot}6911267 & \log\sin\beta = & 9{\cdot}6282663 \\
E.\log\sin(\alpha+\gamma) = & 0{\cdot}0179930 & E.\log\sin(\beta+\delta) = & 0{\cdot}1610276 \\
\log AD = & 4{\cdot}6580270 & \log BD = & 4{\cdot}7382012 \\
AD = & 45501{\cdot}63 & BD = & 54726{\cdot}95
\end{array}$$

$$BD - AD = 9225{\cdot}32$$
$$\log(BD - AD) = 3{\cdot}9649814$$

$$\begin{array}{rl}
\log 2 = & 0{\cdot}3010300 \\
\log\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta) = & 9{\cdot}7163086 \\
\tfrac{1}{2}\log AD = & 2{\cdot}3290135 \\
\tfrac{1}{2}\log BD = & 2{\cdot}3691006 \\
E.\log(BD-AD) = & 6{\cdot}0350185 \\
\log\mathrm{tg}\,\varphi = & 10{\cdot}7504712 \\
\log\cos\varphi = & 9{\cdot}2427828
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log(BD - AD) = & 3{\cdot}9649814 \\
E.\log\cos\varphi = & 0{\cdot}7572171 \\
\log AB = & 4{\cdot}7221985 \\
AB = & 52747{\cdot}09
\end{array}$$

2) Gesetzt man kenne, wie im Falle Nr. 1, die Länge von CD; man habe dagegen die vier Winkel CAD, DAB, ABC, CBD gemessen und soll nun AB berechnen.

Man hat für die erste Figur:

$$ACB = 180^0 - (CAB + ABC),$$
$$ADB = 180^0 - (DAB + ABD),$$

kennt also ACB und ADB; nunmehr ist, wenn $AB = x$, $CD = a$:

$$x : BC = \sin ACB : \sin CAB,\ BC = \frac{x \sin CAB}{\sin ACB},$$
$$x : BD = \sin ADB : \sin DAB,\ BD = x . \frac{\sin DAB}{\sin ADB}.$$

Im Dreiecke CDB ist nun (§. 22):

$$a^2 = BC^2 + BD^2 - 2\,BC . BD . \cos CBD$$
$$= x^2 \left[\frac{\sin^2 CAB}{\sin^2 ACB} + \frac{\sin^2 DAB}{\sin^2 ADB} - \frac{2 \sin CAB . \sin DAB . \cos CBD}{\sin ACB . \sin ADB}\right],$$

also

$$x = \frac{a}{\sqrt{\left[\frac{\sin^2 CAB}{\sin^2 ACB} + \frac{\sin^2 DAB}{\sin^2 ADB} - \frac{2 \sin CAB . \sin DAB . \cos CBD}{\sin ACB . \sin ADB}\right]}}.$$

Ganz dieselbe Formel gilt auch für die zweite Figur.

Will man diese Grösse zu logarithmischer Rechnung bequemer einrichten, so sey (vergl. §. 25)

$$\frac{\sin CAB}{\sin ACB} = m,\ \frac{\sin DAB}{\sin ADB} = n,\ CBD = \alpha;\ tg\,\varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \sqrt{mn}}{m - n};$$

alsdann ist
$$x = \frac{a \cos \varphi}{m - n} (\varphi \text{ zwischen } 0^0 \text{ und } 180^0).$$

3) Man kennt die Linie AC = a, BC = b, die Winkel DAC = α, DBC = β, ACB = γ und soll hieraus die Lage des Punktes D bestimmen.

Sey ACD = x, DCB = y, also $x + y = \gamma$. Nun ist (da ADC = $180^0 - (\alpha + x)$ u. s. w.):

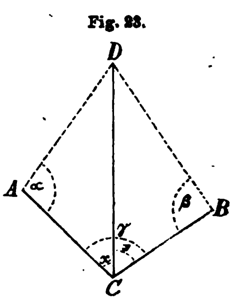


Fig. 23.

$$CD : a = \sin \alpha : \sin (\alpha + x),$$
$$CD : b = \sin \beta : \sin (\beta + y),$$

also
$$CD = \frac{a \sin \alpha}{\sin (\alpha + x)},\ CD = \frac{b \sin \beta}{\sin (\beta + y)},$$

woraus

$$\frac{a \sin \alpha}{\sin (\alpha + x)} = \frac{b \sin \beta}{\sin (\beta + y)},\ \frac{\sin (\beta + y)}{\sin (\alpha + x)} = \frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha},$$

d. h. da $y = \gamma - x$:

$$\frac{\sin (\beta + \gamma - x)}{\sin (\alpha + x)} = \frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha},$$
$$\frac{\sin (\beta + \gamma) \cos x - \cos (\beta + \gamma) \sin x}{\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x} = \frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha},$$
$$\frac{\sin (\beta + \gamma) - \cos (\beta + \gamma)\, tg\, x}{\sin \alpha + \cos \alpha\, tg\, x} = \frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha}$$

$$a \sin\alpha \sin(\beta+\gamma) - b \sin\alpha \sin\beta$$
$$= [b \cos\alpha \sin\beta + a \sin\alpha \cos(\beta+\gamma)] \operatorname{tg} x$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin\alpha . [a \sin(\beta+\gamma) - b \sin\beta]}{a \sin\alpha \cos(\beta+\gamma) + b \cos\alpha \sin\beta}.$$

Hieraus folgt x, das jedenfalls $< 180^0$, ganz unzweideutig; eben so erhält man dann y und endlich CD. Durch diese Grössen ist dann die Lage von D vollkommen bestimmt.

$$a = 119757{\cdot}85,\ b = 110675{\cdot}82,$$
$$\alpha = 60^0 22' 21{\cdot}4'',\ \beta = 66^0 10' 8{\cdot}5'',\ \gamma = 90^0 7' 11{\cdot}8''.$$

$\log a = 5{\cdot}0783040$ $\qquad$ $\log b = 5{\cdot}0440506$
$\log \sin\alpha = 9{\cdot}9391491$ $\qquad$ $\log \sin\alpha = 9{\cdot}9391491$
$\log \sin(\beta+\gamma) = 9{\cdot}6043600$ $\qquad$ $\log \sin\beta = 9{\cdot}9612983$
4.6218131 $\qquad$ $4{\cdot}9444980$
$a \sin\alpha \sin(\beta+\gamma) = 41861{\cdot}34$ $\qquad$ $b \sin\alpha \sin\beta = 88003{\cdot}10$

$\log a = 5{\cdot}0783040$
$\log \sin\alpha = 9{\cdot}9391491$
$\log \cos(\beta+\gamma) = 9{\cdot}9616987\ (-)$
$4{\cdot}9791518\ (-)$
$a \sin\alpha \cos(\beta+\gamma) = -95312{\cdot}92$

$\log b = 5{\cdot}0440506$
$\log \cos\alpha = 9{\cdot}6940411$
$\log \sin\beta = 9{\cdot}9612983$
$4{\cdot}6993900$
$b \cos\alpha \sin\beta = 50048{\cdot}38$

$$\operatorname{tg} x = \frac{41861{\cdot}34 - 88003{\cdot}10}{-95312{\cdot}92 + 50048{\cdot}38} = \frac{46141{\cdot}76}{45264{\cdot}54}$$

$\log \text{Zähler} = 4{\cdot}6640941$
$\text{E}.\log \text{Nenner} = 5{\cdot}3442418$
$\log \operatorname{tg} x = 10{\cdot}0083359$
$x = 45^0 32' 59{\cdot}4''$

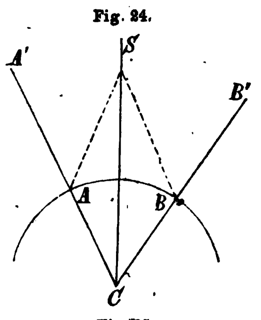
$$y = \gamma - x = 44^0 34' 12{\cdot}4'',\ \alpha + x = 105^0 55' 20{\cdot}8''$$

$\log a = 5{\cdot}0783040$
$\log \sin\alpha = 9{\cdot}9391491$
$\text{E}.\log \sin(\alpha+x) = 0{\cdot}0169901$
$\log CD = 5{\cdot}0344432$
$CD = 108253{\cdot}8$

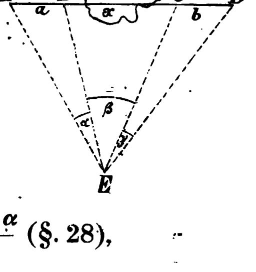
4) Diese Aufgabe kann angewendet werden, um (ungefähr) die Entfernung eines Planeten von der Erde zu bestimmen, wenn man dabei die Erde als Kugel ansieht.

In zwei Punkten A und B, die auf demselben Meridian * liegen,

* Wir wollen uns die Erde als Kugel denken; alsdann bildet derjenige Durchmesser derselben, um den sie sich bei ihrer täglichen Bewegung dreht, die Erd-



misst man in dem Augenblick, da der Planet S durch den (Himmels-) Meridian geht, die Zenithdistanzen SAA', SBB' desselben, so kennt man AC = CB, den Halbmesser der Erde, den Winkel ACB, so wie SAC = 180° — SAA', SBC = 180° — SBB' und berechnet also CS nach Nr. 3 (wenn C der Mittelpunkt der Erde ist).



5) Die vier Punkte A, B, C, D liegen in gerader Linie, E ausserhalb dieser Linie. Man kennt AB = a, CD = b, nebst den Winkeln AEB = α, BEC = β, CED = γ; man soll BC = x suchen. Denken wir uns von E auf AD eine Senkrechte gezogen, und sey die Länge derselben = z, so ist

$$\text{Fläche des Dreicks AEB} = \frac{az}{2} = \frac{AE \,.\, BE \sin\alpha}{2} \quad (\S.\ 28),$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad CDE = \frac{bz}{2} = \frac{CE \,.\, ED \,.\, \sin\gamma}{2},$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad AED = \frac{(a+b+x)z}{2} = \frac{AE \,.\, DE \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{2},$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad BEC = \frac{xz}{2} = \frac{BE \,.\, CE}{2} \sin\beta.$$

---

axe, welche, bis an das Himmelsgewölbe verlängert, letzteres in den **Polen** (Nord- und Südpol) trifft. Da in Folge der täglichen Umdrehung der Erde das ganze Himmelsgewölbe sich um die Erde zu drehen scheint, so sind die Pole, als in der Drehaxe liegend, die einzigen Punkte desselben, die ruhig bleiben. Legt man durch die Erdaxe und einen Punkt der Erdoberfläche eine Ebene, so schneidet dieselbe die Erdfläche in einem Kreise, der den (irdischen) Meridian des fraglichen Punktes bildet. Erweitert man diese Ebene bis an das Himmelsgewölbe, so schneidet sie dasselbe im (himmlischen) Meridian des Ortes der Erdoberfläche. Verlängert man den in den fraglichen Erdort gezogenen Erdhalbmesser, bis an das Himmelsgewölbe, so trifft er dieses im **Zenith** des Ortes, das also senkrecht über letzterem am Himmel liegt. Das Zenith befindet sich mithin im Meridian.

Ist S irgend ein beliebiger Punkt, A' das Zenith von A, so heisst der Winkel A'AS, die **Zenithdistanz** des Punktes S. Man kann letztere also auch erklären als den Winkel, den die im Punkte A senkrecht auf die Erdoberfläche gezogene Gerade mit der von A nach S gezogenen Linie bildet.

Hieraus folgt, wenn man das Produkt der zwei letzten Gleichungen durch das der zwei ersten dividirt:

$$\frac{(a+b+x)x}{ab}=\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

$$(a+b)x+x^2=\frac{ab\sin\beta.\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

$$x=-\left(\frac{a+b}{2}\right)\pm\sqrt{\frac{ab\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}+\frac{(a+b)^2}{4}}.$$

Man bestimme nun einen Winkel φ (zwischen 0° und 90°) so, dass

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{ab\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}},$$

so ist $$\frac{ab\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}=\frac{(a+b)^2\operatorname{tg}^2\varphi}{4},$$

und da, weil x positiv seyn muss, man nur das obere Zeichen beibehalten darf, hat man:

$$x=-\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}\operatorname{tg}^2\varphi+\frac{(a+b)^2}{4}}$$

$$=-\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+1}=-\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}$$

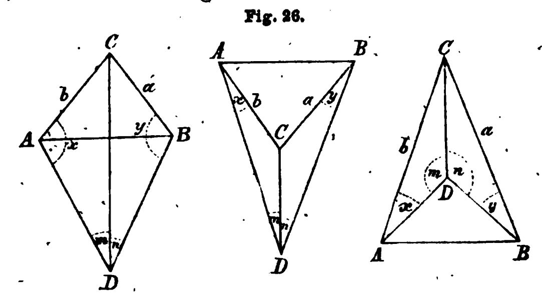
$$=\frac{a+b}{2\cos\varphi}(1-\cos\varphi)=\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \text{ (§. 32, Nr. 5).}$$

$$a=1450,\ b=965,\ \alpha=25^\circ 37',\ \beta=48^\circ 19',\ \gamma=32^\circ 53';$$

$$x=1184{\cdot}05.$$

6) Man kennt im Dreieck ABC alle Stücke (also alle Seiten und Winkel); im Punkte D misst man die Winkel ADC = m, BDC = n; man soll die Lage von D bestimmen.

Fig. 26.



Sey CAD = x, CBD = y, so ist

$$CD:b=\sin x:\sin m,\quad CD:a=\sin y:\sin n,$$

$$CD = \frac{b \sin x}{\sin m}, \quad CD = \frac{a \sin y}{\sin n},$$

$$\frac{b \sin x}{\sin m} = \frac{a \sin y}{\sin n}, \quad \frac{\sin y}{\sin x} = \frac{b \sin n}{a \sin m}.$$

Was nun x und y anbelangt, so ist

in der ersten Figur: $x + y = 360^0 - (m + n + C)$,

„ „ zweiten „ $x + y = C - (m + n)$,

„ „ dritten „ $x + y = 360^0 - (m + n + C)$,

wo a, b, C die Seiten BC, AC und den Winkel ACB des Dreiecks ABC bezeichnen. Man hat also immer

$$x + y = \alpha, \ y = \alpha - x, \ \alpha \text{ bekannt},$$

also

$$\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x} = \frac{b \sin n}{a \sin m},$$

$$\frac{\sin \alpha \cos x - \cos \alpha \sin x}{\sin x} = \frac{b \sin n}{a \sin m},$$

$$\sin \alpha \operatorname{cotg} x - \cos \alpha = \frac{b \sin n}{a \sin m},$$

$$\sin \alpha \operatorname{cotg} x = \frac{b \sin n}{a \sin m} + \cos \alpha,$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{b \sin n}{a \sin \alpha \sin m} + \operatorname{cotg} \alpha.$$

Gesetzt man bestimme einen Winkel φ so, dass

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{b \sin n}{a \sin \alpha \sin m},$$

so ist

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \varphi + \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha \sin \varphi} \ (\S. 14).$$

Hieraus ergibt sich x vollkommen unzweideutig; aus x folgt dann $y = \alpha - x$. CD kann sodann in zwei Weisen berechnet werden, und, wenn man will, ergeben sich AD und BD aus den Dreiecken CAD, CBD.

Sey für die erste Figur

$a = 312$, $b = 520$, $C = 65^0 27'$, $m = 32^0 52'$, $n = 23^0 25'$;

also $\alpha = 360^0 - (m + n + C) = 238^0 16'$.

$$\begin{aligned}
\log b &= 2\cdot7160033 \\
\log\sin n &= 9\cdot5992441 \\
E.\log a &= 7\cdot5058453 \\
E.\log\sin\alpha &= 0\cdot0703229\,(-) \\
E.\log\sin m &= \underline{0\cdot2654514} \\
\log\operatorname{cotg}\varphi &= 10\cdot1568670\,(-) \\
\varphi &= 145^0\ 7'46\cdot8'' \\
\alpha+\varphi &= 383^0 23' 46\cdot8''
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log\sin(\alpha+\varphi) &= 9\cdot5988880 \\
E.\log\sin\alpha &= 0\cdot0703229\,(-) \\
E.\log\sin\varphi &= \underline{0\cdot2428156} \\
\log\operatorname{cotg} x &= 9\cdot9120265\,(-) \\
x &= 129^0\,14'\,10\cdot2'' \\
y &= 109^0\ 1'49\cdot8''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log b &= 2\cdot7160033 \\
\log\sin x &= 9\cdot8890469 \\
E.\log\sin m &= \underline{0\cdot2654514} \\
\log CD &= 2\cdot8705016 \\
CD &= 742\cdot167
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log a &= 2\cdot4941546 \\
\log\sin y &= 9\cdot9755903 \\
E.\log\sin n &= \underline{0\cdot4007558} \\
\log CD &= 2\cdot8705007 \\
CD &= 742\cdot165.
\end{aligned}$$

Wäre hier $\alpha = 180^0$, d. h. auch $x + y = 180^0$, so wäre $\sin\alpha = 0$, also $\operatorname{cotg}\varphi = \infty$, $\varphi = 0$, also $\operatorname{cotg} x = \frac{0}{0}$, so dass $\operatorname{cotg} x$, also auch x nicht zu bestimmen wäre; in diesem Falle liegt aber D im Umfang des um ABC beschriebenen Kreises, in welchem Fall also die obige Aufgabe nicht angewendet werden kann.

Zur Uebung mögen folgende Angaben dienen:

(erste Figur) $a = 4963\cdot763$, $b = 6082\cdot769$, $C = 70^0\,15'\,36\cdot7''$, $m = 34^0\,52'\,10\cdot8''$, $n = 19^0\,29'\,12\cdot1''$, woraus: $x = 100^0 7'\,26\cdot3''$, $y = 135^0 15'\,34\cdot1''$, $CD = 10473\cdot931$, $AD = 7524\cdot162$, $BD = 6348\cdot204$.

(zweite Figur) $a = 1298\cdot365$, $b = 1248\cdot474$, $C = 126^0\,50'\,40\cdot3''$, $m = 33^0\,2'\,35\cdot4''$, $n = 18^0\,34'\,17\cdot1''$, woraus: $x = 49^0\,49'\,9\cdot3''$, $y = 25^0\,24'\,38\cdot5''$, $CD = 1749\cdot315$, $AD = 2271\cdot897$, $BD = 2830\cdot978$.

(dritte Figur) $a = 2277\cdot819$, $b = 2271\cdot897$, $C = 76^0\,57'\,30\cdot5''$, $m = 97^0\,8'\,15\cdot2''$, $n = 126^0\,50'\,40\cdot3''$, woraus: $x = 33^0\,2'\,35\cdot5''$, $y = 26^0\,0'\,58\cdot5''$, $CD = 1248\cdot474$, $AD = 1749\cdot315$, $BD = 1298\cdot365$.

Anmerkung. Die hier behandelte Aufgabe heisst gewöhnlich die Pothenot'sche; sie wurde wegen ihrer Wichtigkeit schon vielfach behandelt; u. A. von Lambert in seinen „Beiträgen" I. S. 73, von Burckhardt in der „monatlichen Correspondenz" 4. S. 359, und von Bessel in derselben Correspondenz 27. S. 222, welch letzterer eine analytische Auflösung gegeben. Auch Langsdorf in seinen Erläuterungen zur Kästner'schen Analysis S. 432 behandelt dieselbe Aufgabe. Bei der praktischen Wichtigkeit derselben wollen wir noch eine zweite Auflösung beifügen.

Man hat, wie oben:

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{b \sin n}{a \sin m}.$$

Man bestimme nun den Winkel φ so, dass

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sin n}{a \sin m},$$

so ist

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

woraus leicht folgt (vergl. §. 22):

$$\frac{\sin y - \sin x}{\sin y + \sin x} = \frac{\sin \varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1},$$

d. h.

$$\frac{2 \cos \left(\frac{x+y}{2}\right) . \sin \frac{y-x}{2}}{2 \sin \frac{x+y}{2} . \cos \frac{y-x}{2}} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^0) \text{ (§§. 14, 12)}$$

oder

$$\operatorname{tg} \frac{y-x}{2} . \operatorname{cotg} \frac{y+x}{2} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^0),$$

$$\operatorname{tg} \frac{y-x}{2} = \operatorname{tg} \frac{y+x}{2} . \operatorname{tg}(\varphi - 45^0) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha . \operatorname{tg}(\varphi - 45^0).$$

Ist $\varphi < 45^0$, so ist für $\operatorname{tg}(\varphi - 45^0)$ zu setzen $-\operatorname{tg}(45^0 - \varphi)$ (§. 13). Fällt $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha . \operatorname{tg}(\varphi - 45^0)$ positiv aus, so ist $\frac{y-x}{2}$ positiv, also $y > x$ und da gewiss $\frac{y-x}{2} < 90^0$, so bestimmt die obige Gleichung die Differenz $\frac{y-x}{2}$.

Würde $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha . \operatorname{tg}(\varphi - 45^0)$ negativ seyn, so wäre $x > y$ und man hätte eigentlich

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right) = -\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha . \operatorname{tg}(\varphi - 45^0).$$

In allen Fällen kennt man also $y - x$ und da man auch $y + x$ kennt, so kann man x und y bestimmen.

Anmerkung. Man übersieht leicht, dass die Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{(y-x)}{2} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}(\varphi - 45^0)$$

für alle Fälle dienen kann. Ist nämlich die zweite Seite positiv, so ist, wie angegeben, $y > x$ und $\frac{y-x}{2} < 90^0$, so dass also $\frac{y-x}{2}$ genau bestimmt ist. Ist dagegen die zweite Seite negativ, so wird, da $\frac{y-x}{2}$ nicht zwischen 90^0 und 180^0

liegen kann, nothwendig $\frac{y-x}{2}$ negativ, also zwischen 0^0 und -90^0 liegen. Bestimmt man also einen Winkel ψ zwischen 0^0 und 90^0 so, dass $tg\psi =$ der positiv genommenen zweiten Seite (d. h. $= -tg\frac{1}{2}\alpha\, tg(\varphi - 45^0)$), so ist $\frac{y-x}{2} = -\psi$, mithin $y - x = -2\psi$ bekannt. Da auch $y + x = \alpha$, so folgt hieraus $y = \frac{1}{2}\alpha - \psi$, $x = \frac{1}{2}\alpha + \psi$.

7) Sey wieder ein Dreieck ABC bekannt, also seine Seiten und Winkel gegeben; man habe eine beliebige Anzahl Standpunkte: $E_1, E_2, \ldots, E_n$ so beschaffen, dass man von E_1 aus nur A, B, E_2; von E_2 aus nur E_1, B, E_3; von E_3 aus nur E_2, B, E_4; ...., von E_n aus nur E_{n-1}, B, C sehen kann. Man misst die Winkel:

$$AE_1B,\ BE_1E_2,\ E_1E_2B,\ BE_2E_3,\ \ldots,\ E_{n-1}E_nB,\ BE_nC$$

und soll die Lage der Punkte $E_1, E_2, \ldots, E_n$ hieraus bestimmen.

Fig. 27.

Nennen wir die zwei an E_1 liegenden Winkel: α_1, α'_1; die an E_2: α_2, α'_2, ...; die an E_n: α_n, α'_n; ferner $BAE_1 = x$, $BCE_n = y$, $ABC = B$ (bekannt), so ist in dem Vielecke $BAE_1 \ldots E_nC$:

$$B + x + y + \alpha_1 + \alpha'_1 + \alpha_2 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha^n + \alpha'_n = (n+1)\,180^0,$$
$$x + y = (n+1)\,180^0 - [B + \alpha_1 + \alpha'_1 + \alpha_2 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha_n + \alpha'_n],$$

so dass jedenfalls $x + y = \beta$ bekannt ist. Nun ist, wenn $AB = c$, $BC = a$:

$$\left.\begin{aligned} c : BE_1 &= \sin\alpha_1 : \sin x \\ BE_1 : BE_2 &= \sin\alpha_2 : \sin\alpha'_1 \\ BE_2 : BE_3 &= \sin\alpha_3 : \sin\alpha'_2 \\ &\ldots \\ BE_{n-1} : BE_n &= \sin\alpha_n : \sin\alpha'_{n-1} \\ BE_n : a &= \sin y : \sin\alpha'_n \end{aligned}\right\}$$

hieraus: $c\,.\,BE_1\,.\,BE_2 \ldots BE_n : BE_1\,.\,BE_2 \ldots BE_n\,.\,a = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_n\,.\,\sin y : \sin x\,.\,\sin\alpha'_1\,.\,\sin\alpha'_2 \ldots \sin\alpha'_n$

d. h.

$$c : a = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_n\,.\,\sin y : \sin\alpha'_1 \sin\alpha'_2 \ldots \sin\alpha'_n\,.\,\sin x,$$

oder
$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{c\,.\,\sin\alpha'_1 \sin\alpha'_2 \ldots \sin\alpha'_n}{a \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_n},$$

oder da $y = \beta - x$:

$$\frac{\sin(\beta - x)}{\sin x} = \frac{c \sin\alpha'_1 \sin\alpha'_2 \ldots \sin\alpha'_n}{a\,.\,\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_n}.$$

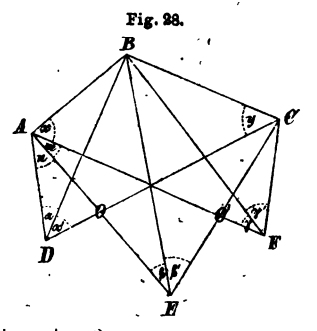
Bestimmt man also, wie in Nr. 6, einen Winkel φ so, dass

$$\cotg \varphi = \frac{c \sin \alpha'_1 \sin \alpha'_2 \dots \sin \alpha'_n}{a \,.\, \sin \beta \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_n},$$

so ist

$$\cotg x = \frac{\sin(\beta + \varphi)}{\sin \beta \sin \varphi}.$$

Dabei müssen wir jedoch $x < 180^0$ voraussetzen, oder zum Voraus wissen, dass diess der Fall ist. Die obige Gleichung bestimmt sodann x, also auch y. Daraus finden sich aber die Seiten BE_1, BE_2, ..., BE_n ganz leicht, und dessgleichen die Winkel, welche diese Linien an B machen.



8) In den Punkten A, D, E, F misst man die Winkel m, n, α, α', β, β', γ, γ'; man soll die gegenseitige Lage der sechs Punkte gegeneinander bestimmen, natürlich in der Voraussetzung, dass sie alle in derselben Ebene liegen.

Es ist zunächst leicht zu sehen, dass die Winkel DCE, ECF ebenfalls bekannt sind. Denn man hat:

$$DOA = EOC = 180^0 - (n + \alpha + \alpha'),$$

$$DCE = OCE = 180^0 - (EOC + \beta + \beta'),$$

also

$$DCE = n + \alpha + \alpha' - (\beta + \beta') = \delta,$$

$$EO'A = FO'C = 180^0 - (m + \beta + \beta'),$$

$$ECF = FCO' = 180^0 - (FO'C + \gamma + \gamma'),$$

also

$$ECF = m + \beta + \beta' - (\gamma + \gamma') = \delta'.$$

Würde man nun noch die Winkel FAB = x, DCB = y kennen, so wären, wie leicht ersichtlich, alle Winkel der Figur bekannt. Nun ist:

$$AB : BD = \sin \alpha : \sin(m + n + x), \quad BC : BD = \sin \alpha' : \sin y,$$

also durch Division:

$$\frac{AB}{BC} : 1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} : \frac{\sin(m + n + x)}{\sin y},$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \cdot \frac{\sin y}{\sin(m + n + x)}.$$

$$BF : BC = \sin(\delta + \delta' + y) : \sin \gamma', \quad BF : BA = \sin x : \sin \gamma,$$

$$1 : \frac{BA}{BC} = \frac{\sin x}{\sin(\delta + \delta' + y)} : \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma'},$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'} \cdot \frac{\sin(\delta+\delta'+y)}{\sin x}.$$

$$BA:BE = \sin\beta : \sin(m+x),\quad BC:BE = \sin\beta' : \sin(\delta+y)$$

$$\frac{AB}{BC}:1 = \frac{\sin\beta}{\sin\beta'} : \frac{\sin(m+x)}{\sin(\delta+y)},$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin\beta}{\sin\beta'} \cdot \frac{\sin(\delta+y)}{\sin(m+x)}.$$

Mithin:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} \cdot \frac{\sin y}{\sin(m+n+x)} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'} \cdot \frac{\sin(\delta+\delta'+y)}{\sin x}$$
$$= \frac{\sin\beta}{\sin\beta'} \cdot \frac{\sin(\delta+y)}{\sin(m+x)},$$

aus welchen zwei Gleichungen x und y zu bestimmen sind.

Man hat hieraus nun:

$$\frac{\sin\alpha\,.\,\sin\gamma'}{\sin\alpha'\sin\gamma} = \frac{\sin(\delta+\delta'+y)\,.\,\sin(m+n+x)}{\sin y\,.\,\sin x} =$$
$$\frac{[\sin(\delta+\delta')\cos y+\cos(\delta+\delta')\sin y][\sin(m+n)\cos x+\cos(m+n)\sin x]}{\sin y\,.\,\sin x}$$
$$= [\sin(\delta+\delta')\operatorname{cotg} y+\cos(\delta+\delta')][\sin(m+n)\operatorname{cotg} x+\cos(m+n)].$$

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta'}{\sin\alpha'\sin\beta} = \frac{\sin(\delta+y)\sin(m+n+x)}{\sin y\,.\,\sin(m+x)} =$$
$$\frac{[\sin\delta\cos y+\cos\delta\sin y]\,.\,[\sin(m+n)\cos x+\cos(m+n)\sin x]}{\sin y[\sin m\cos x+\cos m\sin x]}$$
$$= \frac{[\sin\delta\operatorname{cotg} y+\cos\delta][\sin(m+n)\operatorname{cotg} x+\cos(m+n)]}{\sin m\operatorname{cotg} x+\cos m}.$$

Die letzte Gleichung gibt

$$\operatorname{cotg} y[\sin(m+n)\operatorname{cotg} x+\cos(m+n)] =$$
$$\frac{\sin\alpha\sin\beta'}{\sin\alpha'\sin\beta}\left[\frac{\sin m\operatorname{cotg} x+\cos m}{\sin\delta}\right] - \operatorname{cotg}\delta[\sin(m+n)\operatorname{cotg} x+\cos(m+n)]$$

während aus der ersten folgt:

$$\operatorname{cotg} y[\sin(m+n)\operatorname{cotg} x+\cos(m+n)] =$$
$$\frac{\sin\alpha\,.\,\sin\gamma'}{\sin\alpha'\sin\gamma\sin(\delta+\delta')} - \operatorname{cotg}(\delta+\delta')[\sin(m+n)\operatorname{cotg} x+\cos(m+n)].$$

Setzt man diese beiden Grössen einander gleich, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung von cotg x, nämlich:

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta'}{\sin\alpha'\sin\beta\sin\delta}[\sin m \operatorname{cotg} x+\cos m]$$
$$-\operatorname{cotg}\delta[\sin(m+n)\operatorname{cotg} x+\cos(m+n)]$$
$$=\frac{\sin\alpha\sin\gamma'}{\sin\alpha'\sin\gamma\sin(\delta+\delta')}-\operatorname{cotg}(\delta+\delta')[\sin(m+n)\operatorname{cotg} x+\cos(m+n)]$$

d. h.

$$\operatorname{cotg} x\left[\frac{\sin\alpha\sin\beta'\sin m}{\sin\alpha'\sin\beta\sin\delta}-\operatorname{cotg}\delta\sin(m+n)+\operatorname{cotg}(\delta+\delta')\sin(m+n)\right]$$
$$=\frac{\sin\alpha\sin\gamma'}{\sin\alpha'\sin\gamma\sin(\delta+\delta')}-\operatorname{cotg}(\delta+\delta')\cos(m+n)$$
$$-\frac{\sin\alpha\sin\beta'\cos m}{\sin\alpha'\sin\beta\sin\delta}+\operatorname{cotg}\delta\cos(m+n),$$

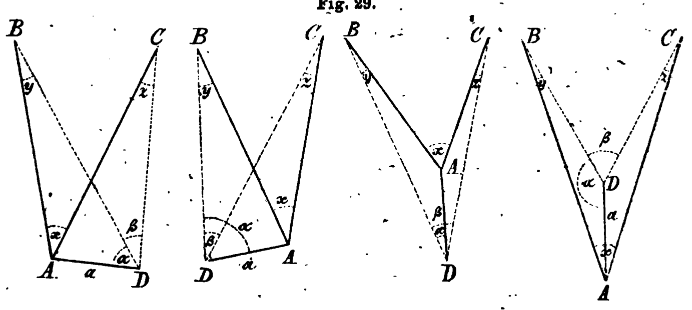
woraus cotg x ganz unzweideutig, also auch x ($< 180^0$) folgt. Ist cotg x bekannt, so gibt eine der obigen Gleichungen cotg y, also y.

Ist nun noch z. B. AB gegeben, so kann man leicht die sämmtlichen Linien der Figur berechnen.

Weitere Aufgaben dieser Art finden sich in der Sammlung von Meier Hirsch, auf die wir den Liebhaber verweisen.

9) (Zentriren der Winkel.) Man kennt die Längen von AB und AC und soll den Winkel BAC $= x$ messen, findet es jedoch nicht für geeignet, das Winkelmessinstrument in A aufzustellen, sondern in dem Punkte D. Man misst dort die Winkel BDC $= \beta$, und BDA $= \alpha$, nebst der Seite DA $=$ a, und soll hieraus x berechnen.

Fig. 29.



Sey ABD $=$ y, ACD $=$ z, so ist in der ersten Figur:

$$\sin y : \sin\alpha = a : AB,\ \sin y = \frac{a\sin\alpha}{AB},$$

$$\sin z : \sin(\alpha+\beta) = a : AC,\ \sin z = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{AC}.$$

Da y und z spitze Winkel sind, so kann man hieraus y und z berechnen (in der Regel ist nämlich a klein im Verhältniss zu AB und AC, so dass ganz sicher y und z spitz sind). Alsdann ist:

$$x + y = \beta + z, \; x = \beta + z - y.$$

In der zweiten Figur:

$$\sin y : \sin\alpha = a : AB, \; \sin y = \frac{a \sin\alpha}{AB},$$

$$\sin z : \sin(\alpha - \beta) = a : AC, \; \sin z = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{AC},$$

$$y + \beta = z + x, \; x = y + \beta - z.$$

In der dritten Figur:

$$\sin y : \sin\alpha = a : AB, \; \sin y = \frac{a \sin\alpha}{AB},$$

$$\sin z : \sin(\beta - \alpha) = a : AC, \; \sin z = \frac{a \sin(\beta - \alpha)}{AC},$$

$$y + \beta + z + 360^0 - x = 360^0, \; x = y + z + \beta.$$

In der vierten Figur:

$$\sin y : \sin\alpha = a : AB, \; \sin y = \frac{a \sin\alpha}{AB},$$

$$\sin z : \sin(360^0 - \alpha - \beta) = a : AC, \; \sin z = \frac{a \sin(360^0 - \alpha - \beta)}{AC},$$

$$y + x + z + 360^0 - \beta = 360^0, \; x = \beta - (y + z).$$

In der Regel werden y und z so klein ausfallen, dass man für sin y und sin z die zum Halbmesser 1 gehörigen Bögen setzen kann (§. 16). Werden dann y und z in Sekunden ausgedrückt, so ist:

$$y = \frac{a \sin\alpha}{AB} \cdot \frac{180.60.60}{\pi}, \; z = \begin{cases} \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{AC} \cdot \frac{180.60.60}{\pi} & \text{in der 1. Figur,} \\ \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{AC} \cdot \frac{180.60.60}{\pi} & \text{„ „ 2. „} \\ \frac{a \sin(\beta - \alpha)}{AC} \cdot \frac{180.60.60}{\pi} & \text{„ „ 3. „} \\ \frac{a \sin(360^0 - \alpha - \beta)}{AC} \cdot \frac{180.60.60}{\pi} & \text{„ „ 4. „} \end{cases}$$

worin $\log \frac{180 . 60 . 60}{\pi} = 5 \cdot 3144251.$ *

* Wir haben dabei, wie bereits mehrfach gezeigt, die Proportion

$$\pi : 180 . 60 . 60 = \frac{a \sin\alpha}{AB} : y$$

Sey für die erste Figur:

$$AB = 1568{\cdot}25,\ AC = 2335{\cdot}73,\ AD = 20,\ \alpha = 65^0\,30'\,18'',$$
$$\beta = 33^0\,13'\,47''.$$

$$\begin{array}{rlrl} \log a = & 1{\cdot}3010300 & \log a = & 1{\cdot}3010300 \\ \log\sin\alpha = & 9{\cdot}9590402 & \log\sin(\alpha+\beta) = & 9{\cdot}9949336 \\ E.\log AB = & 6{\cdot}8045846 & E.\log AC = & 6{\cdot}6315772 \\ \hline \log\sin y = & 8{\cdot}0646548 & \log\sin z = & 7{\cdot}9275408 \\ y = & 0^0\,39'\,53{\cdot}8'' & z = & 0^0\,29'\,5{\cdot}7'' \end{array}$$

---

vorausgesetzt, indem wir $\frac{a\sin\alpha}{AB}$ ($=\sin y$) als die Länge des zum Halbmesser 1 gehörigen Bogens betrachten, dessen Mittelpunktswinkel $=$ y Sekunden ist, während π der halbe Umfang ist, dessen Mittelpunktswinkel $180^0 = 180.60.60''$ beträgt. Wir bemerken hiebei, dass man oft obige Formeln in etwas anderer Weise schreibt. Da nämlich nach §. 15 ganz sicher $\sin 1'' = \frac{\pi}{180.60.60}$, so ist $\frac{180.60.60}{\pi} = \frac{1}{\sin 1''}$, und man kann also auch setzen:

$$y = \frac{a\sin\alpha}{AB\sin 1''},\ z = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{AC\,.\sin 1''}\ \text{u. s. w.}$$

Es hat diese Schreibweise manches Bequeme und kann daher mit Vortheil angewendet werden.

Wollen wir dieselbe etwas allgemeiner darstellen, so wird man also in folgender Weise verfahren:

Ist e die Länge eines zum Halbmesser 1 gehörigen Kreisbogens, so ist sein Mittelpunktswinkel in Sekunden $= \frac{e}{\sin 1''}$; ist dagegen s die Anzahl Sekunden, welche der Mittelpunktswinkel misst, so ist $s\,.\sin 1''$ die Länge des ihn umspannenden Kreisbogens vom Halbmesser 1 $\left(\text{d. h. } \operatorname{arc} n'' = n\,.\sin 1'',\ n = \frac{\operatorname{arc} n''}{\sin 1''},\ \operatorname{arc} 1'' = \sin 1''\right)$.

Hat man ferner die Gleichung

$$\sin x = \delta,$$

und ist δ sehr klein (positiv), so ist der Winkel x in Sekunden $= \frac{\delta}{\sin 1''}$, wobei jedoch letztere Grösse noch unter 1740 liegen muss (29 Minuten nach §. 16); hat man eben so

$$\operatorname{tg} x = \delta$$

und ist δ sehr klein, so ist x in Sekunden $= \frac{\delta}{\sin 1''} = \frac{\delta}{\operatorname{tg} 1''}$, da $\sin 1'' = \operatorname{tg} 1''$. Dabei soll aber diese Zahl nicht über 1380 gehen (23 Minuten), da, wie man leicht findet, der Fehler noch nicht auf die siebente Dezimale Einfluss hat, wenn man $\operatorname{tg} 23' = \operatorname{arc} 23'$ setzt (d. h. auch $n = \frac{\sin n''}{\sin 1''} = \frac{\operatorname{tg} n''}{\operatorname{tg} 1''}$, wenn n nicht über 1740 oder 1380, woraus auch $\sin n'' = n\sin 1''$, $\operatorname{tg} n'' = n\operatorname{tg} 1'' = n\,.\sin 1''$).

oder auch:

$$\begin{aligned} \log a &= 1{\cdot}30103 \\ \log \sin(\alpha + \beta) &= 9{\cdot}99493 \\ E.\log AC &= 6{\cdot}63158 \\ \log \frac{180 . 60 . 60}{\pi} &= 5{\cdot}31442 \\ \hline & 3{\cdot}24196 \end{aligned}$$

$$z = 1745{\cdot}7'' = 29' 5{\cdot}7''.$$

$$x = \beta + z - y = 33^0 2' 58{\cdot}9''.$$

Zur Uebung legen wir vor:

(zweite Figur) $a = 2{\cdot}345$, $AB = 236{\cdot}54$, $AC = 143{\cdot}62$,
$\alpha = 106^0 42' 32''$, $\beta = 68^0 57' 13''$, woraus $x = 68^0 55' 29''$.

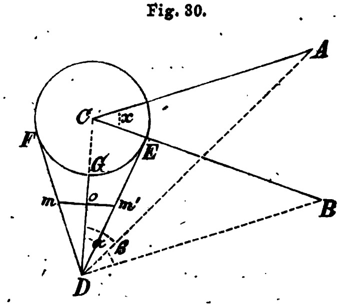
(dritte Figur) $a = 4{\cdot}823$, $AB = 6827{\cdot}5$, $AC = 9834{\cdot}9$,
$\alpha = 10^0 24' 30''$, $\beta = 35^0 28' 40''$, woraus $x = 35^0 29' 49{\cdot}17''$.

(vierte Figur) $a = 10{\cdot}82$, $\log AB = 3{\cdot}82573$, $\log AC = 3{\cdot}92734$,
$\alpha = 150^0 30' 40''$, $\beta = 65^0 22' 10{\cdot}25''$, woraus $x = 65^0 16' 51{\cdot}53''$.

Um AD zu erhalten ist es oft nothwendig, weitere Hülfsmittel anzuwenden. Das einfachste und meist angewandte ist das in Nr. 1 angegebene Verfahren, die Länge der Linie AB in der dortigen Figur zu messen.

Anmerkung. Hieher gehört auch die folgende Aufgabe: Von dem Mittelpunkte C eines kreisrunden Thurmes aus soll man den Winkel ACB messen, wobei AC und BC als bekannt vorausgesetzt werden. Natürlich kann das Instrument nicht in C aufgestellt werden, was desshalb in D geschieht, wo man ADB = β misst; man soll nun hieraus ACB = x ermitteln.

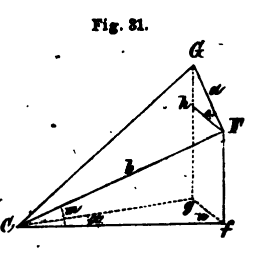
Fig. 30.



Von D aus denke man sich an den Umfang des Thurms die zwei Tangenten DF, DE gezogen, nehme auf ihnen Dm = Dm' und ziehe mm', das in O halbirt werde. Die Linie DO ist nun gegen den Mittelpunkt C gerichtet und DC = DG + Halbmesser des Thurms. Misst man also noch ADG = α, so kann x wie oben ermittelt werden.

10) Wenn man vermittelst des Theodolithen Winkel misst, so werden, welches auch die Visirpunkte seyn mögen, nicht die eigentlichen Winkel, sondern nur deren Horizontalprojektionen gemessen — was für die geodätischen Operationen auch gerade nothwendig ist.

Gesetzt nun in C seye ein Theodolith aufgestellt, und man solle einen Punkt F als Zielpunkt wählen, wobei Cf die Horizontalprojek-



tion von CF sey. Statt des Punktes F habe man aber den Zielpunkt G gewählt, so gelegen, dass $FG = a$, und Winkel $GFh = \alpha$, wenn Fh horizontal ist (wobei wir α negativ nehmen würden, wenn G tiefer läge als F). Sey ferner $FCf = m$, $Cfg = n$, wenn Cg die Projektion von CG ist, und $CF = b$, so sind a, α, b, m, n als bekannt anzunehmen. Der Winkel $fCg = x$ ist nun der Fehler wegen des unrichtigen Zielpunkts.

Nun ist $Fh = fg = a\cos\alpha$, $Cf = b\cos m$, und man kennt also im Dreiecke Cfg die Seiten fg, Cf und den Winkel $Cfg = n$, so dass das Dreieck berechnet werden kann. Man hat darin

$$\sin x : \sin(x+n) = a\cos\alpha : b\cos m,$$

$$\frac{\sin(x+n)}{\sin x} = \frac{b\cos m}{a\cos\alpha}, \quad \sin(x+n) = \frac{b\cos m}{a\cos\alpha}\sin x.$$

Nun ist x immer sehr klein, wenigstens für die gewöhnlichen Anwendungen; also darf man $\cos x = 1$ und $\sin x$ seinem Bogen (zum Halbmesser 1) gleich setzen (§. 16). Wird x in Sekunden ausgedrückt, so ist dieser Bogen $= \frac{x}{\varrho}$, $\varrho = \frac{180.60.60}{\pi}$; mithin

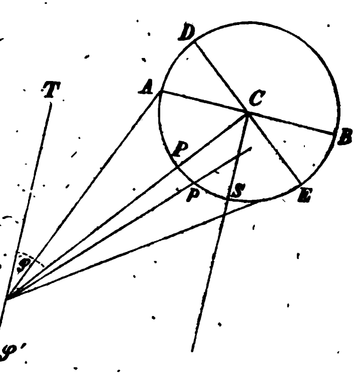
$$\frac{x}{\varrho}\cos n + \sin n = \frac{b\cos m}{a\cos\alpha} \cdot \frac{x}{\varrho}, \quad x'' = \varrho \cdot \frac{a\cos\alpha\sin n}{b\cos m - a\cos\alpha\cos n}.$$

Da a im Verhältniss zu b, und auch, da m immer klein, zu $b\cos m$, sehr klein ist, so ist diese Grösse näherungsweise gleich $\varrho \cdot \frac{a\cos\alpha . \sin n}{b\cos m}$, welche Formel man gewöhnlich aufstellt.

Liegen F und G in derselben Horizontalebene, so ist $\alpha = 0$ und $x = \varrho\frac{a\sin n}{b\cos m - a\cos n} = \varrho\frac{a\sin n}{b\cos m}$ ungefähr. Da meistens m nur sehr klein, so wird man auch $\cos m = 1$ setzen können, und dann hat man:

$$x = \varrho\frac{a\sin n}{b} = \frac{a\sin n}{b}\, 206264{\cdot}8 \text{ Sekunden.}$$

Eine gleichfalls hieher gehörige Aufgabe ist die folgende: Von einem ziemlich entfernten Punkte O aus sollte die Mitte C eines runden Thurms beobachtet werden; man beobachtet desshalb die Mitte der von der Sonne erleuchteten Hälfte und wird dabei einen kleinen Fehler begehen, der zu berechnen ist.



Ist nämlich SC die Richtung der den Thurm beleuchtenden Sonnenstrahlen, so wird, wenn AB senkrecht auf SC steht, die Hälfte BSA erleuchtet seyn.

Von O aus kann man, wenn DE senkrecht auf OC, nur die Hälfte ESD sehen, oder da AD nicht erleuchtet ist, nur ESA. Statt also auf die Mitte P von ESD (d. h. nach C) zu zielen, wird man mithin das Fernrohr auf die Mitte d von ESA gerichtet haben, und dadurch den Fehler POp begehen, der zu ermitteln ist.

Kann man von O aus die Sonne sehen, so denke man sich S′T parallel SC (d. h. S′T ist die Richtung der in O fallenden Sonnenstrahlen) und messe den Winkel S′OC, was freilich nicht ganz genau geschehen kann, indem man nach p statt P zielt, aber auch diesen Winkel nicht mit der allergrössten Genauigkeit brauchen wird. Alsdann kennt man auch $COT = \varphi = 180^0 - COS'$. Endlich wird man (genau genug) OC = OA annehmen dürfen, und wenn man $OC = d$ als bekannt voraussetzt, auch $OA = d$ haben; der Halbmesser des Thurms sey r. Der Winkel $AOp = pOE$ werde mit u, POp mit θ bezeichnet. In dem Dreiecke OAC ist nun:

$$AC : OA = \sin AOC : \sin OCA,$$

d. h. da $AC = r$, $OA = d$, $AOC = (u - \theta)$, $OCA = OCD - ACD = 90^0 - OCS = 90^0 - \varphi$:

$$r : d = \sin(u - \theta) : \cos\varphi, \quad \sin(u - \theta) = \frac{r\cos\varphi}{d}.$$

Im Dreiecke COE ist eben so:

$$CE : OE = \sin COE : \sin ECO,$$

d. h.

$$r : d = \sin(u + \theta) : \sin 90^0, \quad \sin(u + \theta) = \frac{r}{d}.$$

Da $u - \theta$ und $u + \theta$ spitze Winkel sind, so werden dieselben hieraus erhalten, und da $\frac{r}{d}$ sehr klein ist, so braucht man φ keineswegs genau zu kennen. In der Regel wird man setzen können:

$$u - \theta = \frac{\varrho r \cos\varphi}{d}, \quad u + \theta = \frac{r\varrho}{d},$$

woraus
$$\theta = \frac{\varrho r}{d}\left(\frac{1 - \cos\varphi}{2}\right) = \frac{\varrho r}{d}\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi \text{ (in Sekunden).}$$

Dauert die Beobachtung einige Zeit, so wird φ sich ändern, da die Sonne sich am Himmel fortbewegt; man wird also COS' im Anfang und Ende der Beobachtung messen und aus beiden Resultaten das Mittel nehmen. Man wird sich leicht die Auflösung konstruiren für eine andere gegenseitige Lage der Sonne und des Punktes O.

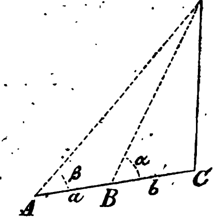
§. 37.

11). CD ist ein vertikal stehender Gegenstand auf einem Abhang CA; die Linie AC ist gegen den Fuss C desselben gerichtet. Man messe nun $AB = a$, $BC = b$, so wie die Winkel $DAC = \beta$, $DBC = \alpha$, so kann man CD finden.

Denn in dem Dreiecke ABD ist $ADB = \alpha - \beta$ und

$$a : BD = \sin(\alpha - \beta) : \sin\beta, \quad BD = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Fig. 33.



In dem Dreiecke DBC kennt man nun BD, $BC = b$, und $BDC = \alpha$, kann also nach §. 25 die Seite CD finden. (Wäre hier $b = 0$, so hätte man bis an C gemessen und müsste noch den Winkel DCA kennen. Würde nun AC sich unter dem Winkel γ gegen den Horizont neigen, so wäre $ACD = 90^0 + \gamma$ und also $CD = \frac{a \sin\beta}{\cos(\beta + \gamma)}$, woraus auch $a = \frac{CD \cos(\beta + \gamma)}{\sin\beta}$ folgt, vermittelst welcher Formel die Entfernung AC bei bekannter Höhe CD gefunden werden könnte. Für $\gamma = 0$, d. h. für ein horizontales AC, wäre $AC = CD \operatorname{cotg}\beta$.)

12) Kann man (in der vorigen Figur) die Linie BC nicht messen, so messe man in A den Neigungswinkel der Linie AC gegen den Horizont,* ist derselbe $= \gamma$, so ist der Winkel $DCA = 90^0 + \gamma$, und in dem Dreiecke DBC hat man jetzt:

* Unter Horizont verstehen wir hier die unbegränzte Ebene, welche uns auf einem nicht durch Erhöhungen unterbrochenen Landstrich zu umgeben scheint und an deren äussersten Enden die Gränzen zwischen Himmel und Erde zu liegen

$$DB : DC = \sin(90^0 + \gamma) : \sin\alpha,$$

$$DC = \frac{BD \cdot \sin\alpha}{\cos\gamma} = \frac{a \sin\beta \cdot \sin\alpha}{\cos\gamma \cdot \sin(\alpha - \beta)}.$$

Würde AC, statt anzusteigen, sich unter dem Winkel γ neigen, so wäre $DCA = 90^0 - \gamma$, die Formel bliebe aber dieselbe. Ist AC selbst horizontal, so ist $\gamma = 0$, also:

$$DC = \frac{a \sin\beta \sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

13) Kann man nicht gegen den Fusspunkt hin messen, so messe man die Standlinie CD, die gegen den Horizont unter dem Winkel $DCE = \alpha$ geneigt sey, und stelle sich die Aufgabe, die Erhöhung des Punktes B über C zu finden.

Fig. 34.

Sey nun A′ der Punkt der Vertikalen BA, in welchem sie die durch C gehende Horizontalebene ECA′ trifft; man messe den Winkel $BCA' = \beta$, die Linie $CD = a$, so wie in C und D die beiden Horizontalwinkel $A'CE = \gamma$, $CEA' = \delta$ (§. 36, Nr. 10). Alsdann ist $CE = a \cos\alpha$.

In dem Dreiecke A′CE kennt man $CE = a \cos\alpha$, die beiden Winkel $A'CE = \gamma$, $CEA' = \delta$, also

$$A'C : CE = \sin\delta : \sin(\gamma + \delta), \quad A'C = \frac{a \cos\alpha \sin\delta}{\sin(\gamma + \delta)}.$$

Endlich in dem rechtwinkligen Dreiecke BCA′:

$$A'B = A'C \operatorname{tg}\beta = \frac{a \cos\alpha \sin\delta \operatorname{tg}\beta}{\sin(\gamma + \delta)}.$$

---

scheinen. Diese Ebene steht also senkrecht auf der nach dem Zenith (vergl. die Note zu §. 36, Nr. 4) gerichteten Geraden. Die horizontale Lage einer Ebene wird bekanntlich durch die Wasserwage bestimmt, während die vertikale Richtung einer Linie, d. h. die Richtung nach dem Zenith, durch das Bleiloth angegeben wird. Zuweilen pflegt man die so eben mit dem Namen Horizont belegte Ebene auch den scheinbaren Horizont zu nennen, während unter wahrem Horizonte dann die wirkliche Erdfläche verstanden wird. (Man vergleiche übrigens die Note zu §. 23, Nr. 3 der zweiten Abtheilung, wo eine andere Erklärung der letzten Benennung gegeben ist. In jedem Falle wird man übrigens sogleich erkennen, in welcher Bedeutung das Wort Horizont genommen ist.)

Hätte man eben so den Winkel $ACA' = \beta'$ gemessen, so wäre

$$AA' = \frac{a \cos \alpha \sin \delta \operatorname{tg} \beta'}{\sin (\gamma + \delta)},$$

also

$$AB = A'B - AA' = \frac{a \cos \alpha \sin \delta}{\sin (\gamma + \delta)} (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta') = \frac{a \cos \alpha \sin \delta \sin (\beta - \beta')}{\sin (\gamma + \delta) \cos \beta \cos \beta'}.$$

Läge A tiefer als A′, so wäre $+ \operatorname{tg} \beta'$ zu setzen und man hätte statt der vorhergehenden Formel:

$$AB = \frac{a \cos \alpha \sin \delta \sin (\beta + \beta')}{\sin (\gamma + \delta) . \cos \beta . \cos \beta'}. \text{*}$$

D kann höher oder tiefer liegen als C, d. h. α kann positiv oder negativ seyn, das Resultat ist dasselbe.

Will man nach dieser Methode z. B. die Höhe eines Kirchthurms, der sich in einem Thale befindet, von einer benachbarten Höhe herab, die über der Spitze des Thurms liege, messen, so werden die beiden Winkel β und β' negativ seyn, wenn man die erste Formel anwenden will; will man dagegen die zweite anwenden, so ist β negativ und kleiner als β'. Z. B.:

$$a = 357{\cdot}3,\ \alpha = -3^0 48' 10'',\ \beta = -13^0 5' 49'',\ \beta' = -20^0 18' 9'',$$
$$\gamma = 85^0 37' 14'',\ \delta = 79^0 13' 12'',$$

also

$$AB = \frac{357{\cdot}3 . \cos 3^0 48' 10'' \sin 79^0 13' 12'' \sin 7^0 12' 20''}{\sin 164^0 50' 26'' . \cos 13^0 5' 49'' \cos 20^0 18' 9''}.$$

14) Die drei Punkte A, B, C liegen in derselben Geraden, die mit dem Punkte E in der nämlichen Horizontalebene sich befindet. Man misst $AB = a$, $BC = b$, nebst den drei Höhenwinkeln $FAE = \alpha$, $FBE = \beta$, $FCE = \gamma$; man soll daraus die vertikale Höhe $FE = x$ finden.

Fig. 35.

Man hat in den Dreiecken FEA, FEB, FEC:

$$AE = \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha},\ BE = \frac{x}{\operatorname{tg} \beta},\ EC = \frac{x}{\operatorname{tg} \gamma}.$$

Ferner ist $EBA = 180^0 - EBC$, $\cos EBA = -\cos EBC$; aber da (§. 22):

$$\cos EBA = \frac{BE^2 + AB^2 - AE^2}{2 BE . AB},\ \cos EBC = \frac{EB^2 + BC^2 - EC^2}{2 EB . BC},$$

so ist

* D. h. in der frühern Formel tritt $-\beta'$ an die Stelle von β'.

$$\frac{\frac{x^2}{tg^2\beta}+a^2-\frac{x^2}{tg^2\alpha}}{\frac{2x}{tg\beta}.a}=-\frac{\frac{x^2}{tg^2\beta}+b^2-\frac{x^2}{tg^2\gamma}}{\frac{2x}{tg\beta}.b}$$

woraus: $(a^2 tg^2\alpha tg^2\beta tg^2\gamma + x^2 tg^2\alpha tg^2\gamma - x^2 tg^2\beta tg^2\gamma) b$

$$= (x^2 tg^2\alpha tg^2\beta - b^2 tg^2\alpha tg^2\beta tg^2\gamma - x^2 tg^2\alpha tg^2\gamma) a$$

$$x^2[b tg^2\alpha tg^2\gamma - b tg^2\beta tg^2\gamma - a tg^2\alpha tg^2\beta + a tg^2\alpha tg^2\gamma]$$

$$= -(a b^2 + a^2 b) tg^2\alpha tg^2\beta tg^2\gamma$$

$$= -a b (a+b) tg^2\alpha tg^2\beta tg^2\gamma,$$

$$x = \frac{tg\alpha tg\beta tg\gamma \sqrt{ab(a+b)}}{\sqrt{[b tg^2\gamma(tg^2\beta - tg^2\alpha) + a tg^2\alpha(tg^2\beta - tg^2\gamma)]}}.$$

Aber aus §. 14 folgt

$$tg^2\beta - tg^2\alpha = \frac{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}{\cos^2\beta\cos^2\alpha},$$

$$tg^2\beta - tg^2\gamma = \frac{\sin(\beta+\gamma).\sin(\beta-\gamma)}{\cos^2\beta.\cos^2\gamma},$$

also

$$x = \frac{tg\alpha tg\beta tg\gamma \sqrt{ab(a+b)}}{\sqrt{\left[\frac{b tg^2\gamma \sin(\beta+\alpha).\sin(\beta-\alpha)}{\cos^2\beta\cos^2\alpha} + a\frac{tg^2\alpha.\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)}{\cos^2\beta\cos^2\gamma}\right]}}$$

$$= \frac{tg\alpha tg\beta tg\gamma . \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \sqrt{ab(a+b)}}{\sqrt{[b tg^2\gamma\cos^2\gamma\sin(\beta+\alpha).\sin(\beta-\alpha) + a tg^2\alpha.\cos^2\alpha\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)]}}$$

$$= \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sqrt{ab(a+b)}}{\sqrt{[b\sin^2\gamma\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) + a\sin^2\alpha\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)]}}.$$

Wir wollen hier wieder ein Zahlenbeispiel beifügen, was wir bei obigen, so leicht zu berechnenden Formeln unterlassen haben. Sey also:

$a = 2350$, $b = 1650$, $\alpha = 2^0 7'$, $\beta = 5^0 9' 30''$, $\gamma = 3^0 18' 10''$, also
$a + b = 4000$, $\beta + \alpha = 7^0 16' 30''$, $\beta - \alpha = 3^0 2' 30''$,
$\beta + \gamma = 8^0 27' 40''$, $\beta - \gamma = 1^0 51' 20''$.

$\log b = 3{\cdot}2174839$	$\log a = 3{\cdot}3710679$
$2\log\sin\gamma = 7{\cdot}5210324$	$2\log\sin\alpha = 7{\cdot}1348620$
$\log\sin(\beta+\alpha) = 9{\cdot}1025428$	$\log\sin(\beta+\gamma) = 9{\cdot}1677251$
$\log\sin(\beta-\alpha) = 8{\cdot}7247850$	$\log\sin(\beta-\gamma) = 8{\cdot}5102754$
$0{\cdot}5658441 - 2$	$0{\cdot}1839304 - 2$
$I = 0{\cdot}03679968$	$II = 0{\cdot}01527321$

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}=0{\cdot}05207289$$
$$\log(\mathrm{I}+\mathrm{II})=0{\cdot}7166117-2$$
$$\tfrac{1}{2}\log(\mathrm{I}+\mathrm{II})=0{\cdot}3583058-1.$$
$$\log\sin\alpha=8{\cdot}5674310$$
$$\log\sin\beta=8{\cdot}9537999.$$
$$\log\sin\gamma=8{\cdot}7605162$$
$$\tfrac{1}{2}\log a=1{\cdot}6855339$$
$$\tfrac{1}{2}\log b=1{\cdot}6087419$$
$$\tfrac{1}{2}\log(a+b)=1{\cdot}8010300$$
$$E\tfrac{1}{2}\log(\mathrm{I}+\mathrm{II})=9{\cdot}6416941+1$$
$$\log x=2{\cdot}0187470$$
$$x=104{\cdot}411$$

15) Man soll, indem man die horizontale Standlinie MN = a gemessen hat, die Erhebung der zwei Punkte A, B über MN, so wie ihren horizontalen Abstand A′B′ bestimmen.

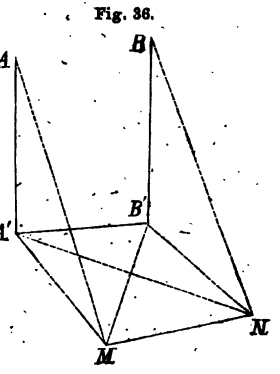


Fig. 36.

Man messe (A′, B′ in derselben Horizontalebene wie MN) in M die Winkel AMA′, A′MB′, A′MN; in N die Winkel BNB′, B′NA′, B′NM, so kennt man in dem Dreiecke MNA′ eine Seite MN und die zwei Winkel A′MN, A′NM = B′NM — B′NA′, kann also NA′ und MA′ berechnen; in dem Dreiecke MNB′ kennt man die Seite MN, die Winkel B′NM, NMB′ = A′MN — A′MB′, kann also B′N berechnen. In dem Dreiecke A′NB′ kennt man nun A′N, B′N nebst A′NB′, kann also A′B′ finden. AA′, BB′ ergeben sich aus den rechtwinkligen Dreiecken AMA′, BNB′.

§. 38.

Bei den Höhenmessungen, von denen wir in §. 37 einige Beispiele gegeben haben, sind zwei Voraussetzungen gemacht worden, nämlich dass das, was wir den Horizont genannt haben, eine Ebene sey, oder vielmehr, dass die Erhöhung eines Punkts B über einen Punkt A nichts Anderes sey, als die Erhöhung des Punkts B über die durch A gelegte Horizontalebene, und zweitens, dass man im Stande sey, den Höhenwinkel richtig zu messen, d. h. dass der

Lichtstrahl von dem Punkte B nach dem in A befindlichen Fernrohr oder Auge in gerader Linie gelange. Beide Voraussetzungen sind zulässig, in so weit die vorkommenden Entfernungen nicht beträchtlich sind. Bei grösseren Entfernungen sind sie aber nicht anzunehmen. Die Erdoberfläche ist keine Ebene, sondern eine krumme Fläche, und der Lichtstrahl beschreibt in der Luft keine gerade Linie, sondern eine krumme, deren hohle Seite gegen die Erdoberfläche gewendet ist.

Wir wollen diese beiden hier in Betracht zu ziehenden Thatsachen etwas näher in's Auge fassen. Denken wir uns, die ganze Erde wäre mit Wasser bedeckt, so würde die Oberfläche dieses Universalmeeres eine krumme Fläche seyn, die entsteht, wenn eine Ellipse um ihre kleinere Achse sich dreht. Da nun die Erde nicht ihrer ganzen Oberfläche nach mit Wasser bedeckt ist, so wird diese regelmässige Fläche Unterbrechungen erleiden, und Theile von ihr werden nur da vorhanden sein, wo die Voraussetzung verwirklicht ist, d. h. in den Weltmeeren. Man wird sich desshalb unter dem festen Lande hin diejenige krumme Oberfläche, von der die Spiegel der Meere ein Theil sind, fortgesetzt denken, und so unter dem Festlande das erhalten, was man die Meeresfläche nennt. Ist C irgend ein Punkt des festen Landes und man zieht von demselben auf die (so eben näher bezeichnete) Meeresfläche eine Senkrechte, so bildet die Länge derselben die Erhöhung des betreffenden Punktes über der Meeresfläche.

Der bei der Umdrehung der Ellipse um ihre kleine Achse von der grossen Achse beschriebene Kreis bildet den Aequator, während die Drehachse das bildet, was man die Erdachse nennt.

Die Länge der grössten Achse, also der Durchmesser des Erdäquators, beträgt nach den neuesten und zuverlässigsten Messungen und Berechnungen 6544154·3 Toisen, während die kleine Achse, also die Erdachse, 6522278·7 Toisen beträgt. Bezeichnen wir die Hälften dieser Grössen mit a und b, so ist also

$$a = 3272077{\cdot}1, \quad b = 3261139{\cdot}3 \text{ Toisen.}$$

Bei allen Messungen der höhern Geodäsie handelt es sich nur um die Entfernungen zweier Punkte, die auf die Meeresfläche reduzirt sind. Da man (§. 36, Nr. 10) vermittelst des Theodolithen ohnehin nur Horizontalwinkel misst, so wird die Berechnung

der Messungen sofort diese Entfernungen geben, unter denen man also die Entfernung derjenigen zwei Punkte versteht, in denen die von den eigentlichen Punkten auf die Meeresfläche gezogenen Senkrechten diese Fläche treffen, natürlich diese Entfernung als eine kürzeste, auf der krummen Meeresfläche liegende Linie aufgefasst. Wir heissen sie kurzweg die **geodätische Entfernung** der Punkte auf der Erdoberfläche*.

Betrachten wir nun einen Punkt C des festen Landes, fällen von demselben auf die Meeresfläche eine Senkrechte, so wird diese, bis an das Himmelsgewölbe verlängert, letzteres im Zenith des Punktes C treffen (§. 36, Nr. 4). Die nämliche Senkrechte wird mit der Ebene des Aequators einen gewissen Winkel machen, den man die **geographische Breite** des Punktes C nennt. Die geographische Breite und Zenithdistanz (§. 36, Nr. 4) des Nordpols, d. h. des Durchschnittspunktes der verlängerten Erdachse mit dem Himmelsgewölbe, machen zusammen 90° aus. Von dem Fusspunkte C′ der von C auf die Meeresfläche gezogenen Senkrechten aus sey auf letzterer irgend eine kürzeste Linie nach einem andern Punkte D′ gezogen, der als Fusspunkt der von einem Punkte D des Festlandes auf die Meeresfläche gezogenen Senkrechten angesehen werde. Angenommen die Länge der (krummen) Linie C′D′ sey nicht gar zu gross (sie kann jedoch bis 10 Meilen betragen), so lehrt die höhere Mathematik, dass man dieselbe nahezu als einen Kreisbogen ansehen dürfe, dessen Halbmesser r durch die Formel

$$r = \frac{ab^2}{[a^2(1-e^2\sin^2\varphi)\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \qquad (a)$$

gegeben ist, worin φ die geographische Breite von C (besser von der Mitte von C′D′), α der 180° nicht übersteigende Winkel ist, den C′D′ mit dem Meridian in C′ (besser, den C′D′ mit dem durch die Mitte von C′D′ gezogenen Meridian) macht, und wo $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ ist. Man hat desshalb $\log e^2 = 7{\cdot}8244104 - 10$, und $b^2 = a^2(1-e^2)$, so dass auch

$$r = \frac{a^3(1-e^2)}{[a^2\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2\varphi) + a^2(1-e^2)\sin^2\alpha]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

---

* Man vergleiche hiemit §. 43.

$$= \frac{a(1-e^2)}{[1-e^2(1-\cos^2\alpha\cos^2\varphi)]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}. \quad \text{(b)}$$

Die Grösse α ist, wenn man Linien wählt, die in grossen geodätischen Operationen erhalten wurden, bekannt; andernfalls jedoch nicht und es ist sehr umständlich, diselbe direkt zu messen; man wird desshalb einen Mittelwerth wählen können, etwa $\alpha = 45^0$, was von überaus grossem Einflusse nicht ist, da $\cos^2\alpha$ noch mit der kleinen Grösse e^2 multiplizirt ist.

In unsern nachfolgenden Rechnungen werden wir die Grösse $\frac{1}{r}$ häufig erscheinen sehen; sie ist

$$\frac{1}{r} = \frac{(1-e^2+e^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{a(1-e^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{a} + \frac{e^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi}{a(1-e^2)}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$$

Wenn, wie diess gestattet ist, die Grösse e^4 nicht mehr beachtet wird, so ist:

$$\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi} = 1-\tfrac{1}{2}e^2\sin^2\varphi, \quad \frac{1}{1-e^2} = 1+e^2,$$

also

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi}{a} + \frac{e^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi}{a}(1+e^2)(1-e^2\sin^2\varphi)$$

$$= \frac{1-\frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi}{a} + \frac{e^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi}{a}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{e^2}{a}(\cos^2\alpha\cos^2\varphi - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi)$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{e^2}{2a}(2\cos^2\alpha\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{e^2}{2a}[2(1-\sin^2\alpha)\cos^2\varphi - \sin^2\varphi]$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{e^2}{2a}[2\cos^2\varphi - 2\sin^2\alpha\cos^2\varphi - \sin^2\varphi]$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{e^2}{2a}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \frac{e^2}{2a}\cos^2\varphi(1-2\sin^2\alpha),$$

d. h.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{e^2}{2a}\cos 2\varphi + \frac{e^2}{2a}\cos^2\varphi\cos 2\alpha, \quad \text{(c)}$$

oder auch
$$r=\frac{a}{1+\frac{1}{2}e^2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}e^2\cos 2\alpha\cos^2\varphi} \quad (d)$$

Wollte man einen Mittelwerth $\alpha = 45^0$ gelten lassen, so würde $\cos\alpha$ ausfallen und also bloss
$$r=\frac{a}{1+\frac{1}{2}e^2\cos 2\varphi} \quad (e)$$
sein, was jedoch sicher nicht ganz genau wäre, da das Glied $\frac{1}{2}e^2\cos 2\alpha\cos^2\varphi$ von derselben Art ist, wie $\frac{1}{2}e^2\cos 2\varphi$. Da α zwischen 0 und 180^0 schwankt, so sind die äussersten Werthe von r:
$$\frac{a}{1+\frac{1}{2}e^2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}e^2\cos^2\varphi} \text{ und } \frac{a}{1+\frac{1}{2}e^2\cos 2\varphi-\frac{1}{2}e^2\cos^2\varphi},$$
von $\frac{1}{r}$:
$$\frac{1}{a}+\frac{e^2}{2a}\cos 2\varphi+\frac{e^2}{2a}\cos^2\varphi,$$
$$\frac{1}{a}+\frac{e^2}{2a}\cos 2\varphi-\frac{e^2}{2a}\cos^2\varphi=\frac{1}{a}-\frac{e^2}{2a}\sin^2\varphi.$$
und das arithmetische Mittel zwischen den letzten zwei Grössen würde allerdings auf
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{e^2}{2a}\cos 2\varphi \quad (f)$$
und also auch auf (e) führen. Bayer in der „Küstenvermessung" (S. 431, 488) verfährt übrigens in dieser Weise, wenn er gleich die obige, offenbar bequemere Formel nicht angibt.

Für Karlsruhe ist $\varphi = 49^0$, also wenn man nach der Formel (e) rechnet:

$\log e^2 = 7{\cdot}82441$
$\log\cos 2\varphi = 9{\cdot}14356(-)$
$E.\log 2 = 9{\cdot}69897$
$6{\cdot}66694(-)$
$\frac{1}{2}e^2\cos 2\varphi = -0{\cdot}0004644$
$1+\frac{1}{2}e^2\cos 2\varphi = 0{\cdot}9995355$

$\log a = 6{\cdot}5148235$
$E.\log(1+\frac{1}{2}e^2\cos 2\varphi) = 9{\cdot}0002017+1$
$\log r = 6{\cdot}5150252$
$\log\frac{1}{r} = 3{\cdot}4849747-10$*

Wollte man eine mittlere Breite $\varphi = 45^0$ annehmen, so wäre für $\alpha = 45^0$ auch $r = a$, welchen Werth man mithin ohne bedeuten-

* Hiebei ist vorausgesetzt, dass die Maasse Toisen (à 6 pariser Fuss) seien; wird der Meter als Maasseinheit gewählt, so erhält man $\log r = 6{\cdot}8048452$, bei badischen Fuss: $\log r = 7{\cdot}3277238$ ($r = 21{,}267{,}858$ bad. Fuss).

den Fehler häufig anwenden kann. Puissant (Traité de Géodésie I. pag. 441) setzt gar $\alpha = 90^0$, also nimmt bei $\varphi = 45^0$: $r = \frac{a}{1 - \frac{1}{4}e^2}$, was beweist, wie willkührlich hiebei verfahren wird. Ohne bedeutenden Fehler wird man, wie gesagt, $r = a$ setzen können, was $\varphi = \alpha = 45^0$ entspricht, ohne natürlich damit zu meinen, dass die genauern Formeln (c) und (d) nicht besser angewendet werden, wenn es möglich ist.

Häufig bedarf man des Werthes von r, wenn eine Länge C′D′ in Winkel verwandelt werden soll, d. h. wenn man anzugeben hat, wie gross der Winkel am Mittelpunkt des Kreises vom Halbmesser r ist, dem die Bogenlänge $C'D' = S$ zugehört. In Secunden ist er offenbar:

$$\frac{S.180.60.60}{r\pi} = \frac{S.180.60.60}{a\pi}[1 + \tfrac{1}{4}e^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{4}e^2\cos 2\alpha\cos^2\varphi]. \quad (g)$$

oder wenn man ganz kurz rechnen wollte:

$$\frac{S.180.60.60}{a\pi}, \text{ wo } \varphi = \alpha = 45^0 \text{ vorausgesetzt ist.}$$

§. 39.

Was nun den zweiten Punkt, dessen wir in §. 38 erwähnten, betrifft, so wurde dort schon gesagt, dass der Lichtstrahl in der Luft keine gerade Linie beschreibe, vielmehr sein Weg eine krumme gegen die Erde hin hohle Linie sey. Geht also von einem Punkte M ein Lichtstrahl aus und gelangt derselbe nach A, so ist der von ihm durchlaufene Weg etwa die krumme Linie AM. Die Folge davon ist, dass man den Punkt M nicht an seinem wahren Orte, sondern nach der Richtung AM′ zu sehen glaubt, wenn AM′ die in A die krumme Linie AM berührende Gerade ist. Stellt ZA die durch A gehende Senkrechte auf die Meeresfläche dar (also die Vertikale in A), ebenso MC die Senkrechte auf die Meeresfläche in M, so wird man (ohne merklichen Irrthum) annehmen dürfen, die beiden schneiden sich im Mittelpunkte C des Kreises, der durch die kürzeste Linie auf der Erdoberfläche geht, die zwischen den beiden Vertikalen ZA, MC gezo-

Fig. 37.

Z M′ M A C

gen ist, und dessen Halbmesser wir in §. 38 zu bestimmen gelehrt haben. Verlängert man AZ bis an das Himmelsgewölbe, so stellt Z das Zenith von A dar, und MAZ wäre die wahre Zenithdistanz von M. Statt des (geradlinigen) Winkels MAZ misst man aber den kleinern M'AZ, oder die scheinbare Zenithdistanz. Ist letztere $= z$, it ferner Δz der Winkel MAM', ζ die wahre Zenithdistanz MAZ, so ist also

$$\zeta = z + \Delta z.$$

Was Δz anbelangt, so haben Theorie und Erfahrung bewiesen, dass man näherungsweise annehmen dürfe, es sey dieser Winkel proportional dem Winkel C am Mittelpunkte des oben angeführten Kreises, so dass man setzen kann

$$\Delta z = kC,$$

wo k ein konstanter, übrigens von dem Zustande der Luft abhängiger Koeffizient ist. In Bezug auf diesen Koeffizienten glaubt Struve (Höhenunterschied des kaspischen und schwarzen Meeres S. CVI) folgenden Ausdruck für denselben setzen zu dürfen:

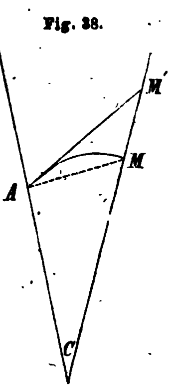
$$k = 0{\cdot}072383\left[1 + \frac{1{\cdot}7932}{H}\right] \cdot \frac{B}{736{\cdot}586} \cdot 1{\cdot}014819^{16-t},$$

worin H die mittlere Höhe der Beobachtungslinie in Metern über den Boden, B die Höhe des Barometerstandes in Millimeter am Beobachtungsort, t die Temperatur der Luft nach Réaumur bedeutet. Wäre die Temperatur der Luft in hunderttheiligen Graden angegeben, so träte an die Stelle von $1{\cdot}014819^{16-t}$ alsdann $1{\cdot}011838^{20-t}$. Als mittlern Werth des Koeffizienten k hätte man hiernach 0·0724; nach andern Angaben ist er zwischen 0·0556 bis 0·1 enthalten. Bessel (Gradmessung in Ostpreussen S. 197) setzt k = 0·0685; Gauss wählt k = 0·0653; die Angaben Bayers in der Küstenvermessung schwanken von 0·0876 bis 0·0619; die Franzosen setzen nach Corabeuf k = 0·0643 u. s. w.

Wie bereits oben gesagt, muss zu jeder beobachteten Zenithdistanz eines Punktes z (= M'AZ) noch $\Delta z = kC$ addirt werden, um die wahre Zenithdistanz MAZ zu erhalten; umgekehrt wird, wenn der Höhenwinkel des Punktes M gemessen wurde, der mit der Zenithdistanz 90° ausmacht, von diesem kC subtrahirt werden müssen, um den wahren Höhenwinkel zu erhalten. Ist s die geodätische Entfernung der Punkte A und M, so ist (§. 38) in Sekunden

$$C = \frac{s \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}{r\pi}, \Delta z = \frac{ks \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}{r\pi}.$$

§. 40.



Gesetzt nun die Höhe des Punktes A über der Meeresfläche sey h, die von M über der Meeresfläche h'; r habe dieselbe Bedeutung wie oben, z sey die in A beachtete Zenithdistanz von M, also $z = M'AZ$, $MAM' = kC$, also $MAZ = z + kC$, s sey die geodätische Entfernung der Punkte A und M, so ist in dem Dreiecke CAM der Winkel CAM $= 180^0 - (z + kC)$, mithin (§. 22, (29)):

$$r + h : r + h' = \sin[C + 180^0 - (z + kC)] : \sin[180^0 - (z + kC)]$$
$$= \sin[z + (k-1)C] : \sin(z + kC).$$
$$r + h' = (r + h) \cdot \frac{\sin(z + kC)}{\sin[z + (k-1)C]}.$$

Subtrahirt man beiderseitig $r + h$, so erhält man:

$$h' - h = (r + h) \cdot \frac{\sin(z + kC) - \sin[z + (k-1)C]}{\sin[z + (k-1)C]}$$
$$= \frac{2(r + h)\cos\left[z + \frac{(2k-1)}{2}C\right]\sin\frac{C}{2}}{\sin[z + (k-1)C]} \text{ (§. 14).}$$

Nun ist C immer sehr klein, man wird also ohne merklichen Fehler $\sin\frac{C}{2} = \frac{s}{2r}$ setzen können (§. 16), mithin erhalten:

$$h' - h = \frac{r + h}{r} s \frac{\cos\left[z + \frac{2k-1}{2}C\right]}{\sin[z + (k-1)C]},$$

oder da $\frac{r+h}{r} = 1 + \frac{h}{r}$ und $\frac{h}{r}$ sicherlich verschwindend klein ist:

$$h' - h = \frac{s \cdot \cos\left[z + \frac{2k-1}{2}C\right]}{\sin[z + (k-1)C]} \quad (37)$$

Diese Formel gibt für alle Fälle der Praxis mit vollkommen hinreichender Schärfe den Höhenunterschied der zwei Punkte M und A, also die Erhöhung (oder Senkung) von M über A.

Wollte man statt der geodätischen Entfernung s (§. 38) die von A aus gemessene Entfernung s' nehmen*, so wäre $\sin\frac{C}{2}=\frac{s'}{2(r+h)}$ und man sieht, dass die Formel (37) dieselbe bliebe. Es ist dies auch natürlich, da s und s' kaum von einander unterschieden sind, wenn $\frac{h}{r}$ verschwindend klein ist. Man wird also (37) immer anwenden können, auch wenn s die letztere Bedeutung hat, ja sogar in diesem Falle mit grösserer Sicherheit.

Die Formel (37) lässt sich auch noch etwas anders auslegen. Man hat nämlich:

$$\frac{\cos\left[z+\frac{2k-1}{2}C\right]}{\sin[z+(k-1)C]}=\frac{\cos[z+kC]\cos\frac{C}{2}+\sin[z+kC]\,.\sin\frac{C}{2}}{\sin[z+kC]\cos C-\cos[z+kC]\sin C}.$$

Beachet man nun, dass im Nenner, für die gewöhnlichen Fälle, $\cos(z+kC)$ klein, weil $z+kC$ nahe an 90^0, $\sin C$ klein, weil C es ist, so kann man das Glied $\cos(z+kC)\sin C$ gegen $\sin(z+kC)\cos C$ vernachlässigen. Setzt man dann noch $\cos C=1$, $\cos\frac{C}{2}=1$, $\sin\frac{C}{2}=\frac{s}{2r}$, so hat man ungefähr:

$$\frac{\cos\left[z+\frac{2k-1}{2}C\right]}{\sin[z+(k-1)C]}=\operatorname{cotg}[z+kC]+\frac{s}{2r},$$

also

$$h'-h=s\,.\operatorname{cotg}(z+kC)+\frac{s^2}{2r},\qquad(37')$$

welches die gewöhnliche Formel ist. Dabei ist $s\operatorname{cotg}(z+kC)$ die Erhöhung von M über die durch A gehende, auf AC senkrecht stehende Ebene (Horizont von A) und $\frac{s^2}{2r}$ pflegt die Korrektion

---

* Dabei ist vorausgesetzt, dass die Entfernung s' auf einer mit der Meeresfläche parallelen Fläche gemessen worden. Bei den meisten Messungen wird man aber diese Länge nicht geradezu erhalten, sondern die Entfernung des Punktes A von M reduzirt auf den Horizont von A, d. h. die Länge der Geraden, welche in der durch A gelegten Horizontalebene den Punkt A mit dem Fusspunkt der Senkrechten verbindet, die man von M aus auf dieselbe Ebene fällt. Selbst bei den bedeutendsten Entfernungen wird man jedoch, ohne irgend merklichen Fehler, letztere Grösse für erstere nehmen können.

wegen der Erdkrümmung, oder auch die Reduktion auf den wahren Horizont genannt zu werden. Es folgt aus der Formel (37′) übrigens ein weit wichtigeres Resultat. Berechnet man nämlich, nachdem die gemessenen Höhenwinkel wegen der Strahlenbrechung (Refraktion) korrigirt sind, nach den früheren Methoden (§. 37) die Erhöhung eines Punktes M über A, so hat man zu der so gefundenen Erhöhung die Grösse $\frac{s^2}{2r}$ zu addiren, um zu finden, um wie viel eigentlich M über A liege.

Fig. 39.

Einige Beispiele mögen dies klar machen.

In dem in §. 37, Nr. 13 betrachteten Falle sey gemessen worden:

$CD = a = 2693$ bad. Fuss, $\delta = 122^0 32' 15''$, $\gamma = 55^0 33' 19''$, $\beta = 1^0 18' 25''$; $\alpha = 0$.

Zunächst muss man nun A′C suchen; zu dem Ende hat man:

$$\log a = 3{\cdot}4302364$$
$$\log \sin \delta = 9{\cdot}9258480$$
$$E.\log \sin(\gamma + \delta) = 1{\cdot}4778014$$
$$\log s = 4{\cdot}8338858.$$

$$\log s = 4{\cdot}8338858$$
$$\log \frac{180.60.60}{\pi} = 5{\cdot}3144251$$
$$E.\log r = 2{\cdot}6722761 \text{ (§.38)}$$
$$2{\cdot}8205870$$
$$C = 661{\cdot}58''$$

Hier ist $k = 0{\cdot}0653$.

$$kC = 43{\cdot}1''$$
$$\beta - kC = 1^0 17' 42''.$$

$$\log s = 4{\cdot}8338858$$
$$\log tg(\beta - kC) = 8{\cdot}3542211$$
$$3{\cdot}1881069$$
$$A'B = 1542{\cdot}08$$

$$2 \log s = 9{\cdot}66777$$
$$E.\log 2r = 2{\cdot}37124$$
$$2{\cdot}03901$$
$$\frac{s^2}{2r} = 109{\cdot}39$$

Wirkliche Erhöhung von B über C $= A'B + \frac{s^2}{2r} = 1651{\cdot}47$ bad. F.

Zur Anwendung der Formel (37) wollen wir folgendes Beispiel wählen:

$\log s = 3{\cdot}3563886$, $z = 89^0 55' 26{\cdot}3''$, $k = 0{\cdot}0734$, $\log \frac{180.60.60}{2r\pi} = 8{\cdot}49824 - 10$.

$$\log s = 3{\cdot}35639 \qquad\qquad \log s = 3{\cdot}3563886$$

$$\log \frac{180 \, . \, 60^2}{2 r \pi} = 8{\cdot}49824 \qquad \log \cos \left(z + \frac{2k-1}{2} C\right) = 7{\cdot}2105300$$

$$\overline{1{\cdot}85463} \qquad \text{E} . \log \sin [z + (k-1) C] = \underline{0{\cdot}0000008}$$

$$\frac{C}{2} = 71{\cdot}55'' \qquad\qquad 0{\cdot}5669194$$

$$(1-k) C = 2' 12{\cdot}57'' \qquad h' - h = 3{\cdot}6891.$$

$$(1-2k) \frac{C}{2} = 1' 1{\cdot}03''$$

$$z + \frac{2k-1}{2} C = 89^0 \, 54' \, 25{\cdot}3''.$$

$$z + (k-1) C = 89^0 \, 53' \, 13{\cdot}7''$$

Ferner: $\log s = 3{\cdot}8764582$, $z = 90^0 \, 9' \, 2{\cdot}7''$, $k = 0{\cdot}0685$, $\log \frac{180 \, . \, 60 \, . \, 60}{2 r \pi} = 8{\cdot}49824 - 10$, gibt $h' - h = -12{\cdot}337$, also eine Senkung.

§. 41.

Um der Korrektion wegen der Strahlenbrechung, die immer etwas unsicher ist, auszuweichen, pflegt man oft gleichzeitige Zenithdistanzen zu nehmen. In diesem Falle nämlich wird nicht nur (Figur 38) die Zenithdistanz des Punktes M in A, sondern auch zur nämlichen Zeit (d. h. unter denselben atmosphärischen Verhältnissen) die Zenithdistanz des Punktes A in M beobachtet. Sind also die zwei Punkte so gelegen, dass man wirklich den atmosphärischen Zustand in beiden als denselben anzusehen berechtigt ist, so wird die Grösse k in beiden Punkten dieselbe seyn. Ist mithin z die beobachtete Zenithdistanz des Punktes M in A, z' die von A in M, so sind die wahren Zenithdistanzen beider Punkte $z + kC$, $z' + kC$ und in dem Dreiecke ACM kennt man die Seite $AC = r + h$, nebst den drei Winkeln C, $180^0 - (z + kC)$, $180^0 - (z' + kC)$. Da diese letztern zusammen 180^0 betragen müssen, so ist

$$z + z' + 2kC = 180^0 + C, \quad k = \frac{180^0 + C - (z + z')}{2C},$$

woraus k gefunden wird, wenn C bekannt ist. Man hat nun (§. 23):

$$2r + h + h' : h' - h = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (z' - z),$$

$$h' - h = (2r + h + h') \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (z' - z),$$

also wenn wie in §. 39 $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \sin\frac{1}{2}C = \frac{s}{2r}$:

$$h' - h = \left(1 + \frac{h' + h}{2r}\right) s \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z' - z),$$

d. h., wenn man $\frac{h' + h}{2r}$ vernachlässigt:

$$h' - h = s \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z' - z), \quad (38)$$

nach welcher Formel bei gleichzeitigen Zenithdistanzen der Höhenunterschied berechnet zu werden pflegt. Die Genauigkeit ist jedoch, bei der Unsicherheit der Voraussetzungen, in der Regel nicht sehr gross.

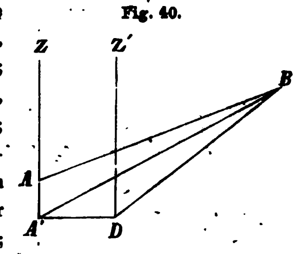
Auch die Formel (37) pflegt man noch etwas kürzer zu fassen. Da nämlich der im Nenner vorkommende Winkel nahezu dem im Zähler vorkommenden gleich ist, so hat man ungefähr:

$$h' - h = s \operatorname{cotg}\left(z + \frac{2k - 1}{2} C\right), \quad (39)$$

welche Formel jedoch natürlich minder genau ist, als (37).

Anmerkung. Es ist hiebei offenbar vorausgesetzt, dass die Winkelmessinstrumente in denselben Punkten aufgestellt seyen, nach welchen hin visirt wurde. Häufig ist diess unmöglich, wenn z. B. die Spitze eines Thurms u. s. w. der Visirpunkt war. Alsdann stellt man das Instrument entweder senkrecht unter den betreffenden Punkt oder in die durch den Punkt und den anzuvisirenden Punkt gehende Verticalebene und misst dort die Zenithdistanz. Da man die Lage des Instruments in Bezug auf den Punkt, in dem es aufgestellt werden sollte, kennt, so ist es nicht schwer, aus der Messung die eigentliche Zenithdistanz zu erhalten. Sey nämlich A der Punkt, in dem das Instrument aufgestellt werden sollte; D der, in dem es aufgestellt wird; B der Zielpunkt, so dass A, D, B in derselben Vertikalebene liegen; ferner liege A′ in der durch D gehenden Horizontalebene. Man misst die Zenithdistanz von B in D = z_0 und soll die von B in A = z finden. Der Winkel Z′DB ist also = $z_0 + kC$, ZAB = $z + kC$; man kennt ferner A′B, A′D, hat also sin A′DB : sin A′BD = A′B : A′D, sin A′BD $= \frac{A'D \cdot \sin A'DB}{A'B}$. Da nun A′D immer klein, so wird man wohl A′DB = $90^0 + z_0$ und A′B = s (§. 38) setzen können, also

Fig. 40.



$$\sin A'BD = \frac{A'D \cos z_0}{s}$$

erhalten, woraus A′BD folgt. Dann ist BA′D = $90^0 - (z_0 + kC + A'BD)$, ZA′B = $z_0 + kC + A'BD$. Ferner hat man im Dreiecke ABA′ : sin AA′B : sin ABA′

$= AB : AA'$, d. h. $\sin ABA' = AA' . \frac{\sin AA'B}{AB}$, worin AA' bekannt, $AA'B = z_0 + A'BD$ angenommen werden kann, und ebenso AB ohne merklichen Irrthum $= s$ gesetzt werden darf, so dass

$$\sin ABA' = \frac{AA' . \sin(z_0 + A'BD)}{s},$$

und dann

$$ZAB = z + kC = AA'B + ABA',$$

d. h. da $A'D$ und AA' immer klein im Verhältniss zu s, also $A'BD = \frac{A'D . \cos z_0}{s} \varrho$ (wenn $\varrho = \frac{180.60.60}{\pi}$ Sekunden), $ABA' = \frac{AA' \sin(z_0 + A'BD)}{s} \varrho$:

$$z + kC = z_0 + kC + \frac{A'D \cos z_0}{s} \varrho + \frac{AA'}{s} \sin\left[z_0 + \frac{A'D \cos z_0}{s} \varrho\right] \varrho,$$

$$z = z_0 + \frac{A'D \cos z_0}{s} \varrho + \frac{AA'}{s} \sin\left[z_0 + \frac{A'D \cos z_0}{s} \varrho\right] \varrho$$

$$= z_0 + \frac{A'D \cos z_0}{s} \varrho + \frac{AA' \sin z_0}{s} \varrho,$$

wenn man auch noch $\frac{A'D}{s} \cos z_0 \, \varrho$ neben z_0 vernachlässigt.

Ist D in A', so ist $A'D = 0$, also bloss

$$z = z_0 + \frac{AA'}{s} \sin z_0 . \varrho$$

Wir haben hiebei D tiefer als A vorausgesetzt; im entgegengesetzten Falle hätte man $- AA'$ für AA' zu setzen; läge A' zwischen D und B, so wäre eben so $- A'D$ für $A'D$ zu setzen.

Es mag von Interesse seyn, hier die Lösung einiger Aufgaben beizufügen, die vermöge des Obigen ziemlich leicht ist.

1) Ein Punkt (Thurm, Berg) ist um H höher, als die um ihn (seinen Fuss) sich ausbreitende unbegränzte Ebene (also z. B. die Meeresfläche); wie weither kann er noch gesehen werden?

In dem entferntesten Punkte der Ebene, in dem der fragliche Punkt noch sichtbar ist, muss seine scheinbare Zenithdistanz 90^0 betragen (in Figur 38 wäre also M der fragliche Punkt, A der letzte Punkt der Ebene, von dem aus er noch sichtbar ist, $ZAM' = 90^0$). Da jetzt $h' - h = H$, so ist also in (37), wo nun $z = 90^0$:

$$H = \frac{s . \sin \frac{1 - 2k}{2} C}{\cos(1 - k) C},$$

oder da $C = \frac{\varrho s}{r}$, wo $\varrho = \frac{180.60.60}{\pi}$ nnd C in Sekunden gegeben ist:

$$H = \frac{s \cdot \sin\left(\frac{1-2k}{2r}\varrho s\right)}{\cos\left(\frac{1-k}{r}\varrho s\right)},$$

aus welcher Gleichung s zu bestimmen ist. Näherungsweise kann man $\cos\frac{(1-k)}{r}\varrho s = 1$ setzen und hat dann

$$H = s \cdot \sin\frac{1-2k}{2r}\varrho s = s \cdot \frac{s(1-2k)}{2r} = \frac{1-2k}{2r}s^2,$$

$$s = \sqrt{\frac{2rH}{1-2k}}. \quad \text{(a)}$$

Hat man hiernach s bestimmt, so wird man ohne Fehler diesen Werth in $\sin\left[\frac{1-2k}{2r}\varrho s\right]$ und $\cos\frac{(1-k)\varrho s}{r}$ setzen dürfen und dann erhalten:

$$s = \frac{H \cos\left\{\frac{1-k}{r}\varrho\sqrt{\frac{2rH}{1-2k}}\right\}}{\sin\left\{\frac{1-2k}{2r}\varrho\sqrt{\frac{2rH}{1-2k}}\right\}}, \quad \text{(b)}$$

wenn man ja einen genauern Werth noch zu erhalten wünschte.

Natürlich drückt s auch die Entfernung desjenigen Punktes aus, den man von dem Thurme aus am Rande des Horizonts erblickt. Steht man also auf einem Punkte, dessen Höhe über der Meeresfläche $= H$, und erblickt am Rande des Horizonts das Meer, so gibt (a) oder (b) die Entfernung des Standpunkts vom Meeresufer an.

Bei der Unsicherheit in der Bestimmung von k (und r) wird übrigens weder die Formel (a) noch (b) bedeutende Genauigkeit gewähren, so dass man sich immer mit (a) begnügen kann.

Anmerkung. Bei Beobachtungen auf dem Meere hat man die Depression des Meereshorizonts, d. h. den Winkel zu bestimmen, den der von dem äussersten sichtbaren Rande der Meeresfläche kommende Lichtstrahl mit der Horizontalebene im Beobachtungsorte macht. Ist H die Höhe des letztern über der Meeresfläche, so gibt s in der Formel (a) die Entfernung des äussersten Randes an. Ist μ die Depression, so wird $90^0 + \mu$ die scheinbare Zenithdistanz des äussersten Randes im Beobachtungsorte seyn, so dass also in der Formel (39) zugleich $z = 90^0 + \mu$, $s = \sqrt{\frac{2rH}{1-2k}}$, $C = \frac{s}{r}\varrho$ ist. Da dort ferner $h' = 0$ (Meeresfläche), $h = H$, so hat man:

$$-H = \sqrt{\frac{2rH}{1-2k}} \cot g\left[90^0 + \mu - \frac{1-2k}{2} C\right],$$

d. h.

$$\sqrt{\frac{1-2k}{2r}} \sqrt{H} = tg\left(\mu - \frac{1-2k}{2} C\right).$$

Da der Winkel $\mu - \frac{1-2k}{2} C$ immer klein ist, so hat man ungefähr

$$tg\left(\mu - \frac{1-2k}{2} C\right) = \frac{\mu}{\varrho} - \frac{1-2k}{2} \frac{s}{r},$$

also

$$\mu = \varrho\left[\sqrt{\frac{1-2k}{2r}} \sqrt{H} + \frac{1-2k}{2} \sqrt{\frac{2H}{(1-2k)r}}\right]$$

$$= \varrho \sqrt{H}\left[\sqrt{\frac{1-2k}{2r}} + \sqrt{\frac{1-2k}{2r}}\right],$$

d. h.

$$\mu = \varrho \sqrt{H} . \sqrt{\frac{2(1-2k)}{r}},$$

wodurch diese Depression (in Sekunden) bestimmt ist.

2) Zwischen zwei Höhenpunkten A und B, deren Entfernung S ist, und deren Höhen über der Meeresfläche H und H' seyn mögen, liegt eine Höhe C, in der Entfernung s von A, deren Erhöhung über der Meeresfläche h ist. Man fragt, ob man B noch von A aus sehen könne, oder ob es von C verdeckt sey.

Wir wollen zunächst die Zenithdistanz z bestimmen, unter der C von A aus erscheinen muss. Nach (39), welche Formel für uns bequemer ist, hat man (ungefähr):

$$h - H = s . \cot g\left[z - \frac{1-2k}{2} C\right] = s\, tg\left[90^0 - z + \frac{1-2k}{2r} s\varrho\right],$$

woraus z zu bestimmen ist (und auch bestimmt werden kann). Da in der Regel der Winkel $90^0 - z + \frac{1-2k}{2r} s\varrho$ klein ist, so wird man nahezu die Tangente dem Bogen gleichsetzen können (§. 15) d. h. haben:

$$h - H = s\left[\frac{90^0 - z}{\varrho} + \frac{1-2k}{2r} s\right],\ 90^0 - z = \frac{h-H}{s} \varrho - \frac{1-2k}{2r} s\varrho,$$

wodurch $90^0 - z$ gegeben wird. Bestimmt man nun in der Entfernung S von A eine Höhe h' so, dass sie in A unter derselben Zenithdistanz (z) wie C erscheint, so wird C dieselbe genau decken. Aus (39) folgt aber:

$$h' - H = S\, tg\left[90^0 - z + \frac{1-2k}{2r} S\varrho\right] = S\left[\frac{90^0 - z}{\varrho} + \frac{1-2k}{2r} S\right],$$

oder, wenn man für $90^0 - z$ seinen Werth setzt:

$$h' = H + \frac{S}{s}(h - H) + \frac{1-2k}{2r}(S^2 - Ss).$$

Ist nun $H' > h'$, so kann man B von A aus sehen; sonst nicht.

Sey z. B. $S = 30{,}000$ Toisen, $H = 100$, $H' = 200$, $s = 10{,}000$, $h = 104{\cdot}54$, $\log\left(\frac{1-2k}{2r}\right) = 3{\cdot}12292$, so wird $h' = 193{\cdot}29$, und also ragt B noch $6{\cdot}71$ ($= H' - h'$) Toisen über C hinaus.

3) Zwischen zwei Punkten A und B, deren Höhen über der Meeresfläche H und H' seyen, liegt das Meer; man wünscht zu wissen, wie weit sie von einander entfernt seyn müssen, um gerade noch am Rande des Horizonts von einander aus bemerkt zu werden.

Die gesuchte Entfernung beider sey S, so muss also B, von A aus gesehen, mit dem Meereshorizont verschwimmen. Ist dieser in der Entfernung s, so muss nach Nr. 1: $s = \sqrt{\frac{2rH}{1-2k}}$ seyn. In der vorigen Aufgabe ist also $s = \sqrt{\frac{2rH}{1-2k}}$, $h = 0$, $h' = H'$, also:

$$H' - H = -\frac{S}{s}H + \frac{1-2k}{2r}(S - s)S,$$

$$H' = -H\frac{(S-s)}{s} + \frac{1-2k}{2r}(S - s)S, \; s = \sqrt{\frac{2rH}{1-2k}}.$$

Hieraus:

$$\frac{1-2k}{2r}S^2 - \left(\frac{1-2k}{2r}s + \frac{H}{s}\right)S = H' - H$$

$$S^2 - \left(s + \frac{2Hr}{(1-2k)s}\right)S = \frac{(H'-H)2r}{1-2k}$$

$$S = \tfrac{1}{2}\left[s + \frac{2Hr}{(1-2k)s}\right] \pm \sqrt{\frac{(H'-H)2r}{1-2k} + \tfrac{1}{4}\left[s + \frac{2Hr}{(1-2k)s}\right]^2}.$$

Nun ist

$$\frac{2rH}{(1-2k)s} = s, \; s + \frac{2rH}{(1-2k)s} = 2s,$$

$$\tfrac{1}{4}\left[s + \frac{2Hr}{(1-2k)s}\right]^2 = s^2 = \frac{2rH}{1-2k}, \; \tfrac{1}{2}\left[s + \frac{2rH}{(1-2k)s}\right] = s,$$

also

$$S = s \pm \sqrt{\frac{2rH'}{1-2k}} = \sqrt{\frac{2rH}{1-2k}} \pm \sqrt{\frac{2rH'}{1-2k}}.$$

In dieser Formel ist nur das obere Zeichen zulässig, da S > s, mithin endlich

$$S = \sqrt{\frac{2r}{1-2k}}[\sqrt{H} + \sqrt{H'}].$$

Es folgt aus den obigen Formeln sehr leicht eine Bestimmungsweise von k durch die Erfahrung für jede Beobachtungszeit. Befindet man sich nämlich an einem Orte und beobachtet die Zenithdistanz eines zweiten Ortes, dessen Entfernung s vom ersten, und dessen Erhöhung h über demselben bekannt ist, so hat man nach (39):

$$h = s \cdot \cot g\left[z + \frac{2k-1}{2}C\right],$$

woraus k gefunden werden kann.

§. 42.

1) Von einem Dreieck ABC, das vollständig gegeben ist, soll durch eine Linie DE, die mit AC den gegebenen Winkel α mache, ein Stück CDE = F abgeschnitten werden.

Fig. 41.

Sey CD = x, CE = y, so ist (§§. 22, 28):

$$\frac{xy\sin C}{2} = F, x:y = \sin(\alpha + C):\sin\alpha;$$

hieraus folgt:

$$y = \frac{x\sin\alpha}{\sin(\alpha+C)}, \frac{x^2\sin\alpha\sin C}{2\sin(\alpha+C)} = F, x = \sqrt{\frac{2F\sin(\alpha+C)}{\sin\alpha\sin C}},$$

$$y = \sqrt{\frac{2F\sin\alpha}{\sin(\alpha+C)\cdot\sin C}}.$$

Hiedurch sind x und y, also DE genau bestimmt. Natürlich darf $\alpha + C$ nicht > 180°, da sonst die Aufgabe unmöglich wäre. Fiele hiebei y > CB aus, so würde DE nicht mehr die CB schneiden, sondern die AB, also etwa die Lage DE′ haben; in diesem Falle müsste die Rechnung anders geführt werden.

Man hätte jetzt, wenn AE′ = z, AD = u, und Δ die Fläche des Dreiecks, wobei F das Stück CDE′B:

$$\frac{uz\sin A}{2} = \Delta - F, u:z = \sin[180^0 - \alpha + A]:\sin\alpha, z = \frac{u\sin\alpha}{\sin(\alpha - A)},$$

$$\frac{u^2\sin A\sin\alpha}{2\sin(\alpha - A)} = \Delta - F, u = \sqrt{\frac{2(\Delta - F)\sin(\alpha - A)}{\sin\alpha\sin A}},$$

$$z = \sqrt{\frac{2(\varDelta - F)\sin\alpha}{\sin(\alpha - A)\,.\,\sin A}}.$$

Man sieht leicht, wie man zu verfahren hat, wenn mehrere Stücke abgeschnitten werden sollten.

Sey z. B. $AC = 1200$, $BC = 1000$, $C = 52^0$, so ist die Fläche des Dreiecks

$$\frac{1200\,.\,1000}{2}\sin 52^0 = 472806.$$

Gesetzt nun, es solle dasselbe in vier Stücke abgetheilt werden, die sich wie $8:7:16:19$ verhalten, und zwar durch Linien, welche AC unter den Winkeln 60^0, 40^0, 55^0 schneiden. Die Inhalte der Stücke sind:

$$\frac{472806\,.\,8}{50} = 75648{\cdot}96, \quad \frac{472806\,.\,7}{50} = 66192{\cdot}84,$$
$$= F_1 \qquad\qquad = F_2$$
$$\frac{472806\,.\,16}{50} = 151297{\cdot}92, \quad \frac{472806\,.\,19}{50} = 179666{\cdot}28.$$
$$= F_3 \qquad\qquad = F_4$$

Sind x_1, x_2, x_3 die Entfernungen von C der Durchschnittspunkte der drei Theillinien mit AC; y_1, y_2, y_3, dessgleichen für CB, so ist

$$x_1 = \sqrt{\frac{2F_1 \sin 112^0}{\sin 60^0 . \sin 52^0}} = 453{\cdot}37, \; y_1 = \sqrt{\frac{2F_1 \sin 60^0}{\sin 112^0 \sin 52^0}} = 423{\cdot}48,$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{2(F_1 + F_2)\,.\,\sin 92^0}{\sin 40^0 \sin 52^0}} = 748{\cdot}14,$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{2(F_1 + F_2)\,.\,\sin 40^0}{\sin 92^0 \sin 52^0}} = 481{\cdot}19,$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{2(F_1 + F_2 + F_3)\sin 107^0}{\sin 55^0\,.\,\sin 52^0}} = 931{\cdot}98,$$

$$y_3 = \sqrt{\frac{2(F_1 + F_2 + F_3)\sin 55^0}{\sin 107^0 \sin 52^0}} = 798{\cdot}32.$$

Sämmtliche Theillinien schneiden also die BC.

2) Ist ein Viereck in ähnlicher Weise zu theilen, so ergänze man dasselbe vorerst zu einem Dreiecke, indem man zwei Seiten desselben verlängert, bis sie zusammenstossen. Das neu hinzukommende Dreieck kann man berechnen, und dann die Aufgabe der Theilung leicht auf die vorhergehende reduziren. Eben so bei einem Fünfeck u. s. w.

3) Von dem Viereck ABCD, in welchem die Seite $AB = a$, nebst den Winkeln A und B gegeben ist, soll durch eine Linie EF, welche mit AC den gegebenen Winkel E macht, ein Viereck ABEF abgeschnitten werden, dessen Fläche $= S$ sey.

In dem Viereck ABFE kennt man alle Winkel, da $F = 360^0 - (A + B + E)$, nebst der Seite $AB = a$. Sey also $AE = x$, so wird, wenn x bekannt ist, EF gegeben seyn. Zunächst wird man nun die Fläche des Vierecks ABFE aus a, x, und den Winkeln zu bestimmen haben. Die Fläche des Vierecks (gleich der der zwei Dreiecke ABE, BEF) ist

$$\frac{AE \cdot AB \cdot \sin A}{2} + \frac{BF \cdot EF \cdot \sin F}{2} \text{ (vgl. §. 28).}$$

Fig. 42.

Nun lassen sich die Seiten EF und BF aus den übrigen Stücken finden. Fällt man nämlich von E und F auf AB zwei Senkrechte, die wir mit EG und FH bezeichnen wollen, so ist $AG = x \cos A$, wo AG negativ ist, wenn G nicht zwischen A und B fällt; $BH = BF \cos B$, wo ebenso BH negativ ist, wenn H nicht zwischen A und B liegt. Die Linie EF macht mit AB einen Winkel $= A + E - 180^0$, also ist $GH = EF \cos(A + E - 180^0) = - EF \cos(A + E)$, mithin da $GH = AB - AG - BH$:

$$- EF \cos(A + E) = AB - x \cos A - BF \cos B,$$
$$EF \cos(A + E) = - a + x \cos A + BF \cos B.$$

Die Differenz der zwei Senkrechten FH, EG ist gleich der von F aus auf eine durch E mit AB parallel gezogene Gerade. Diese ist aber $EF \sin(A + E - 180^0) = - EF \sin(A + E)$, mithin

$$BF \sin B - AE \sin A = - EF \sin(A + E),$$

d. h. man hat zur Bestimmung von EF und BF die zwei Gleichungen:

$$EF \cos(A + E) - BF \cos B = x \cos A - a,$$
$$EF \sin(A + E) + BF \sin B = x \sin A\,^*.$$

Hieraus folgt:

$$EF = \frac{(x \cos A - a) \sin B + x \sin A \cos B}{\sin B \cos(A + E) + \cos B \sin(A + E)},$$

* Es sind dies die zwei Grundgleichungen der ebenen Polygonometrie, auf das Viereck angewandt. Vergl. meine „ebene Polygonometrie“ (Stuttgart, Metzler) §. 9, so dass diese Aufgabe eigentlich in die Polygonometrie gehört.

$$BF = \frac{x \sin A \cos(A+E) - (x \cos A - a) \sin(A+E)}{\sin B \cos(A+E) + \cos B \sin(A+E)},$$

d. h.

$$EF = \frac{x \sin(A+B) - a \sin B}{\sin(A+B+E)}, \quad BF = \frac{a \sin(A+E) - x \sin E}{\sin(A+B+E)};$$

folglich die Fläche des Vierecks:

$$\frac{a x \sin A}{2} + \frac{[x \sin(A+B) - a \sin B][a \sin(A+E) - x \sin E]}{2 \sin^2(A+B+E)} . \sin F$$

oder da $F = 360^0 - (A+B+E)$, $\sin(A+B+E) = -\sin F$, $\sin^2(A+B+E) = \sin^2 F$:

$$\frac{a x \sin A}{2} + \frac{[x \sin(A+B) - a \sin B][a \sin(A+E) - x \sin E]}{2 \sin F} = S$$

d. h.

$$-x^2 \sin(A+B) \sin E + x[a \sin A \sin F + a \sin(A+B) \sin(A+E) + a \sin B \sin E] = 2 S \sin F + a^2 \sin B \sin(A+E),$$

$$-x^2 \sin(A+B) \sin E + a x [\sin A \sin F + \sin(A+B) \sin(A+E) + \sin B \sin E] = 2 S \sin F + a^2 \sin B \sin(A+E).$$

Nun ist

$$\sin A \sin F + \sin(A+B) \sin(A+E) + \sin B \sin E = -\sin A . \sin(A+B+E) + \sin(A+B) \sin(A+E) + \sin B \sin E$$

$$= [-\sin A \sin(A+E) \cos B - \sin A \cos(A+E) \sin B + \sin A \cos B . \sin(A+E) + \cos A \sin B \sin(A+E) + \sin B \sin E]$$

$$= [-\sin A \sin B \cos(A+E) + \cos A \sin B \sin(A+E) + \sin B \sin E]$$

$$= [\sin B \{\sin(A+E) \cos A - \cos(A+E) \sin A\} + \sin B \sin E]$$

$$= [\sin B \sin E + \sin B \sin E] = 2 \sin B \sin E,$$

also endlich:

$$x^2 - 2 a x \frac{\sin B}{\sin(A+B)} = -\left\{\frac{2 S \sin F + a^2 \sin B \sin(A+E)}{\sin(A+B) \sin E}\right\}.$$

Hieraus

$$x = \frac{a \sin B}{\sin(A+B)} \pm \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 B}{\sin^2(A+B)} - \frac{2 S \sin F + a^2 \sin B \sin(A+E)}{\sin(A+B) \sin E}}.$$

Ist $A+B > 180^0$, also $\frac{a \sin B}{\sin(A+B)} < 0$, so kann nur das obere Zeichen gewählt werden; wenn $A+B < 180^0$, so würden allerdings zunächst beide Zeichen zulässig seyn, so dass also scheinbar zwei Werthe vom x zum Vorschein kämen, für den Fall wenigstens, dass

beide Werthe von x positiv ausfielen. Um jetzt zu entscheiden, welcher der zwei Werthe der richtige sey, wird man sich AE und BF verlängert denken, bis sie sich schneiden. Man erhält alsdann, wenn M der Durchschnittspunkt ist, ein Dreieck AMB, dessen Fläche man berechnen kann. Der Winkel M ist $= 180^0 - (A + B)$, ferner:

$AM : AB = \sin B : \sin(A + B)$,

$$AM = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin(A+B)} = \frac{a \sin B}{\sin(A+B)},\ ABM = \frac{a^2 \sin B \sin A}{2 \sin(A+B)}.$$

Die Linie EF schneidet davon ein Stück EMF, dessen Fläche $= ABM - S = \frac{a^2 \sin A \sin B}{2 \sin(A+B)} - S$, und macht mit AM den Winkel $180^0 - E$; demnach ist nach Nr. 1:

$$ME = \sqrt{2\left\{\frac{a^2 \sin A \sin B}{2 \sin(A+B)} - S\right\} \frac{\sin(180^0 - E + 180^0 - A - B)}{\sin(180^0 - E) \cdot \sin(180^0 - A - B)}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a^2 \sin A \sin B}{\sin(A+B)} - 2S\right) \cdot \left(\frac{-\sin(A+B+E)}{\sin E \cdot \sin(A+B)}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 \sin A \sin B \sin F}{\sin^2(A+B) \cdot \sin E} - \frac{2 S \sin F}{\sin E \sin(A+B)}}.$$

Mithin ist

$$x = AE = AM - ME = \frac{a \sin B}{\sin(A+B)}$$

$$- \sqrt{\frac{a^2 \sin A \sin B \sin F}{\sin^2(A+B) \cdot \sin E} - \frac{2 S \sin B}{\sin E \sin(A+B)}}.$$

Da nun

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2(A+B)} - \frac{\sin B \sin(A+E)}{\sin(A+B) \sin E}$$

$$= \frac{\sin B}{\sin(A+B) \cdot \sin E}\left[\frac{\sin B \cdot \sin E}{\sin(A+B)} - \sin(A+E)\right]$$

$$= \frac{\sin B}{\sin(A+B) \sin E}\left[\frac{\sin B \sin E - \sin(A+E) \sin(A+B)}{\sin(A+B)}\right]$$

$$= \frac{\sin B}{\sin(A+B) \sin E}$$

$$\left[\frac{\sin[A+B+E-(A+E)] \sin E - \sin(A+E) \sin(A+B+E-E)}{\sin(A+B)}\right]$$

$$= \frac{\sin B}{\sin^2(A+B)\sin E}[\sin(A+B+E)\cos(A+E)\sin E -$$
$$\cos(A+B+E)\sin(A+E)\sin E - \sin(A+E)\sin(A+B+E).$$
$$\cos E + \sin(A+E)\cos(A+B+E)\sin E]$$
$$= \frac{\sin B}{\sin^2(A+B)\sin E}[\sin(A+B+E)\cos(A+E)\sin E -$$
$$\sin(A+B+E)\sin(A+E)\cos E]$$
$$= \frac{\sin B}{\sin^2(A+B)\sin E}[-\sin(A+B+E)\sin A] = \frac{\sin A\sin B\sin F}{\sin^2(A+B)\sin E},$$

so stimmt obiger Werth von x mit dem frühern zusammen, wenn man das untere Zeichen gelten lässt, welches also in diesem Falle nur zu wählen ist. Die Wahl des obern Zeichens würde ja $x > AM$ geben, was nicht seyn kann. Man ersieht hieraus, wie man, gemäss Nr. 2, die Aufgabe auf die erste hätte reduziren können.

Soll EF parallel mit AB gehen, so ist $E = 180° - A$, $F = 180° - B$, also:

$$x = \frac{a\sin B}{\sin(A+B)} \pm \sqrt{\frac{a^2\sin^2 B}{\sin^2(A+B)} - \frac{2S\sin B}{\sin(A+B)\sin A}},$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn $A+B > 180°$, das untere wenn $A+B < 180°$.

Die senkrechte Entfernung der Theillinie EF von AB ist in diesem Falle $= x\sin A$, d. h. gleich

$$\frac{a\sin A\sin B}{\sin(A+B)} \pm \sqrt{\frac{a^2\sin^2 A\sin^2 B}{\sin^2(A+B)} - \frac{2S.\sin A\sin B}{\sin(A+B)}},$$

wo die Zeichen, wie vorhin gelten.

Für den Fall, dass $A+B = 180°$ gelten unsere Schlussformeln nicht; geht man aber jetzt auf die anfänglichen Gleichungen zurück, so ist die quadratische Gleichung, da $A+B = 180°$, $F = 360° - (180°+E) = 180° - E$:

$$ax[\sin A\sin E + \sin A\sin E] = 2S\sin E + a^2\sin A\sin(A+E),$$
$$x = \frac{2S\sin E + a^2\sin A\sin(A+E)}{2a\sin A\sin E} = \frac{S}{a\sin A} + \frac{a\sin(A+E)}{2\sin E}.$$

Sollte noch EF parallel AB seyn, so wäre $A+E = 180°$, also

$$x = \frac{S}{a\sin A},$$

wie natürlich, da dann die Entfernung der Linie EF von AB gleich $\frac{S}{a}$ seyn muss.

Siebenter Abschnitt.

Die Dreiecksnetze.

§. 43.

Bei der Vermessung eines ganzen Landes ist es von grosser Wichtigkeit, für die Detailvermessungen genau bekannte Standlinien zu haben, von denen aus durch Winkelmessungen die einzelnen kleinern Theile aufgenommen werden können. Um nun jene Standlinien zu erhalten, wird man mit möglichst grosser Sorgfalt an dazu geeigneter Stelle eine Linie (Grundlinie, Basis) messen, auf dieser ein Dreieck sich errichtet denken, von dem sie die eine Seite ist, während die entgegenstehende Spitze ein bestimmter Punkt des zu vermessenden Landstrichs ist; an dieses Dreieck wird man ein anderes anlegen, so dass beide eine Seite gemeinschaftlich haben u. s. w. In dieser Weise überzieht man nun den ganzen Landstrich mit einem Netze von Dreiecken, in denen man die sämmtlichen Winkel misst*; da in dem ersten, an die Grundlinie anlehnenden Dreiecke eine Seite bekannt ist, so kann man jetzt alle Seiten jenes Dreiecks berechnen (§. 24); in dem nächstfolgenden Dreiecke kennt man nun abermals eine Seite und alle Winkel, und kann dasselbe somit berechnen. In welcher Weise man hier fortschreiten wird, ist klar. Man erhält somit die sämmtlichen Seiten aller Dreiecke, natürlich desto sicherer, je genauer die Messungen selbst waren, und findet also die gesuchten Standlinien, an die man sich nun bei der Detailvermessung anlehnt.

Ehe wir jedoch weiter gehen, müssen wir eine Bemerkung einschalten. Wir haben vorausgesetzt, dass man die einzelnen Dreiecke gemäss den im dritten Abschnitte aus einander gesetzten Lehren berechne, d. h. wir haben dieselben als e b e n vorausgesetzt. Diese Annahme ist jedoch, wie wir schon in §. 38 bemerkt haben,

* Allerdings genügt die Messung von zwei Winkeln; der bei der Messung auftretenden Beobachtungsfehler wegen ist es jedoch sicherer, die sämmtlichen Winkel zu messen, und die Summe dann auf 180° auszugleichen, in so ferne das Dreieck als ein ebenes angesehen werden kann.

nicht geradezu zulässig, da die Erde keine ebene Fläche ist. Wir werden jedoch im zweiten Theile nachweisen, dass wenn die Seiten der Dreiecke eine bestimmte Grösse nicht überschreiten, man berechtigt sey, die Dreieke zu behandeln wie ebene Dreiecke. Bei der Bildung von Dreiecksnetzen pflegt man zuerst ein Netz von sehr grossen Dreiecken, sogenannten Dreiecken ersten Rangs, über den Landstrich auszubreiten, und misst die Winkel derselben mit äusserster Sorgfalt. Die Seiten dieser Dreiecke sind oft mehrere Meilen lang und es kann also bei der Berechnung derselben von Anwendung des §. 24 keine Rede seyn; sie müssen nach den im zweiten Theile auseinander gesetzten Lehren behandelt werden. An und in diese grossen Dreiecke legt man nun ein zweites, drittes, ... Netz von Dreiecken, deren Seiten immer kleiner werden — die Dreiecke zweiten, dritten, ... Rangs, deren Winkel zwar immer sorgfältig, jedoch nicht mit dem grossen Aufwand von (Zeit und) Genauigkeit gemessen werden, wie die der Dreiecke ersten Rangs. Wie gesagt werden wir im zweiten Theile die Bedingungen darlegen, unter denen ein solches Dreieck als ein ebenes angesehen werden darf.* Hier nehmen wir natürlich an, es handle sich von Dreiecksnetzen desjenigen Rangs, bei dem diese Bedingungen erfüllt sind.

---

* Wenn auch vorgreifend, mag es doch gestattet seyn, diese Bedingungen hier aufzustellen: Wir wollen annehmen, man vernachlässige Winkel, die kleiner als 0·01″ sind; alsdann wird man nach §. 19 der zweiten Abth. (verglichen mit §. 26) ein Dreieck als ein ebenes ansehen dürfen, wenn die dortige Grösse E unter 0·03″ ist. Nehmen wir das Dreieck gleichseitig, die Seite = a, so ist $F = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, also muss

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4r^2}\varrho < 0{\cdot}03, \text{ d. h. } a < \sqrt{\frac{0{\cdot}12\,r^2}{\varrho\sqrt{3}}}$$

seyn. Nun ist, wenn man nach §. 26 der zweiten Abtheilung $\log r = 6{\cdot}8047934$ setzt:

$$\begin{aligned} \log 0{\cdot}12 &= 0{\cdot}0791812 - 1 \\ \log r^2 &= 13{\cdot}6095868 \\ E\log\varrho &= 4{\cdot}6855748 \\ E\log\sqrt{3} &= 9{\cdot}7614393 \\ \hline & 7{\cdot}1357821 \\ & 3{\cdot}5678910, \text{ Zahl} = 3697{\cdot}3. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass so lange die Seiten des Dreiecks unter 3700 Meter (= 12333 bad. Fuss) sind, man ein Dreieck ohne irgend ein Bedenken geradezu als eben ansehen kann.

Würde man Winkel unter 0·1″ vernachlässigen, so hätte man:

Die Seiten dieser Dreiecke, deren Endpunkte durch dauernde Merkmale bezeichnet werden, bilden nun die für Detailvermessungen nothwendigen und genau bekannten Standlinien, deren besondere Messung einerseits zu kostspielig, anderseits bei den unvermeidlichen Schwierigkeiten einer Längenmessung zu ungenaue Resultate geben würde, wenn man diese Operation minder geübten Händen überlassen müsste.

Es dienen aber diese Dreiecksnetze nicht bloss dazu, Standlinien für Detailvermessungen abzugeben, sondern es werden vermittelst derselben die einzelnen Eckpunkte festgelegt. Diese Festlegung geschieht dadurch, dass man die **Koordinaten** der Eckpunkte berechnen kann, d. h. die Entfernungen derselben von zwei beliebig gewählten, auf einander senkrecht stehenden geraden Linien. Die Berechnung der Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecknetzes ersten Rangs werden wir im zweiten Theile darlegen; hier nehmen wir die Lage dieser Eckpunkte als gegeben an. Da die Dreiecke des zweiten u. s. f. Rangs sich an die Seiten der Dreiecke ersten Rangs anschliessen, so wird man am besten als die zwei einander senkrecht durchschneidenden Geraden, auf welche die Lage der Dreieckspunkte niederern Rangs bezogen werden soll, den durch einen Eckpunkt ersten Rangs, der zugleich Eckpunkt des betrachteten Netzes ist, gelegten Meridian, so wie die auf ihm in jenem Eckpunkte senkrecht stehende Linie annehmen. Die Entfernungen der Eckpunkte von jenem Meridiane sind dann die **Ordinaten**, die Entfernungen der Fusspunkte der von den Eckpunkten auf den Meridian gefüllten Senkrechten von dem angenommenen Eckpunkt ersten Rangs, die **Abszissen** der Eckpunkte. Die Berechnung der Koordinaten ist Sache der ebenen **Polygonometrie**. Ist A der fragliche Eckpunkt

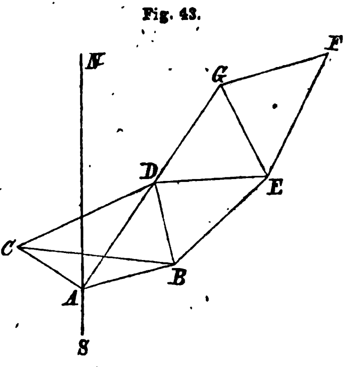
---

$$a < \sqrt{\frac{1{\cdot}2\, r^2}{\varrho \sqrt{3}}},$$

$$\begin{aligned} \log 1{\cdot}2 &= 0{\cdot}0791812 \\ \log r^2 &= 13.6095868 \\ E \log \varrho &= 4{\cdot}6855748 \\ E \log \sqrt{3} &= 9{\cdot}7614393 \\ & \overline{8{\cdot}1357821} \\ & 4{\cdot}0678910, \text{ Zahl} = 11692, \end{aligned}$$

so dass man jetzt sogar Dreiecke, deren Seiten kleiner als 11700 Meter (= 39000 bad. Fuss) als eben ansehen dürfte.

ersten Rangs, NS der durch ihn gehende Meridian, so wird man nach den in meiner „ebenen Polygonometrie“ dargestellten Lehren, indem man die Eckpunkte als Eckpunkte eines Linienzugs (vergl. §. 7 der „ebenen Polygonometrie“) ansieht, die Koordinaten genau und nach einem leichten Mechanismus berechnen können, indem sämmtliche Winkel und Seiten des Linienzugs als bekannt angesehen werden dürfen. Da man offenbar den Linienzug, der durch das Dreiecksnetz gebildet wird, in verschiedener Weise anordnen kann, so wird man auch die Koordination der einzelnen Eckpunkte in verschiedener Weise erhalten können, und somit die Rechnung fortwährend zu kontroliren im Stande seyn. Der Winkel, welchen eine beliebige Seite des Netzes mit dem Meridian NS macht, wird nach §. 5 Formel (5) der „ebenen Polygonometrie“ ebenfalls leicht zu bestimmen seyn; man pflegt ihn das **Azimuth** der Seite zu nennen und er dient zur Orientirung der Seite auf der Erdoberfläche.



Die bekannten Koordinaten der Eckpunkte dienen dann zur graphischen Auftragung der Netzpunkte, behufs Bildung von Karten, in denen eben diese Eckpunkte mit den sie verbindenden Seiten das Gerippe bilden.

Da die Berechnung der Seiten nach den Lehren des dritten Abschnitts geschieht, worüber wir uns hier wohl nicht weiter zu verbreiten haben; da ferner die Berechnung der Koordinaten der Eckpunkte ganz eigentlich Sache der Polygonometrie ist, die wir ausführlich in dem bereits mehrfach angeführten Werke dargestellt haben, so können wir hier diesen Gegenstand verlassen, da die gegebenen Andeutungen und Hinweisungen vollkommen genügen werden. Ohnehin werden wir im entsprechenden Abschnitte des zweiten Theils nochmals hierauf zurückkommen müssen.

Anmerkung. Wir haben in §. 38 schon darauf aufmerksam gemacht, dass bei geodätischen Vermessungen die auf die Meeresfläche reduzirten Entfernungen zu wählen sind. Dies geschieht hier dadurch, dass man die Basis sofort auf die

Meeresfläche reduzirt. Zu dem Ende muss man die mittlere Erhöhung derselben über der Meeresfläche kennen, welche Kenntniss man dadurch erlangt, dass man sowohl die Erhöhung der Endpunkte über derselben, als auch der Zwischenpunkte misst und aus den Angaben den mittlern Werth zieht. Ist nun L die Länge der Grundlinie, h ihre mittlere Höhe über der Meeresfläche, r der nach §. 38 berechnete Halbmesser, so ist $L.\frac{r}{r+h}$ die auf die Meeresfläche reduzirte Länge der Grundlinie. Führt man diese nun in die Rechnung ein, so wird man das ganze Dreiecksnetz berechnen, als wie wenn es auf der Meeresfläche läge.

Achter Abschnitt.

Auflösung der ebenen Dreiecke ohne Tafeln.

§. 44.

Wenn auch praktisch vielleicht von geringem Werthe, dürfte es doch nicht uninteressant seyn, diejenigen Formeln zusammen zu stellen, die bereits früher angegeben wurden, um die Grösse der Winkel eines Dreiecks aus seinen Seiten berechnen zu können, ohne sich dazu der trigonometrischen Tafeln zu bedienen. Wir wollen desshalb dieselben einer nähern Besprechung unterwerfen.

Die erste Formel ist nun, wenn wir die in §. 33 bereits schon eingeführte Bezeichnung arc x für die Länge des zwischen den Seiten des Winkels x mit einem Halbmesser = 1 beschriebenen Bogens beibehalten:

$$\operatorname{arc} x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}, \quad \text{(a.)}$$

welche Formel von dem holländischen Mathematiker Willebrod Snellius herrührt.

Diese Formel macht natürlich keinen Anspruch auf absolute Genauigkeit; sie kann in folgender Weise gefunden werden. Nach §. 16 ist ungefähr:

$$\sin x = \operatorname{arc} x - \tfrac{1}{6} \operatorname{arc}^3 x, \ \cos x = 1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{arc}^2 x,$$

woraus

$$\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} = \frac{\operatorname{arc} x \left[3 - \frac{1}{2} \operatorname{arc}^2 x\right]}{3 - \frac{1}{2} \operatorname{arc}^2 x} = \operatorname{arc} x,$$

natürlich ebenfalls ungefähr. Will man x in Sekunden haben, so ist hieraus:

$$x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \cdot \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \cdot 206264{\cdot}8''. \quad (a')$$

Untersucht man diese Formel, so findet man, dass der Fehler bei: $x = 10^0$ noch nicht $0{\cdot}3''$, $x = 20^0$ noch nicht $9''$, $x = 30^0$ noch nicht $1'$, $x = 40^0$ noch nicht $5'$, $x = 45^0$ noch nicht $7'$ beträgt.

Da die Formel (a) oder (a') den Winkel immer zu klein gibt, so hat der englische Mathematiker Henry Wilson die Formel

$$x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} 206400'' \quad (a'')$$

vorgeschlagen, die anfangs die Winkel zu gross gibt, bei $x = 45^0$ um über $4'$ fehlt. Sie ist jedoch sicher minder genau als die folgende, und beruht auf keinem zu beweisenden Grundsatze.

Eine schärfere Formel hat Lambert gegeben, nämlich:

$$\operatorname{arc} x = \frac{28 \sin x + \sin 2x}{18 + 12 \cos x} = \frac{\sin x [14 + \cos x]}{3 [3 + 2 \cos x]}, \quad (b)$$

Man hat nämlich ungefähr (§. 16) (wenn man überall $\operatorname{arc}^6 x, \ldots$ vernachlässigt):

$$\sin x = \operatorname{arc} x - \tfrac{1}{6} \operatorname{arc}^3 x + \tfrac{1}{120} \operatorname{arc}^5 x,$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{arc}^2 x + \tfrac{1}{24} \operatorname{arc}^4 x,$$

$$\sin x [14 + \cos x] = [\operatorname{arc} x - \tfrac{1}{6} \operatorname{arc}^3 x + \tfrac{1}{120} \operatorname{arc}^5 x] [15 - \tfrac{1}{2} \operatorname{arc}^2 x + \tfrac{1}{24} \operatorname{arc}^4 x] = [15 - 3 \operatorname{arc}^2 x + \tfrac{1}{4} \operatorname{arc}^4 x] \operatorname{arc} x,$$

$$3 [3 + 2 \cos x] = 3 [5 - \operatorname{arc}^2 x + \tfrac{1}{12} \operatorname{arc}^4 x] = 15 - 3 \cdot \operatorname{arc}^2 x + \tfrac{1}{4} \operatorname{arc}^4 x,$$

woraus ganz unmittelbar (b) folgt. Man findet aus (b), dass der Fehler für

$x = 10^0$ kleiner als $0{\cdot}01''$, $x = 20^0$ kleiner als $0{\cdot}1''$, $x = 30^0$ kleiner als $2''$, $x = 40^0$ kleiner als $10''$, $x = 45^0$ kleiner als $20''$

ist, und zwar gibt die Formel den Winkel ebenfalls zu klein.

Vermöge dieser Beziehungen ist es leicht, in einem rechtwinklichen Dreiecke die Winkel aus den Seiten zu berechnen. Kennt man nämlich die Seiten a und c, also auch b, und ist $c > a$, so ist auch $C > A$, also $A < 45^0$; ferner $\sin A = \frac{a}{b}$, cos A

Fig. 44.

$=\frac{c}{b}$, mithin nach (a′):

$$A=\frac{3a}{2b+c}.206264\cdot8'',$$

oder nach (b):

$$A=\frac{a[14b+c]}{3b(3b+2c)}206264\cdot8'',$$

wenn A in Sekunden gesucht wird, wobei die erste Formel bis 10° nicht um eine Sekunde fehlt, bei 45° noch nicht 7′; die zweite bei 45° noch nicht 20″, bei kleinern Werthen von A noch weit weniger. Wie man, mit Zuziehung des pythagoräischen Satzes, die Fälle 3 und 4 des §. 20 hiernach erledigen kann, ist klar.

Wenn man die Fälle 1 und 2 desselben § erledigen kann, ist eben so klar. Kennt man die Winkel und die Seite b, so ist sin A $=\frac{a}{b}$, also wenn wieder mit arc A der zum Halbmesser 1 gehörige Bogen zwischen den Seiten des Winkels bezeichnet wird:

$$\frac{a}{b}=\text{arc}\,A-\tfrac{1}{6}\text{arc}^3A+\tfrac{1}{120}\text{arc}^5A.$$

Ist A in Graden gegeben, so ist

$$\text{arc}\,A=\frac{A\pi}{180},$$

also

$$\frac{a}{b}=\frac{A\pi}{180}\left[1-\tfrac{1}{6}\frac{\pi^2A^2}{180^2}+\tfrac{1}{120}.\frac{\pi^4A^4}{180^4}\right],$$

$$a=\frac{A\pi b}{180}\left[1-\tfrac{1}{6}\frac{\pi^2A^2}{180^2}+\tfrac{1}{120}.\frac{\pi^4A^4}{180^4}\right].$$

Ist dagegen a gegeben, so ist

$$b=\frac{a.180}{A.\pi}.\frac{1}{1-\tfrac{1}{6}\frac{\pi^2A^2}{180^2}+\tfrac{1}{120}\frac{\pi^4A^4}{180^4}}$$

oder da, wenn man dividirt:

$$\frac{1}{1-\tfrac{1}{6}\frac{\pi^2A^2}{180^2}+\tfrac{1}{120}.\frac{\pi^4A^4}{180^4}}=1+\tfrac{1}{6}\frac{\pi^2A^2}{180^2}+\tfrac{7}{360}.\frac{\pi^4A^4}{180^4},$$

so ist auch

$$b=\frac{180a}{A\pi}\left[1+\tfrac{1}{6}\frac{\pi^2A^2}{180^2}+\tfrac{7}{360}\frac{\pi^4A^4}{180^4}\right].$$

Spezielle Beispiele wollen wir nicht beifügen, da einerseits diese Formeln von weniger praktischem Werthe sind, anderseits es offenbar leicht ist, darnach zu rechnen. Man übersieht ohnehin leicht, wie man in noch anderer Weise dasselbe Ziel erreichen könnte, so dass wir uns hiebei nicht länger verweilen wollen.

Neunter Abschnitt.

Ueber den Einfluss fehlerhafter Daten auf die durch Rechnung hieraus erhaltenen Grössen.

§. 45.

Soll aus gewissen gegebenen Grössen (Daten) eine noch unbekannte Grösse durch Rechnung gefunden werden, so müssen jene ersten zunächst durch wirkliche Messungen gesucht worden seyn. Bei allen Messungen, wie überhaupt bei allen Beobachtungen werden wir aber niemals vollkommen sicher seyn, den durchaus richtigen Werth für die zu bestimmende Grösse erhalten zu haben. Abgesehen von gewissen Fehlern, die in der Einrichtung der Instrumente u. s. w. ihren Grund haben, und die wir bis auf einen gewissen Grad zu bestimmen, also auch zu verbessern im Stande sind, werden den Beobachtungen unvermeidliche Fehler anhaften, die in zufälligen Ursachen ihren Grund haben, als in nicht zu berechnenden Temperaturverhältnissen, mehr oder minder Aufmerksamkeit u. s. w. Diese Ursachen, über deren Daseyn oder Nichtdaseyn im speziellen Falle nur schwer entschieden werden kann, bringen nun die sogenannten unvermeidlichen Beobachtungsfehler hervor, auf die wir somit in allen aus der Erfahrung genommenen Angaben zählen müssen. Es versteht sich ganz von selbst, dass wir nur solche Angaben aus der Erfahrung benützen werden, die durch Beobachtungen erhalten wurden, welche unter den vorhandenen Verhältnissen möglichst genau sind, so dass wir — wenigstens in so ferne wir hier von Beobachtungsfehlern sprechen — von vorne herein annehmen dürfen, es seyen die Fehler, welche den aus der

Erfahrung genommenen Angaben anhaften, möglichst klein. Uebrigens werden, theoretisch gesprochen, diese Fehler eben so wohl positiv als negativ seyn können, d. h. die durch Beobachtung gefundene Grösse kann eben sowohl grösser als kleiner seyn, als der wahre Werth derselben. Bei Winkelmessungen ist diess ganz von selbst klar. Bei Längenmessungen dagegen wird ein positiver Fehler überwiegend vorkommen, da viele, unvermeidliche Umstände zusammenwirken, die gemessene Länge zu gross erscheinen zu lassen, wie etwa das Abweichen von der geraden Linie, das nicht gehörige Anziehen von Messketten u. dgl. Doch muss man theoretisch positive Fehler eben so gut zulassen, als negative.

Wie schon gesagt, werden die Fehler, welche den Angaben, die aus der Beobachtung entlehnt sind, anhaften, im Allgemeinen nur klein seyn im Verhältniss zu den gemessenen Grössen. Daraus folgt, dass man die Produkte solcher kleinen Grössen, so wie die höhern Potenzen derselben gegen die einfachen Fehler, d. h. die ersten Potenzen derselben, wird vernachlässigen können.

In Bezug auf Winkel wird man also, gemäss §. 15, den Sinus eines Fehlers gleich dem zum Halbmesser 1 gehörigen, diesem Fehler entsprechenden Bogen, den Cosinus des Fehlers = 1 setzen müssen.

Sind nun die Angaben, aus denen die unbekannten Stücke zu berechnen waren, nicht fehlerfrei, so werden die durch Rechnung erhaltenen Grössen es noch weniger seyn, und man wird sich die Aufgabe zu stellen haben: Wie kann man aus den als bekannt angesehenen Gränzen der Fehler der Daten auf die Gränzen der Fehler der Resultate schliessen? Fassen wir diese Aufgabe etwas anders, so wird sie auch so heissen: Wenn man weiss, innerhalb welcher Ausdehnung die Fehler in den aus der Erfahrung entlehnten Angaben sich bewegen können, wie ist man im Stande, die Ausdehnung zu bestimmen, innerhalb der die Fehler der aus jenen Angaben gezogenen Resultate sich bewegen?

Soll diese Aufgabe gelöst werden, so wird man vor Allem nach der gegenseitigen Abhängigkeit der Fehler der Resultate und der Fehler der Daten zu forschen haben. Diese ist begreiflich aus dem Wege zu schliessen, den man bei Auffindung jener Resultate eingeschlagen, d. h. sie ist aus den Formeln zu entnehmen, die man angewandt hat, um zu den Resultaten zu gelangen.

Wenden wir das im Allgemeinen Angedeutete nunmehr auf das Dreieck an, so werden in demselben, wenn a, b, c die Seiten, A, B, C die Winkel bezeichnen, im Allgemeinen drei Stücke, worunter mindestens eine Seite, als bekannt, die andern drei als unbekannt anzusehen seyn. Bezeichnen wir nun im Allgemeinen mit $\varDelta a$, $\varDelta b$, $\varDelta c$, $\varDelta A$, $\varDelta B$, $\varDelta C$ die den Seiten und Winkeln anhaftenden Fehler, so werden diese sechs Grössen durch drei Beziehungen mit einander verbunden seyn, die uns gestatten, aus dreien derselben die drei andern zu bestimmen. Diese drei Beziehungen werden wir am Bequemsten aus denjenigen Formeln entlehnen, welche zwischen den Seiten und Winkeln eines ebenen Dreiecks bestehen. Diese Formeln, drei an der Zahl, können die Formeln (29) und (31) des §. 22, nebst der Formel $A + B + C = 180^0$ seyn, oder auch kann man statt der Formel (31) die Formel $b \cos A + a \cos B = c$ substituiren, die man aus (31) in folgender Weise erhält:

$$b \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}, \quad a \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c},$$

woraus

$$b \cos A + a \cos B = \frac{2c^2}{2c} = c.$$

Wir haben also:

$$c = a \cos B + b \cos A, \quad a \sin B = b \sin A, \quad A + B + C = 180^0, \qquad (a)$$

aus welchen drei Formeln die sämmtlichen Formeln des §. 22 folgen.*

---

* Man hat zunächst

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

also

$$c = a \cos B + \frac{a \sin B \cos A}{\sin A} = a \left(\frac{\cos B \sin A + \sin B \cos A}{\sin A} \right) = \frac{a \sin (A + B)}{\sin A}$$

$$= \frac{a \sin (180^0 - C)}{\sin A} = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

also die zweite Formel (29). Eben so

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B},$$

$$c = \frac{b \sin A \cos B}{\sin B} + b \cos A = b \left(\frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\sin B} \right) = \frac{b \sin C}{\sin B},$$

welches die dritte Formel in (29) ist.

Uebrigens könnte man statt der drei Gleichungen (a) als allgemeine Grundgleichungen auch die folgenden drei aufstellen:

$$c = a \cos B + b \cos A, \quad b = a \cos C + c \cos A, \quad a = c \cos B + b \cos C, \qquad (a')$$

Die hier aufgeführten Grössen sind natürlich nur mit ihren absolut wahren Werthen zu nehmen.

Bezeichnen nun aber a, b, c, A, B, C die gemessenen, oder durch Rechnung gefundenen Werthe, so werden $a+\Delta a$, $b+\Delta b$, $c+\Delta c$, $A+\Delta A$, $B+\Delta B$, $C+\Delta C$ die wahren Werthe seyn, und man wird haben:

---

aus denen sich die (a) ableiten lassen. Bestimmt man nämlich aus den zwei letzten (a′) die Werthe von a und b, und setzt sie in die erste, so erhält man:

$$\sin^2 C = \cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A \cos B \cos C,$$

d. h. $$1 = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C.$$

Nun ist (§. 14):

$$2\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(-A+B+C) = \cos(B+C) + \cos A,$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \cos(B-C) + \cos A,$$

woraus durch Multiplikation:

$$4\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(-A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)$$
$$= \cos(B+C)\cos(B-C) + \cos A[\cos(B+C) + \cos(B-C)] + \cos^2 A = \cos^2 B$$
$$- \sin^2 C + 2\cos A \cos B \cos C + \cos^2 A =$$
$$-1 + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C,$$

d. h. also

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1 + 4\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(-A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C);$$

setzt man dies in die oben gefundene Gleichung, so hat man:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(-A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C) = 0.$$

Einer der vier hier vorkommenden cos muss also $= 0$ seyn, d. h. der entsprechende Winkel $= 90^0$ (da nämlich A, B, C positiv und jeder $< 180^0$, so kann $\frac{1}{2}(A+B+C)$ nur zwischen 0 und 270^0, mit Ausschluss der Gränzwerthe, und jede der andern Grössen nur zwischen -90^0 und 180^0, ebenfalls mit Ausschluss dieser Gränzwerthe liegen). Man hat also

$$A+B+C = 180^0, \text{ oder } -A+B+C = 180^0, \text{ oder } A-B+C = 180^0,$$
$$\text{oder } A+B-C = 180^0.$$

Die letzten drei Gleichungen sind aber unzulässig, da wenn eine wahr wäre, die andern zwei es auch seyn müssten, indem jede nur sagen würde, dass zwei Winkel minus dem dritten 180^0 betragen würden. Dann aber hätte man $A = B = C = 180^0$, was unzulässig ist. Mithin hat man bloss $A + B + C = 180^0$, d. h. die dritte Gleichung (a).

Ferner folgt aus (a′):

$$c = \frac{b - a\cos C}{\cos A},$$

und wenn man diesen Werth in die erste (a′) einsetzt:

$$b - a\cos C = a\cos A\cos B + b\cos^2 A, \text{ d. h. } b\sin^2 A = a\cos A\cos B + a\cos C,$$

oder

$$b\sin^2 A = a\cos A\cos B - a\cos(A+B) = a\sin A\sin B,\ b\sin A = a\sin B,$$

oder die zweite Gleichung (a).

$$c + \Delta c = (a + \Delta a)\cos(B + \Delta B) + (b + \Delta b)\cos(A + \Delta A),$$
$$(a + \Delta a)\sin(B + \Delta B) = (b + \Delta b)\sin(A + \Delta A),$$
$$A + B + C + \Delta A + \Delta B + \Delta C = 180^0.$$

Nun ist, nach dem Obigen:

$$\cos(B + \Delta B) = \cos B - \sin B \,.\, \text{arc}\,\Delta B,$$
$$\cos(A + \Delta A) = \cos A - \sin A \,.\, \text{arc}\,\Delta A,$$
$$\sin(B + \Delta B) = \sin B + \cos B \,.\, \text{arc}\,\Delta B,$$
$$\sin(A + \Delta A) = \sin A + \cos A\, \text{arc}\,\Delta A,$$

daher, wenn man $\Delta a \,.\, \text{arc}\,\Delta B$ u. s. w. sofort vernachlässigt:

$$c + \Delta c = a\cos B + \Delta a \,.\, \cos B - a \,.\, \sin B \,.\, \text{arc}\,\Delta B + b\cos A$$
$$+ \Delta b\cos A - b\sin A\, \text{arc}\,\Delta A,$$
$$a\sin B + \Delta a\sin B + a\cos B\, \text{arc}\,\Delta B = b\sin A + \Delta b\sin A$$
$$+ b\cos A \,.\, \text{arc}\,\Delta A,$$
$$A + B + C + \Delta A + \Delta B + \Delta C = 180^0.$$

Nun wurden aber die Rechnungen mit den Formeln (a) oder den daraus gebildeten geführt; die Werthe a, b, c, A, B, C genügen also jenen Formeln (d. h. man hat die gesuchten Grössen so bestimmt, dass sie nebst den gegebenen Grössen den Gleichungen (a) genügen); daraus folgt offenbar, dass man aus den so eben angegebenen drei Formeln, wenn man die Formeln (a) durch Subtraction mit ihnen verbindet, zur Bestimmung der gegenseitigen Abhängigkeit der Grössen Δa, Δb, Δc, ΔA, ΔB, ΔC haben werde:

$$\left.\begin{aligned} \Delta c &= \Delta a \,.\, \cos B - a\sin B\, \text{arc}\,\Delta B + \Delta b\cos A - b\sin A\, \text{arc}\,\Delta A, \\ \Delta a\sin B &+ a\cos B\, \text{arc}\,\Delta B = \Delta b\sin A + b\cos A\, \text{arc}\,\Delta A, \\ &\Delta A + \Delta B + \Delta C = 0. \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Diese drei Gleichungen, von denen die letzte auch $\text{arc}\,\Delta A + \text{arc}\,\Delta B + \text{arc}\,\Delta C = 0$ heissen könnte, regeln die Beziehungen der sechs Grössen $\Delta a, \ldots, \Delta C$ gegen einander vollständig und jede andere Beziehung, die etwa noch bestehen könnte, muss hieraus abgeleitet werden können, bietet also nichts Neues dar.

§. 46.

Es dürfte zunächst nicht ohne Interesse seyn, die letzte Behauptung des §. 45 in einigen Fällen näher zu betrachten, da, wenn man auch theoretisch von der Richtigkeit derselben überzeugt ist, eine praktische Bestätigung derselben nicht von der Hand gewiesen werden soll. Zunächst ist klar, dass man eben so die folgenden Gleichungen erhalten könnte:

$$\Delta b = \Delta a \cos C - a \sin C \operatorname{arc} \Delta C + \Delta c \cos A - c \sin A \operatorname{arc} \Delta A,$$
$$\Delta a = \Delta c \cos B - c \sin B \operatorname{arc} \Delta B + \Delta b \cos C - b \sin C \operatorname{arc} \Delta C,$$
$$\Delta c \sin B + c \cos B \operatorname{arc} \Delta B = \Delta b \sin C + b \cos C \operatorname{arc} \Delta C,$$
$$\Delta a \sin C + a \cos C \operatorname{arc} \Delta C = \Delta c \sin A + c \cos A \operatorname{arc} \Delta A.$$

Diese Gleichungen lassen sich aber aus (40) sehr leicht ableiten. Man zieht nämlich aus den zwei ersten:

$$\Delta b \cos A = \Delta c - \Delta a \cos B + a \sin B \operatorname{arc} \Delta B + b \sin A \operatorname{arc} \Delta A,$$
$$\Delta b \sin A = \Delta a \sin B + a \cos B \operatorname{arc} \Delta B - b \cos A \operatorname{arc} \Delta A.$$

Multiplizirt man hier die erste mit cos A, die zweite mit sin A und addirt, so erhält man:

$$\Delta b = \Delta c \cos A - \Delta a \cos (A + B) + a \sin (A + B) \operatorname{arc} \Delta B.$$

Aber es ist $\sin (A + B) = \sin C$, $\cos (A + B) = -\cos C$, $\Delta B = -\Delta A - \Delta C$, also:

$$\Delta b = \Delta c \,.\, \cos A + \Delta a \cos C - a \sin C \operatorname{arc} \Delta A - a \sin C \operatorname{arc} \Delta C,$$

und da $a \sin C = c \sin A$, so erhält man hieraus die erste der obigen Gleichungen. Ganz ähnlich findet man die übrigen.

Man könnte ferner vermuthen, wenn man die Gleichungen (31) des §. 22 zu Grunde gelegt hätte, wären vielleicht andere Resultate erschienen. Man hätte dann:

$$(b + \Delta b)^2 = (a + \Delta a)^2 + (c + \Delta c)^2 - 2(a + \Delta a)(c + \Delta c)(\cos B - \sin B \operatorname{arc} \Delta B),$$

d. h.

$$b^2 + 2\, b\Delta b = a^2 + 2\, a\Delta a + c^2 + 2\, c\Delta c - 2\, [ac + c\Delta a + a\Delta c] [\cos B - \sin B \operatorname{arc} \Delta B],$$
$$b^2 + 2\, b\Delta b = a^2 + 2\, a\Delta a + c^2 + 2\, c\Delta c - 2\, ac \cos B - 2\, c\Delta a \cos B - 2\, a\Delta c \cos B + 2\, ac \sin B \operatorname{arc} \Delta B,$$

mithin wegen (31):

$$b\Delta b = a\Delta a + c\Delta c - c\Delta a \cos B - a\Delta c \cos B + ac \sin B \operatorname{arc} \Delta B.$$

Aber aus:

$$\Delta c = \Delta a \cos B - a \sin B \operatorname{arc} \Delta B + \Delta b \cos A - b \sin A \operatorname{arc} \Delta A,$$
$$\Delta b = \Delta a \cos C - a \sin C \operatorname{arc} \Delta C + \Delta c \cos A - c \sin A \operatorname{arc} \Delta A,$$
$$\Delta a = \Delta c \cos B - c \sin B \operatorname{arc} \Delta B + \Delta b \cos C - b \sin C \operatorname{arc} \Delta C,$$

folgt

$$a\Delta a + c\Delta c = a\Delta c \cos B + c\Delta a \cos B - ac \sin B \operatorname{arc} \Delta B - ac \sin B \operatorname{arc} \Delta B + a\Delta b \cos C + c\Delta b \cos A - ab \sin C \operatorname{arc} \Delta C - bc \sin A \operatorname{arc} \Delta A,$$
$$a\Delta a + c\Delta c - c\Delta a \cos B - a\Delta c \cos B + ac \sin B \operatorname{arc} \Delta B = - ac \sin B \operatorname{arc} \Delta B + a\Delta b \cos C + c\Delta b \cos A - ab \sin C \operatorname{arc} \Delta C, - bc \sin A \operatorname{arc} \Delta A,$$

$$b\Delta b = b\Delta a \cos C - a\, b \sin C \operatorname{arc}\Delta C + b\Delta c \cos A - b\, c \sin A \operatorname{arc}\Delta A.$$

Nun ist aber nach (40):

$$\begin{aligned}\Delta b &= \Delta a \cos C + \Delta c \cos A - a \sin C \operatorname{arc}\Delta C - c \sin A \operatorname{arc}\Delta A\\ &= \Delta a \cos C + \Delta c \cos A - a \sin C \operatorname{arc}\Delta C - a \sin C \operatorname{arc}\Delta A\\ &= \Delta a \cos C + \Delta c \cos A - a \sin C [\operatorname{arc}\Delta C + \operatorname{arc}\Delta A]\\ &= \Delta a \cos C + \Delta c \cos A + a \sin C \operatorname{arc}\Delta B,\end{aligned}$$

also

$$\Delta b - a \sin C \operatorname{arc}\Delta B = \Delta a \cos C + \Delta c \cos A,$$
$$b\Delta b - a\, b \sin C \operatorname{arc}\Delta B = b\Delta a \cos C + b\Delta c \cos A,$$

oder da

$$b = a \cos C + c \cos A:$$
$$(a \cos C + c \cos A)\,\Delta b - a\, b \sin C \operatorname{arc}\Delta B = b\Delta a \cos C + b\Delta c \cos A,$$

d. h.

$$a\Delta b \cos C + c\Delta b \cos A - a\, b \sin C \operatorname{arc}\Delta B = b\Delta a \cos C + b\Delta c \cos A.$$

Hieraus folgt, da $b \sin C = c \sin B$:

$$\begin{aligned}&- a\, c \sin B \operatorname{arc}\Delta B + a\Delta b \cos C + c\Delta b \cos A - a\, b \sin C \operatorname{arc}\Delta C\\ &- b\, c \sin A \operatorname{arc}\Delta A = b\Delta a \cos C - a\, b \sin C \operatorname{arc}\Delta C + b\Delta c \cos A\\ &- b\, c \sin A \operatorname{arc}\Delta A,\end{aligned}$$

d. h.

$$b\Delta b = a\Delta a + c\Delta c - c\Delta a \cos B - a\Delta c \cos B + a\, c \sin B \operatorname{arc}\Delta B,$$

was man zu beweisen hatte.

Wir werden also nur die Formeln (40), in Verbindung mit den Gleichungen (a) des §. 45 oder den Gleichungen des §. 22 u. s. w. anwenden. Zunächst wollen wir nun die einzelnen Fälle näher untersuchen.

Anmerkung. Wir haben in §. 45 gesagt, dass wir die Produkte und höhern Potenzen von $\Delta a, \ldots$ vernachlässigen dürfen. In Bezug auf die Grössen $\operatorname{arc}\Delta A$, $\operatorname{arc}\Delta B$, $\operatorname{arc}\Delta C$ ist diess wohl geradezu klar; anders möchte es jedoch in Bezug auf Δa, Δb, Δc erscheinen, da diese letztern Grössen in der Regel > 1, also ihre Quadrate noch grösser als sie selbst sind. Trotz dem ist unsere Angabe richtig. Wie sich ohnehin im Folgenden herausstellen wird, erscheinen immer nur die Quotienten $\frac{\Delta a}{a}, \frac{\Delta b}{b}, \frac{\Delta c}{c}$, die kleine Brüche sind, und deren Produkte und Quadrate mithin sicherlich vernachlässigt werden können. Wir wollen diess an dem so eben benützten Beispiele zeigen. Wir gingen dabei von der Grundgleichung

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos B$$

aus. Setzt man $b + \Delta b$ für b, u. s. w. so hat man wie so eben

$$(b + \Delta b)^2 = (a + \Delta a)^2 + (c + \Delta c)^2 - 2\,(a + \Delta a)\,(c + \Delta c) \cos (B + \Delta B)$$

d. h.

$$b^2\left(1+\frac{\Delta b}{b}\right)^2 = a^2\left(1+\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + c^2\left(1+\frac{\Delta c}{c}\right)^2 - 2ac\left(1+\frac{\Delta a}{a}\right)\left(1+\frac{\Delta c}{c}\right)$$
$$[\cos B - \sin B \operatorname{arc} \Delta B].$$

Ist nun etwa b die grösste der drei Seiten a, b, c, so dividire man beiderseitig mit b^2 und erhält:

$$\left(1+\frac{\Delta b}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \frac{c^2}{b^2}\left(1+\frac{\Delta c}{c}\right)^2 - 2\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{b}\left(1+\frac{\Delta a}{a}\right)\left(1+\frac{\Delta c}{c}\right)$$
$$[\cos B - \sin B \operatorname{arc} \Delta B],$$

und da nun $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}$ kleiner als 1 sind, so ist wohl klar, dass man $\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2, \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2, \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2$, $\frac{\Delta a}{a}\cdot\frac{\Delta c}{c}$ wird weglassen dürfen, da diese Werthe ganz unbedeutend sind.

§. 47.

1) In einem Dreieck sind gegeben c, A, B; berechnet a, b, C (§. 24).

Für diesen Fall hat man aus (40) die drei Grössen $\Delta a, \Delta b, \Delta C$ durch $\Delta c, \Delta A, \Delta B$ zu suchen.

Nun zieht man aber aus diesen Gleichungen:

$$\Delta C = -\Delta B - \Delta A;$$

dann

$$\Delta a \cos B + \Delta b \cos A = \Delta c + a \sin B \operatorname{arc} \Delta B + b \sin A \operatorname{arc} \Delta A,$$
$$\Delta a \sin B - \Delta b \sin A = -a \cos B \operatorname{arc} \Delta B + b \cos A \operatorname{arc} \Delta A,$$

woraus folgt:

$$\Delta a = \Delta c \,.\, \frac{\sin A}{\sin(A+B)} - a \operatorname{arc} \Delta B \,.\, \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} + \frac{b \operatorname{arc} \Delta A}{\sin(A+B)},$$
$$\Delta b = \Delta c \,.\, \frac{\sin B}{\sin(A+B)} + a\frac{\operatorname{arc} \Delta B}{\sin(A+B)} - b \operatorname{arc} \Delta A \,.\, \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)},$$

d. h. da $A+B = 180^0 - C$,

$$\Delta a = \Delta c \,.\, \frac{\sin A}{\sin C} + a\frac{\cos C}{\sin C} \operatorname{arc} \Delta B + \frac{b \operatorname{arc} \Delta A}{\sin C},$$
$$\Delta b = \Delta c \,.\, \frac{\sin B}{\sin C} + \frac{a \operatorname{arc} \Delta B}{\sin C} + b\frac{\operatorname{arc} \Delta A \cos C}{\sin C}.$$

Da aber $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}, \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c},$

so ist:

$$\left.\begin{aligned} \Delta a &= \frac{a\Delta c}{c} + \frac{a \cos C \operatorname{arc} \Delta B}{\sin C} + \frac{b \operatorname{arc} \Delta A}{\sin C}, \\ \Delta b &= \frac{b\Delta c}{c} + \frac{a \operatorname{arc} \Delta B}{\sin C} + \frac{b \cos C}{\sin C} \operatorname{arc} \Delta A, \\ \Delta C &= -\Delta A - \Delta B. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Man kann diesen Formeln, wie leicht ersichtlich, auch folgende bequemere Form geben:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta a}{a} &= \frac{\Delta c}{c} + \operatorname{cotg} C \operatorname{arc} \Delta B + \frac{b}{a \sin C} \operatorname{arc} \Delta A,\\ \frac{\Delta b}{b} &= \frac{\Delta c}{c} + \frac{a}{b \sin C} \operatorname{arc} \Delta B + \operatorname{cotg} C \operatorname{arc} \Delta A,\\ \Delta C &= -\Delta A - \Delta B\end{aligned}\right\} \quad (b')$$

Will man die möglich grössten Werthe von ΔC, $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$ hieraus erhalten, wenn die möglich grössten Werthe von ΔA, ΔB, $\frac{\Delta c}{c}$ gegeben sind, so wird man alle einzelnen Glieder der zweiten Seiten bloss positiv zu nehmen haben, da man ja im Allgemeinen ΔA, ΔB, Δc sowohl positiv als negativ nehmen kann, also das Vorzeichen dieser Grössen immer so wählen darf, dass jedes Glied positiv ausfällt. Offenbar erhält man dadurch die grössten Werthe von $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$, ΔC, die übrigens, wie bereits mehrfach gesagt, sowohl positiv als negativ seyn können.

Aus den Formeln (b′) lässt sich jedoch noch einiges Weitere schliessen. Gesetzt A und B seyen so beschaffen, dass ihre Summe nahe an 180° oder nahe an 0 sey, so ist C nahe an 0 oder 180°, also sin C sehr klein; daraus folgt klar, dass $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$ sehr bedeutend ausfallen werden, wenn auch ΔB, ΔA klein sind; eine solche Annahme ist also möglichst zu vermeiden.

Ist $A + B = 90°$, so erreicht sin C seinen grössten Werth, und cotg C ist $= 0$; also wird, bei unverändertem $\frac{\Delta c}{c}$, sowohl $\frac{\Delta a}{a}$ als $\frac{\Delta b}{b}$ in diesem Falle möglichst klein ausfallen, so dass also dieser Fall zu den günstigen gehört.

Für dieses Fall ($C = 90°$) ist:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta c}{c} + \frac{b}{a} \operatorname{arc} \Delta A, \quad \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta c}{c} + \frac{a}{b} \operatorname{arc} \Delta B.$$

In der Regel werden die Werthe von ΔA, ΔB (ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen) beiläufig einander gleich seyn; ist nun $b > a$, so ist $\frac{b}{a} > 1$, $\frac{a}{b} < 1$ und $\frac{\Delta a}{a}$ fällt grösser aus als $\frac{\Delta b}{b}$; das Umgekehrte

hat Statt, wenn $b < a$. Am besten wird es mithin seyn, wenn $a = b$ (also auch $A = B$), in welchem Falle dann $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$ (nahe) einander gleich seyn werden.

Das günstigste Dreieck für diesen Fall ist mithin das, in welchem

$$A = B = 45^\circ.$$

2) In einem Dreieke sind gegeben c, A, C; daraus berechnet a, b, B (§. 24).

Aus den Formeln (40) ergibt sich, wie oben:

$$\Delta B = -\Delta A - \Delta C,$$
$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta c}{c} - \operatorname{cotg} C \operatorname{arc} \Delta C + \frac{b - a\cos C}{a \sin C} \operatorname{arc} \Delta A,$$
$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta c}{c} + \frac{b\cos C - a}{b\sin C} \operatorname{arc} \Delta A - \frac{a}{b \sin C} \operatorname{arc} \Delta C,$$

d. h. da $b - a\cos C = c\cos A$, $b\cos C - a = -c\cos B$, $a\sin C = c\sin A$, $b\sin C = c\sin B$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta B &= -\Delta A - \Delta C, \\ \frac{\Delta a}{a} &= \frac{\Delta c}{c} - \operatorname{cotg} C \operatorname{arc} \Delta C + \operatorname{cotg} A \operatorname{arc} \Delta A, \\ \frac{\Delta b}{b} &= \frac{\Delta c}{c} - \operatorname{cotg} B \operatorname{arc} \Delta A - \frac{a}{b\sin C} \operatorname{arc} \Delta C, \end{aligned}\right\} \quad (b'')$$

woraus ganz dieselben Folgerungen gezogen werden, wie in Nr. I.

3) In einem Dreiecke sind a, b, C gegeben, und daraus c, A, B berechnet (§. 25).

Aus (40) hat man:

$$\Delta c + a\sin B \operatorname{arc} \Delta B + b \sin A \operatorname{arc} \Delta A = \Delta a \cos B + \Delta b \cos A$$
$$a\cos B \operatorname{arc} \Delta B - b\cos A \operatorname{arc} \Delta A = -\Delta a \sin B + \Delta b \sin A,$$
$$\operatorname{arc} \Delta A + \operatorname{arc} \Delta B = -\operatorname{arc} \Delta C,$$

woraus, indem man ΔB und ΔA aus den zwei letzten Gleichungen bestimmt:

$$(a\cos B + b\cos A) \operatorname{arc} \Delta B = \Delta b \sin A - \Delta a \sin B - b\cos A \operatorname{arc} \Delta C,$$
$$(a\cos B + b\cos A) \operatorname{arc} \Delta A = -\Delta b \sin A + \Delta a \sin B - a\cos B \operatorname{arc} \Delta C,$$

d. h. wegen der Gleichungen (a):

$$c \operatorname{arc} \Delta B = \Delta b \sin A - \Delta a \sin B - b\cos A \operatorname{arc} \Delta C,$$
$$c \operatorname{arc} \Delta A = -\Delta b \sin A + \Delta a \sin B - a\cos B \operatorname{arc} \Delta C;$$

dann ist

$$\Delta c = \Delta a \cos B + \Delta b \cos A - a\sin B \operatorname{arc} \Delta B - b\sin A \operatorname{arc} \Delta A,$$

d. h.

$c\Delta c = c\Delta a \cos B + c\Delta b \cos A - a \sin A \sin B \Delta b + a \sin^2 B \Delta a + ab \sin B \cos A \operatorname{arc} \Delta C + b \sin^2 A \Delta b - b \sin A \sin B \Delta a + ab \sin A \cos B \operatorname{arc} \Delta C = (c \cos B - b \sin A \sin B + a \sin^2 B)\Delta a + (c \cos A - a \sin A \sin B + b \sin^2 A)\Delta b + ab \sin(A+B) \operatorname{arc} \Delta C,$

oder da $b \sin A = a \sin B$, $A + B = 180^0 - C$:

$$c\Delta c = c \cos B \Delta a + c \cos A \Delta b + ab \sin C \operatorname{arc} \Delta C.$$

Also hat man jetzt:

$$\operatorname{arc} \Delta B = \frac{\Delta b \sin A}{c} - \frac{\Delta a \sin B}{c} - \frac{b}{c} \cos A \operatorname{arc} \Delta C,$$

$$\operatorname{arc} \Delta A = -\frac{\Delta b \sin A}{c} + \frac{\Delta a \sin B}{c} - \frac{a}{c} \cos B \operatorname{arc} \Delta C,$$

$$\Delta c = \Delta a \cos B + \Delta b \cos A + \frac{ab}{c} \sin C \operatorname{arc} \Delta C,$$

welche Gleichungen auch in folgender Form geschrieben werden können (da $a \sin C = c \sin A$):

$$\operatorname{arc} \Delta B = \frac{\Delta b}{b} \cdot \frac{b \sin A}{c} - \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{a \sin B}{c} - \frac{b}{c} \cos A \operatorname{arc} \Delta C,$$

$$\operatorname{arc} \Delta A = -\frac{\Delta b}{b} \frac{b \sin A}{c} + \frac{\Delta a}{a} \frac{a \sin B}{c} - \frac{a}{c} \cos B \operatorname{arc} \Delta C,$$

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{a \cos B}{c} + \frac{\Delta b}{b} \cdot \frac{b \cos A}{c} + \frac{b \sin A}{c} \operatorname{arc} \Delta C,$$

oder endlich, da $a \sin B = b \sin A$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{arc} \Delta B &= \frac{b \sin A}{c}\left(\frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta a}{a}\right) - \frac{b \cos A}{c} \operatorname{arc} \Delta C, \\ \operatorname{arc} \Delta A &= \frac{b \sin A}{c}\left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}\right) - \frac{a \cos B}{c} \operatorname{arc} \Delta C, \\ \frac{\Delta c}{c} &= \frac{\Delta a}{a} \frac{a \cos B}{c} + \frac{\Delta b}{b} \frac{b \cos A}{c} + \frac{b \sin A}{c} \operatorname{arc} \Delta C \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Dürfte man geradezu $\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a}$ setzen, d. h. dürfte man annehmen, die Seiten a, b seyen beide um dieselben proportionalen Theile zu gross oder zu klein *, so hätte man, da auch $a \cos B + b \cos B = c$:

* In der Regel werden die absoluten Werthe von $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$ freilich als gleich angesehen werden dürfen; allein man wird nicht geradezu wissen, ob beide positiv, oder beide negativ sind.

$$\text{arc}\, \Delta B = -\frac{b \cos A}{c} \text{arc}\, \Delta C, \quad \text{arc}\, \Delta A = -\frac{a \cos B}{c} \text{arc}\, \Delta C,$$

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{b \sin A}{c} \text{arc}\, \Delta C. \quad (c')$$

Aus den Formeln (c) folgt, dass je grösser c gegen a oder b ist, desto kleiner ΔA, ΔB, $\frac{\Delta c}{c}$ ausfallen, so dass man also den Winkel C so gross als möglich, d. h. so nahe an 180° als möglich wählen soll. Ist daneben $b = a$, so werden, wie leicht ersichtlich, die Fehler ΔA, ΔB einander gleich, was man als vortheilhaft anzusehen berechtigt ist. Im letztern Falle ist auch $A = B$, $b \cos A = a \cos B = \frac{1}{2} c$, also da $b \sin A = a \sin A$ und man $\frac{\Delta b}{b} = \pm \frac{\Delta a}{a}$, also $\frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta a}{a} = 0$ oder $-2 \frac{\Delta a}{a}$ setzen kann:

$$\text{arc}\, \Delta B = \begin{cases} -\frac{1}{2} \text{arc}\, \Delta C, \\ -2\frac{a}{c} \sin A \frac{\Delta a}{a} - \frac{1}{2} \text{arc}\, \Delta C, \end{cases} \quad \text{arc}\, \Delta A = \begin{cases} -\frac{1}{2} \text{arc}\, \Delta C, \\ +2\frac{a}{c} \sin A \frac{\Delta a}{a} - \frac{1}{2} \text{arc}\, \Delta C \end{cases}$$

$$\frac{\Delta c}{c} = \begin{cases} \frac{\Delta a}{a} + \frac{a \sin A}{c} \text{arc}\, \Delta C. \\ \frac{a \sin A}{c} \text{arc}\, \Delta C \end{cases}$$

4) In einem Dreiecke sind gegeben a, b, c; daraus berechnet A, B, C (§. 26).

Die Formeln (40) geben zunächst:

$$\text{arc}\, \Delta A = -\frac{\Delta c \cdot \cos B}{b \sin (A+B)} + \frac{\Delta b \cos (A+B)}{b \sin (A+B)} + \frac{\Delta a}{b \sin (A+B)},$$

$$\text{arc}\, \Delta B = -\frac{\Delta c \cos A}{a \sin (A+B)} + \frac{\Delta b}{a \sin (A+B)} + \frac{\Delta a \cos (A+B)}{a \sin (A+B)},$$

d. h.

$$\text{arc}\, \Delta A = \frac{\Delta a}{b \sin C} - \frac{\Delta b \cos C}{b \sin C} - \frac{\Delta c \cos B}{b \sin C},$$

$$\text{arc}\, \Delta B = -\frac{\Delta a \cos C}{a \sin C} + \frac{\Delta b}{a \sin C} - \frac{\Delta c \cos A}{a \sin C},$$

woraus dann

$$\text{arc}\, \Delta C = -\text{arc}\, \Delta A - \text{arc}\, \Delta B = \Delta a \left(\frac{b \cos C - a}{a b \sin C}\right)$$

$$+ \Delta b \left(\frac{a \cos C - b}{a b \sin C}\right) + \Delta c \left(\frac{a \cos B + b \cos A}{a b \sin C}\right)$$

folgt. Es ist leicht ersichtlich, dass man diesen Gleichungen auch folgende Form geben kann:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{arc} \Delta A &= \frac{1}{\sin C}\left[\frac{a}{b}\frac{\Delta a}{a} - \cos C \frac{\Delta b}{b}\right] - \operatorname{cotg} B \frac{\Delta c}{c}, \\
\operatorname{arc} \Delta B &= \frac{1}{\sin C}\left[\frac{b}{a}\frac{\Delta b}{b} - \cos C \frac{\Delta a}{a}\right] - \operatorname{cotg} A \frac{\Delta c}{c}, \\
\operatorname{arc} \Delta C &= \frac{1}{\sin A}\left[\frac{c}{b}\frac{\Delta c}{c} - \cos A \frac{\Delta b}{b}\right] - \operatorname{cotg} B \frac{\Delta a}{a},
\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Würde man wieder $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta c}{c}$ setzen können, so hätte man, da auch

$$a - b\cos C = c\cos B, \quad \frac{a - b\cos C}{b\sin C} = \frac{c\cos B}{b\sin C} = \operatorname{cotg} B \text{ u. s. w.}$$

$$\Delta A = 0, \; \Delta B = 0, \; \Delta C = 0,$$

d. h. die Winkel würden fehlerlos erhalten, wie natürlich, da unter diesen Voraussetzungen das falsche und wahre Dreieck ähnlich wären.

Sehen wir hievon ab, so zeigen die Gleichungen (d), dass (immerhin unter der Voraussetzung, dass wenigstens nahezu die absoluten Werthe von $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$, $\frac{\Delta c}{c}$ gleich seyen) die Fehler ΔA, ΔB, ΔC möglichst einander gleich ausfallen werden, wenn die drei Winkel A, B, C einander gleich sind, also das Dreieck ein gleichseitiges ist. Letzteres ist also für diesen Fall am vortheilhaftesten.

5) In einem Dreiecke sind a, b, A gegeben und daraus c, B, C berechnet (§. 27).

Die Formeln (40) geben:

$$\operatorname{arc} \Delta B = -\frac{\Delta a}{a}\operatorname{tg} B + \frac{\Delta b}{a}\frac{\sin A}{\cos B} + \frac{b\cos A}{a\cos B}\operatorname{arc} \Delta A,$$

$$\Delta c = \frac{\Delta a}{\cos B} + \frac{\Delta b\cos(A+B)}{\cos B} - \frac{b\sin(A+B)}{\cos B}\operatorname{arc} \Delta A,$$

$$\operatorname{arc} \Delta C = \frac{\Delta a}{a}\operatorname{tg} B - \frac{\Delta b\sin A}{a\cos B} - \frac{a\cos B + b\cos A}{a\cos B}\operatorname{arc} \Delta A,$$

welche Formeln leicht auf folgende Form gebracht werden können:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{arc}\Delta B &= -\frac{\Delta a}{a}\operatorname{tg}B + \frac{\Delta b}{b}\operatorname{tg}B + \operatorname{tg}B\cot g A \operatorname{arc}\Delta A,\\
\operatorname{arc}\Delta C &= \frac{\Delta a}{a}\operatorname{tg}B - \frac{\Delta b}{b}\operatorname{tg}B - \frac{c}{a\cos B}\operatorname{arc}\Delta A,\\
\frac{\Delta c}{c} &= \frac{\Delta a}{a}\cdot\frac{a}{c\cos B} - \frac{\Delta b}{b}\cdot\frac{b\cos C}{c\cos B} - \operatorname{tg}B \operatorname{arc}\Delta A.
\end{aligned}\right\}\quad (e)$$

Aus diesen Formeln folgt, dass jemehr B gegen 0 oder 180° geht, der überall vorkommende Nenner cos B zunimmt, also die Grössen ΔB, ΔC, $\frac{\Delta c}{c}$ abnehmen; jedenfalls ist diess der Fall mit ΔB, ΔC, die also klein werden, wenn B nahe an 0 oder 180° ist, vorausgesetzt, dass nicht A nahe an 0 ist. Was $\frac{\Delta c}{c}$ anbelangt, so wird, wenn B nahe an 0 ist, diese Grösse ebenfalls klein seyn; wenn B aber nahe an 180°, so ist b sehr gross im Verhältniss zu c und $\frac{b\cos C}{c\cos B}$ kann sehr gross seyn, so dass also jetzt $\frac{\Delta c}{c}$ nicht gerade klein ausfällt. Man wird also in diesem Falle die vortheilhafteste Gestalt des Dreiecks erhalten, wenn B nahe an 0 ausfällt, also b sehr klein ist im Verhältniss zu den zwei andern Seiten. Wegen des Bruchs $\frac{a}{c\cos B}$ in $\frac{\Delta c}{c}$ sollte $\frac{a}{c}$ klein; wegen $\frac{c}{a\cos B}$ in ΔC aber $\frac{c}{a}$ klein, also $\frac{a}{c}$ gross seyn; man wird also, wenn beides beachtet werden soll, möglichst a = c wählen, d. h. bei kleinem $\frac{b}{a}$, A nahe an 90° nehmen.

Ist eine oder die andere der gegebenen Grössen als durchaus richtig anzusehen, so wird man in (40) den ihr zukommenden Fehler = 0 zu setzen haben. Diess tritt etwa ein, wenn man zum Voraus weiss, dass das betreffende Dreieck rechtwinklich sey, wo dann der Fehler des rechten Winkels Null ist; es wird aber auch dann anzunehmen seyn, wenn eine als Seite eines grösseren Dreiecksnetzes (§. 43) bereits scharf berechnete Seite zugleich eine der Seiten des hier betrachteten Dreiecks ist. Dessgleichen verhält es sich mit Winkeln, die einer grössern Vermessung entnommen werden.

Die bereits zu Nr. 1 gemachte Bemerkung wegen der aus den

aufgestellten Formeln folgenden äussersten Werthe der Fehler der gesuchten Grössen gilt natürlich für alle Formeln. Die nämlichen Formeln können übrigens auch zu einem andern Zwecke benützt werden. Wünscht man nämlich die (kleine) Aenderung zu kennen, welche die berechneten Grössen erleiden, wenn die Daten um Weniges geändert werden, so geben die Formeln (b) bis (e) diese Aenderungen geradezu, wobei begreiflich die vorkommenden Grössen mit den ihnen in den Formeln beigelegten Zeichen zu nehmen sind.

Ehe wir zu Beispielen übergehen, wollen wir aus dem Vorstehenden einen Schluss auf die vortheilhafteste Gestalt der Dreiecke in geodätischen Netzen (§. 43) machen, d. h. auf diejenige Gestalt, bei der die Beobachtungsfehler den möglich geringsten Einfluss auf die zu berechnenden Seiten und Winkel haben. Da man dabei nach Nr. 1 zu verfahren hat, so würde das gleichschenklich rechtwinkliche Dreieck, dessen Hypothenuse die gemessene Seite wäre, diesen Bedingungen entsprechen. Geht man aber von der Basis des Netzes zu den Dreiecken ersten Rangs über, so werden nothwendig die neuen Seiten grösser als die gemessene; da dies nun nicht vortheilhaft ist, so wird man mithin die neu hinzutretenden Seiten nicht allzu viel grösser wählen als die Basis, oder die bereits bekannte Seite, zugleich die Dreiecke gleichschenklich, hier also fast gleichseitig machen. Daher rührt die geodätische Vorschrift von der Basis aus durch allmählig grösser werdende Dreiecke, die zugleich immer nahe gleichseitig sind (oder wenigstens gleichschenklich), fortzuschreiten.

Geht man aber von den Dreiecken ersten Rangs zu denen eines niederern Rangs über, so wird man sich an die Vorschrift der Nr. 1 halten, d. h. die Dreiecke möglichst rechtwinklich gleichschenklich machen können.

Wir haben im Vorstehenden aus den allgemeinen Formeln gewisse Folgerungen in Bezug auf die vortheilhafteste Gestalt der Dreiecke in den verschiedenen Fällen gezogen. Es versteht sich von selbst, dass diese Folgerungen auch nur im Allgemeinen gelten und im speziellen Falle oftmals etwas verschiedene Ergebnisse erhalten werden können. Es hängt diess begreiflicher Weise von den Verhältnissen der bei Längen- und Winkelmessungen begangenen Fehler ab, und jeder Beobachter wird im Stande seyn, zu entscheiden,

über welche Gränze hinaus diese Fehler bei seinen Beobachtungen sicherlich nicht gehen können. — Wir wollen uns auf diese speziellern Untersuchungen, die nach Anleitung des Vorstehenden äusserst leicht zu führen wären, nicht weiter einlassen, sondern nur noch einige Zahlenbeispiele zufügen, um die Anwendung der obigen Formeln daran zu erläutern.

1) Sey $c = 379{\cdot}5$, $A = 64^\circ\, 9'\, 16''$, $B = 75^\circ\, 18'\, 28''$, also $C = 40^\circ\, 32'\, 16''$, $b = 564{\cdot}8$, $a = 525{\cdot}486$ (§. 24), sey ferner $\frac{\Delta c}{c}$ nicht über $\frac{1}{10{,}000}$, ΔA, ΔB nicht über $1''$, d. h. die Längenmessung fehle höchstens um $\frac{1}{10{,}000}$ der Länge, die Winkel höchstens um $1''$. Für diesen Fall sind nun die Formeln (b′) anzuwenden und zu setzen $\frac{\Delta c}{c} = 0{\cdot}0001$, $\Delta A = \Delta B = 1''$.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{cotg} C &= 10{\cdot}06793 \\ \log \operatorname{arc} 1'' &= 4{\cdot}68557 - 10,^* \\ \hline &\ 4{\cdot}75350 - 10, \end{aligned}$$

$$\operatorname{cotg} C \operatorname{arc} \Delta B = 0{\cdot}00000567,$$
$$\operatorname{cotg} C \operatorname{arc} \Delta A = 0{\cdot}00000567,$$

$$\begin{aligned} \log b &= 2{\cdot}75189 \\ \log \operatorname{arc} 1'' &= 4{\cdot}68557 - 10 \\ E \log a &= 7{\cdot}27943 \\ E \log \sin C &= 0{\cdot}18712 \\ \hline &\ 4{\cdot}90401 - 10. \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a \sin C} \operatorname{arc} \Delta A = 0{\cdot}00000802,$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2{\cdot}72056 \\ \log \operatorname{arc} 1'' &= 4{\cdot}68557 - 10 \\ E \log b &= 7{\cdot}24810 \\ E \log \sin C &= 0{\cdot}18712 \\ \hline &\ 4{\cdot}84135 - 10 \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b \sin c} \operatorname{arc} \Delta B = 0{\cdot}00000694.$$

Also äusserster Werth von

$$\frac{\Delta a}{a} : 0{\cdot}0001 + 0{\cdot}00000567 + 0{\cdot}00000802 = 0{\cdot}00011369,$$

$$\frac{\Delta b}{b} : 0{\cdot}0001 + 0{\cdot}00000694 + 0{\cdot}00000567 = 0{\cdot}00011261,$$

$$\Delta C : 1'' + 1'' = 2'',$$

---

* $\log \operatorname{arc} 1'' = \log \sin 1''$; überhaupt $\log \operatorname{arc} n'' = \log \sin n''$, wenn $n < 1740$ (§. 16).

so dass a, b um etwas mehr als $\frac{1}{10,000}$, C um 2″ gefehlt seyn können.

Würde man c um $\frac{1}{10,000}$, A und B um 1″ ändern (und zwar grösser machen), so würden sich a, b, um 0·00011369, 0·00011261 ihrer Länge, C um — 2″ ändern.

2) a = 5648, b = 3795, C = 64° 9′ 16″, also c = 5254·86, A = 75° 18′ 28·1″, B = 40° 32′ 15·9″ (§. 25); ferner höchste Werthe von $\frac{\varDelta a}{a}$ und $\frac{\varDelta b}{b}$ = 0·001, von $\varDelta C$ = 5″. Die Rechnung wird hier nach den Formeln (c) geführt werden, in denen $\frac{\varDelta a}{a} = \frac{\varDelta b}{b}$ = 0·001, $\varDelta C$ = 5″ ist.

$$\begin{aligned}\log b &= 3\cdot57921\\ \log\sin A &= 9\cdot98556\\ E\log c &= 6\cdot27944\\ \log\frac{\varDelta b}{b} &= 0\cdot00000-3\\ \hline &\ \ 0\cdot84421-4\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\log b &= 3\cdot57921\\ \log\cos A &= 9\cdot40420\\ E\log c &= 6\cdot27944\\ \log \operatorname{arc} 5'' &= 5\cdot38454-10\\ \hline &\ \ 0\cdot64739-6\end{aligned}$$

$$\frac{b\sin A}{c}\frac{\varDelta b}{b} = 0\cdot000699\qquad \frac{b\cos A}{c}\operatorname{arc}\varDelta C = 0\cdot00000444$$

$$\frac{b\sin A}{c}\frac{\varDelta a}{a} = 0.000699$$

$$\begin{aligned}\log a &= 3\cdot75189\\ \log\cos B &= 9\cdot88080\\ E\log c &= 6\cdot27944\\ \log\operatorname{arc} 5'' &= 5\cdot38454-10\\ \hline &\ \ 0\cdot29667-5\end{aligned}$$

$$\frac{a\cos B}{c}\operatorname{arc}\varDelta C = 0\cdot0000198$$

$$\begin{aligned}\log a &= 3\cdot75189\\ \log\cos B &= 9\cdot88080\\ E\log c &= 6\cdot27944\\ \log\frac{\varDelta a}{a} &= 0\cdot00000-3\\ \hline &\ \ 0\cdot91213-4\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\log b &= 3\cdot57921\\ \log\cos A &= 9\cdot40420\\ E\log c &= 6\cdot27944\\ \log\frac{\varDelta b}{b} &= 0\cdot00000-3\\ \hline &\ \ 0\cdot26285-4\end{aligned}$$

$$\frac{a\cos B}{c}\frac{\varDelta a}{a} = 0\cdot000817\qquad \frac{b\cos A}{c}\frac{\varDelta b}{b} = 0\cdot000183$$

$$\log b = 3{\cdot}57921$$
$$\log \sin A = 9{\cdot}98556$$
$$E \log c = 6{\cdot}27944$$
$$\log \text{arc}\, 5'' = 5{\cdot}38454 - 10$$
$$0{\cdot}22875 - 5$$

$$\frac{b \sin A}{c} \text{arc}\, \Delta C = 0{\cdot}0000169$$

Höchste Werthe von

$\text{arc}\, \Delta B = 0{\cdot}000699 + 0{\cdot}000699 + 0{\cdot}000004 = 0{\cdot}001402$,
$\Delta B = 4'49''$,
$\text{arc}\, \Delta A = 0{\cdot}000699 + 0{\cdot}000699 + 0{\cdot}000020 = 0{\cdot}001418$,
$\Delta A = 4'49''$,
$\frac{\Delta c}{c} = 0{\cdot}000817 + 0{\cdot}000183 + 0{\cdot}000017 = 0{\cdot}001017$,

so dass die gesuchten Winkel um $4'49''$, die gesuchte Länge um etwa $\frac{1}{1000}$ falsch seyn kann. Würde man freilich nach (c′) rechnen, so würde B nur um nicht $1''$, A nicht um $5''$ falsch seyn. Das von uns gewählte Beispiel gehört zu den ungünstigen Fällen, da die Fehler in den Winkeln sehr bedeutend sind; sie rühren vorzugsweise von den Fehlern in a und b her.

3) $a = 94593{\cdot}1$, $b = 80322{\cdot}9$, $c = 82425{\cdot}8$, also $A = 71°3'34{\cdot}7''$, $B = 53°26'0{\cdot}6''$, $C = 55°30'24{\cdot}5''$ (§. 26); zugleich sey a höchstens um 8, b um 7, c um 7·5 gefehlt. Also hat man in (d): $\Delta a = 8$, $\Delta b = 7$, $\Delta c = 7{\cdot}5$ zu setzen.

$$\log \Delta a = 0{\cdot}90309 \qquad \log \Delta b = 0{\cdot}84510$$
$$E \log b = 5{\cdot}09516 \qquad \log \text{cotg}\, C = 9{\cdot}83703$$
$$E \log \sin C = 0{\cdot}08397 \qquad E \log b = 5{\cdot}09516$$
$$0{\cdot}08222 - 4 \qquad 0{\cdot}77729 - 5$$

$$\frac{\Delta a}{b \sin C} = 0{\cdot}000121 \qquad \frac{\text{cotg}\, C\, \Delta b}{b} = 0{\cdot}0000599$$

$$\log \Delta c = 0{\cdot}87506$$
$$\log \text{cotg}\, B = 9{\cdot}87027$$
$$E \log c = 5{\cdot}08393$$
$$0{\cdot}82926 - 5$$

$$\frac{\text{cotg}\, B\, \Delta c}{c} = 0{\cdot}0000675$$

$$\log \varDelta b = 0{\cdot}84510 \qquad \log \varDelta a = 0{\cdot}90309$$
$$E \log a = 5{\cdot}02412 \qquad \log \operatorname{cotg} C = 9{\cdot}83703$$
$$E \log \sin C = 0{\cdot}08397 \qquad E \log a = 5{\cdot}02412$$
$$0{\cdot}95319-5 \qquad 0{\cdot}76424-5$$
$$\frac{\varDelta b}{a \sin c} = 0{\cdot}0000898 \qquad \frac{\operatorname{cotg} C \varDelta a}{a} = 0{\cdot}0000581$$

$$\log \varDelta c = 0{\cdot}87506$$
$$\log \operatorname{cotg} A = 9{\cdot}53552$$
$$E \log c = 5{\cdot}08393$$
$$0{\cdot}49451-5$$
$$\frac{\operatorname{cotg} A \varDelta c}{c} = 0{\cdot}0000313$$

$$\log \varDelta c = 0{\cdot}87506 \qquad \log \varDelta b = 0{\cdot}84510$$
$$E \log b = 5{\cdot}09516 \qquad \log \operatorname{cotg} A = 9{\cdot}53552$$
$$E \log \sin A = 0{\cdot}02417 \qquad E \log b = 5{\cdot}09516$$
$$0{\cdot}99439-5 \qquad 0{\cdot}47578-5$$
$$\frac{\varDelta c}{b \sin A} = 0{\cdot}0000987 \qquad \frac{\operatorname{cotg} A \varDelta b}{b} = 0{\cdot}0000299$$

$$\log \varDelta a = 0{\cdot}90309$$
$$\log \operatorname{cotg} B = 9{\cdot}87027$$
$$E \log a = 5{\cdot}02412$$
$$0{\cdot}79748-5$$
$$\frac{\operatorname{cotg} B \varDelta a}{a} = 0{\cdot}0000627$$

Höchste Werthe von

$\operatorname{arc} \varDelta A = 0{\cdot}000121 + 0{\cdot}000060 + 0{\cdot}000067 = 0{\cdot}000248$, $\varDelta A = 51''$,
$\operatorname{arc} \varDelta B = 0{\cdot}000090 + 0{\cdot}000058 + 0{\cdot}000031 = 0{\cdot}000179$, $\varDelta B = 37''$,
$\operatorname{arc} \varDelta C = 0{\cdot}000099 + 0{\cdot}000030 + 0{\cdot}000062 = 0{\cdot}000191$, $\varDelta C = 40''$.

4) $a = 758396$, $b = 623094$, $C = 51^0 7'$, woraus $A = 76^0 0' 56''$, $B = 52^0 52' 4''$, $c = 608379$. Sey ferner $\varDelta a = 0$, $\frac{\varDelta b}{b} = 0{\cdot}00001$, $\varDelta C = 10''$, wobei die Rechnung wieder nach den Formeln (c) zu führen ist.

$$\log b = 5{\cdot}79455 \qquad \log b = 5{\cdot}79455$$
$$\log \sin A = 9{\cdot}98694 \qquad \log \cos A = 9{\cdot}38320$$
$$E \log c = 4{\cdot}21582 \qquad E \log c = 4{\cdot}21582$$
$$\log \frac{\varDelta b}{b} = 0{\cdot}00000-5 \qquad \log \operatorname{arc} 10'' = 5{\cdot}68557$$
$$0{\cdot}99731-6 \qquad 0{\cdot}07914-5$$
$$\frac{b \sin A}{c} \frac{\varDelta b}{b} = 0{\cdot}0000099 \qquad \frac{b \cos A}{c} \operatorname{arc} \varDelta C = 0{\cdot}0000120$$

$$\log a = 5{\cdot}87989$$
$$\log \cos B = 9{\cdot}78079$$
$$E \log c = 4{\cdot}21582$$
$$\log \text{arc } 10'' = 5{\cdot}68557$$
$$\overline{0{\cdot}56207-5}$$

$$\frac{a \cos B}{c} \text{arc } \Delta C = 0{\cdot}0000365$$

$$\log b = 5{\cdot}79455 \qquad \log b = 5{\cdot}79455$$
$$\log \cos A = 9{\cdot}38320 \qquad \log \sin A = 9{\cdot}98694$$
$$E \log c = 4{\cdot}21582 \qquad E \log c = 4{\cdot}21582$$
$$\log \frac{\Delta b}{b} = 0{\cdot}00000-5 \qquad \log \text{arc } 10'' = 5{\cdot}68557$$
$$\overline{0{\cdot}39357-6} \qquad \overline{0{\cdot}68288-5}$$
$$\frac{b \cos A}{c} \frac{\Delta b}{b} = 0{\cdot}0000024 \qquad \frac{b \sin A}{c} \text{arc } \Delta C = 0{\cdot}0000482.$$

Höchste Werthe von:

$$\text{arc } \Delta B = 0{\cdot}0000099 + 0{\cdot}0000120 = 0{\cdot}0000219, \Delta B = 4{\cdot}5'',$$
$$\text{arc } \Delta A = 0{\cdot}0000099 + 0{\cdot}0000365 = 0{\cdot}0000464, \Delta A = 9{\cdot}6'',$$
$$\frac{\Delta c}{c} = 0{\cdot}0000024 + 0{\cdot}0000482 = 0{\cdot}0000506, \frac{\Delta c}{c} = \frac{1}{20{,}000},$$

so dass also B etwa um 4·5″, A um 9·6″, c um den 20,000 Theil seiner Länge gefehlt seyn kann.

§. 48.

In ganz ähnlicher Weise, wie wir im Vorstehenden die Fehlergränzen für Resultate erhalten haben, die vermittelst der Rechnung aus nicht ganz fehlerfreien Angaben erhalten wurden, wird man in zusammengesetztern Fällen zu verfahren haben. In denjenigen Fällen, in welchen mittelst Dreiecken das Resultat gefunden wurde, wird es ohnehin, gemäss §. 47, leicht seyn, die äusserste Fehlergränze desselben zu erhalten. Doch kann man die Rechnung auch ganz direkt aufnehmen, ohne sich auf die Resultate des §. 47 zu berufen, was in den meisten Fällen leichter zum Endergebniss führt, wie wir nun an einigen der im sechsten Abschnitt behandelten Aufgaben zeigen wollen.

1) Nr. 3 in §. 36. Seyen $\Delta a, \Delta b, \Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma$ die Fehler in a, b, α, β, γ; Δx, Δy die in den gesuchten Winkeln, endlich ΔCD der in CD, so hat man zunächst die Gleichungen:

$$x + y = \gamma,\ a \sin\alpha \sin(\beta + y) = b \sin\beta \sin(\alpha + x), \quad (a)$$

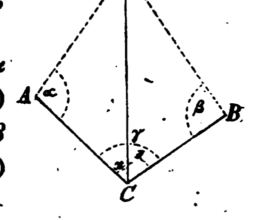


Fig. 45.

welche natürlich noch richtig sind, wenn man $x + \Delta x, y + \Delta y, a + \Delta a, \ldots$ für $x, y, a, \ldots$ setzt, so dass

$$x + \Delta x + y + \Delta y = \gamma + \Delta\gamma,\ (a + \Delta a)(\sin\alpha + \cos\alpha \operatorname{arc}\Delta\alpha)[\sin(\beta + y) + \cos(\beta + y)(\operatorname{arc}\Delta\beta + \operatorname{arc}\Delta y)] = (b + \Delta b)(\sin\beta + \cos\beta \operatorname{arc}\Delta\beta)[\sin(\alpha + x) + \cos(\alpha + x)(\operatorname{arc}\Delta\alpha + \operatorname{arc}\Delta x)].$$

Multiplizirt man, vernachlässigt die Produkte der kleinen Grössen Δa, $\operatorname{arc}\Delta\alpha, \ldots$, und beachtet obige Gleichungen (a), so erhält man hieraus:

$$\Delta x + \Delta y = \Delta\gamma,\ \Delta a \sin\alpha \sin(\beta + y) + a \cos\alpha \operatorname{arc}\Delta\alpha \sin(\beta + y) + a \sin\alpha \cos(\beta + y)(\operatorname{arc}\Delta\beta + \operatorname{arc}\Delta y) = \Delta b \sin\beta \sin(\alpha + x) + b \cos\beta \operatorname{arc}\Delta\beta \sin(\alpha + x) + b \sin\beta \cos(\alpha + x)(\operatorname{arc}\Delta\alpha + \operatorname{arc}\Delta x),$$

woraus Δx und Δy zu bestimmen sind. Da die erste dieser Gleichungen auch heisst:

$$\operatorname{arc}\Delta x + \operatorname{arc}\Delta y = \operatorname{arc}\Delta\gamma,$$

so geben dieselben:

$$[a \sin\alpha \cos(\beta + y) + b \sin\beta \cos(\alpha + x)] \operatorname{arc}\Delta x = \Delta a \sin\alpha \sin(\beta + y) + \operatorname{arc}\Delta\alpha [a \cos\alpha \sin(\beta + y) - b \sin\beta \cos(\alpha + x)] + \operatorname{arc}\Delta\beta [a \sin\alpha \cos(\beta + y) - b \cos\beta \sin(\alpha + x)] - \Delta b \sin\beta \sin(\alpha + x) + a \sin\alpha \cos(\beta + y) \operatorname{arc}\Delta\gamma,$$

$$[a \sin\alpha \cos(\beta + y) + b \sin\beta \cos(\alpha + x)] \operatorname{arc}\Delta y = -\Delta a \sin\alpha \sin(\beta + y) + \Delta b \sin\beta \sin(\alpha + x) + \operatorname{arc}\Delta\alpha [b \sin\beta \cos(\alpha + x) - a \cos\alpha \sin(\beta + y)] + \operatorname{arc}\Delta\beta [b \cos\beta \sin(\alpha + x) - a \sin\alpha \cos(\beta + y)] + b \sin\beta \cos(\alpha + x) \operatorname{arc}\Delta\gamma.$$

Nun folgt aber aus (a):

$$a \sin\alpha \cos(\beta + y) + b \sin\beta \cos(\alpha + x) = a \sin\alpha \cos(\beta + y) + \frac{a \sin\alpha \sin(\beta + y) \cos(\alpha + x)}{\sin(\alpha + x)}$$

$$= a \sin\alpha \frac{[\cos(\beta + y) \sin(\alpha + x) + \sin(\beta + y) \cos(\alpha + x)]}{\sin(\alpha + x)}$$

$$= \frac{a \sin\alpha \sin(\alpha + \beta + x + y)}{\sin(\alpha + x)} = \frac{a \sin\alpha \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin(\alpha + x)},$$

$$a\sin\alpha\cos(\beta+y)-b\cos\beta\sin(\alpha+x)=a\sin\alpha\cos(\beta+y)$$
$$-\frac{a\sin\alpha\sin(\beta+y)\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{a\sin\alpha[\cos(\beta+y)\sin\beta-\sin(\beta+y)\cos\beta]}{\sin\beta}$$
$$=\frac{-a\sin\alpha\sin y}{\sin\beta},$$
$$a\cos\alpha\sin(\beta+y)-b\sin\beta\cos(\alpha+x)=a\cos\alpha\sin(\beta+y)$$
$$-\frac{a\sin\alpha\sin(\beta+y)\cos(\alpha+x)}{\sin(\alpha+x)}=\frac{a\sin(\beta+y)\sin x}{\sin(\alpha+x)};$$

also hat man nach einigen sehr leichten Umformungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\operatorname{arc}\Delta x=\frac{\Delta a}{a}\cdot\frac{\sin(\beta+y)\sin(\alpha+x)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}-\frac{\Delta b}{b}\frac{\sin(\alpha+x)\sin(\beta+y)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\\
+\operatorname{arc}\Delta\alpha\cdot\frac{\sin x\sin(\beta+y)}{\sin a\sin(\alpha+\beta+\gamma)}-\operatorname{arc}\Delta\beta\cdot\frac{\sin y\sin(\alpha+x)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\\
\qquad+\operatorname{arc}\Delta\gamma\cdot\frac{\sin(a+x)\cos(\beta+y)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)},\\
\operatorname{arc}\Delta y=-\frac{\Delta a}{a}\frac{\sin(\alpha+x)\sin(\beta+y)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}+\frac{\Delta b}{b}\frac{\sin(\alpha+x)\sin(\beta+y)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\\
-\operatorname{arc}\Delta\alpha\cdot\frac{\sin x\sin(\beta+y)}{\sin\alpha\sin(a+\beta+\gamma)}+\operatorname{arc}\Delta\beta\cdot\frac{\sin y\sin(\alpha+x)}{\sin\beta\sin(a+\beta+\gamma)}\\
\qquad+\operatorname{arc}\Delta\gamma\cdot\frac{\cos(\alpha+x)\sin(\beta+y)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.
\end{array}\right\}\text{(b)}$$

Die Linie CD = z wird aus der Gleichung

$$z\sin(\alpha+x)=a\sin\alpha$$

bestimmt, aus der wie so eben folgt:

$$\Delta z\sin(\alpha+x)+z\cos(\alpha+x)(\operatorname{arc}\Delta\alpha+\operatorname{arc}\Delta x)=\Delta a\sin\alpha+a\cos\alpha\operatorname{arc}\Delta\alpha.$$

Setzt man hier den Werth von $\operatorname{arc}\Delta x$ aus (b), so ergiebt sich:

$$\begin{array}{l}
\Delta z=\frac{\Delta a}{a}\left[\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+x)}-\frac{z\operatorname{cotg}(\alpha+x)\sin(\beta+y)\sin(\alpha+x)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\right]\\
\qquad+\frac{\Delta b}{b}\frac{\operatorname{cotg}(\alpha+x).\sin(\alpha+x)\sin(\beta+y)}{\sin(a+\beta+\gamma)}z\\
-\operatorname{arc}\Delta\alpha\left[\frac{-a\cos\alpha}{\sin(\alpha+x)}+z\operatorname{cotg}(\alpha+x)+\frac{z\operatorname{cotg}(\alpha+x)\sin x\sin(\beta+y)}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\right]\\
\qquad+\operatorname{arc}\Delta\beta\cdot\frac{z\operatorname{cotg}(\alpha+x)\sin y\sin(\alpha+x)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\\
\qquad-\operatorname{arc}\Delta\gamma\frac{z\operatorname{cotg}(\alpha+x)\sin(\alpha+x)\cos(\beta+y)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.
\end{array}$$

Setzt man $a \sin\alpha = z \sin(\alpha + x)$, oder $\frac{a}{\sin(\alpha+x)} = \frac{z}{\sin\alpha}$, so hat man hieraus

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta a}{a}\left[1 - \frac{\cos(\alpha+x)\sin(\beta+y)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\right] + \frac{\Delta b}{b}\,\frac{\cos(\alpha+x)\sin(\beta+y)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$
$$-\operatorname{arc}\Delta\alpha\left[\operatorname{cotg}(\alpha+x) + \frac{\operatorname{cotg}(\alpha+x)\sin x\sin(\beta+y)}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma)} - \operatorname{cotg}\alpha\right]$$
$$+\operatorname{arc}\Delta\beta\,\frac{\cos(\alpha+x)\sin y}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)} - \operatorname{arc}\Delta\gamma\,\frac{\cos(\alpha+x)\cos(\beta+y)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)},$$

welche Gleichung nach einigen leichten Umformungen auf die Form:

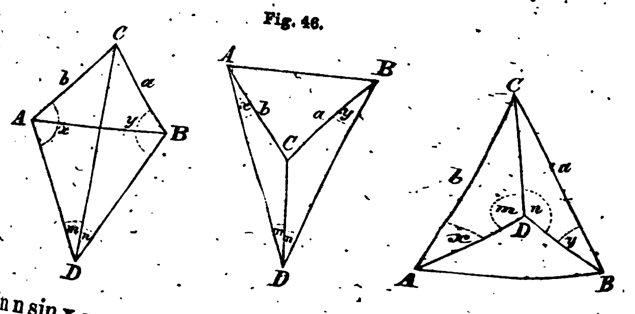
$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta a}{a}\cdot\frac{\sin(\alpha+x)\cos(\beta+y)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} + \frac{\Delta b}{b}\,\frac{\cos(\alpha+x)\sin(\beta+y)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$
$$+\operatorname{arc}\Delta\alpha\cdot\frac{\sin x\cos(\beta+y)}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma)} + \operatorname{arc}\Delta\beta\,\frac{\sin y\cos(\alpha+x)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$
$$-\operatorname{arc}\Delta\gamma\,\frac{\cos(\alpha+x)\cos(\beta+y)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} \qquad (c)$$

gebracht wird. Die Formeln (b) und (c) zeigen, dass man sich hüten müsse, $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ klein, also $\alpha+\beta+\gamma$ nahe an 180° oder 360° zu wählen. Am besten wird man $\alpha+\beta+\gamma$ nahe an 270° wählen, und zwar, wenn thunlich, α, β, γ, jeden nahe an 90°. (Die Formeln (b) und (c) sind vollkommen symmetrisch gebaut, was immerhin ein Anzeichen ihrer Richtigkeit ist).

2) Nr. 6 in §. 36. Nehmen wir an, a, b, C seyen fehlerlos, so hat man:



Fig. 46.



$$b\sin n\sin x = a\sin m\sin y;\ x + y = \beta - (m+n),$$

wo β entweder $= 360^\circ - C$ oder $= C$ ist. Hieraus folgt in obiger Weise:

$$b\cos n\sin x\operatorname{arc}\Delta n + b\sin n\cos x\operatorname{arc}\Delta x = a\cos m\sin y\operatorname{arc}\Delta m$$
$$+ a\sin m\cos y\operatorname{arc}\Delta y,$$

$$\text{arc}\,\Delta x + \text{arc}\,\Delta y = -\text{arc}\,\Delta m - \text{arc}\,\Delta n,$$

aus welchen Gleichungen arc Δx, arc Δy, oder Δx, Δy zu bestimmen sind. (Denkt man sich beide Gleichungen mit $\frac{180.60.60}{\pi}$ multiplizirt, so ist $\frac{180.60.60}{\pi}$ arc $\Delta n = \Delta n$ u. s. w., so dass man in beiden Gleichungen auch Δm, Δn, Δx, Δy für arc Δm, ... setzen könnte; doch wird es wegen des Nachfolgenden bequemer seyn, obige Form beizubehalten), Man zieht daraus:

$$(b \sin n \cos x + a \sin m \cos y) \,\text{arc}\,\Delta x = (a \cos m \sin y - a \sin m \cos y)$$
$$\text{arc}\,\Delta m - (b \cos n \sin x + a \sin m \cos y) \,\text{arc}\,\Delta n,$$
$$(b \sin n \cos x + a \sin m \cos y) \,\text{arc}\,\Delta y = -(b \sin n \cos x + a \cos m \sin y)$$
$$\text{arc}\,\Delta m + (b \cos n \sin x - b \sin n \cos x) \,\text{arc}\,\Delta n,$$

d. h.

$$\frac{a \sin m \sin(x+y)}{\sin x} \text{arc}\,\Delta x = a \sin(y-m) \,\text{arc}\,\Delta m - \frac{a \sin m \sin(y+n)}{\sin n} \text{arc}\,\Delta n,$$
$$\frac{a \sin m \sin(x+y)}{\sin x} \text{arc}\,\Delta y = -a \frac{\sin y \sin(m+x)}{\sin x} \text{arc}\,\Delta m$$
$$+ b \sin(x-n) \,\text{arc}\,\Delta n,$$

d. h. $$\text{arc}\,\Delta x = \frac{\sin x \sin(y-m)}{\sin m \sin(x+y)} \text{arc}\,\Delta m - \frac{\sin x \sin(y+n)}{\sin n \sin(x+y)} \text{arc}\,\Delta n,$$
$$\text{arc}\,\Delta y = -\frac{\sin y \sin(m+x)}{\sin m \sin(x+y)} \text{arc}\,\Delta m + \frac{\sin y \sin(x-n)}{\sin n \sin(x+y)} \text{arc}\,\Delta n.$$

Sey nunmehr

$$CD = u, AD = v, DB = w,$$

so hat man:

$$u \sin m = b \sin x,\; v \sin m = b \sin(m+x),\; w \sin n = a \sin(n+y).$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\Delta u \sin m + u \cos m \,\text{arc}\,\Delta m = b \cos x \,\text{arc}\,\Delta x,\; \Delta v \sin m + v \cos m \,\text{arc}\,\Delta m$$
$$= b \cos(m+x)(\text{arc}\,\Delta m + \text{arc}\,\Delta x),\; \Delta w \sin n + w \cos n \,\text{arc}\,\Delta n$$
$$= a \cos(n+y)(\text{arc}\,\Delta n + \text{arc}\,\Delta y),$$

also wenn man die Werthe von arc Δx, arc Δy benützt:

$$\Delta u \sin m = \left[\frac{b \cos x \sin x \sin(y-m)}{\sin m \sin(x+y)} - u \cos m\right] \text{arc}\,\Delta m$$
$$- \frac{b \sin x \cos x \sin(y+n)}{\sin n \sin(x+y)} \text{arc}\,\Delta n,$$

oder da $\frac{b}{\sin m} = \frac{u}{\sin x}$, $b \sin x = u \sin m$:

$$\sin m \frac{\Delta u}{u} = \left[\frac{\cos x \sin(y-m)}{\sin(x+y)} - \cos m\right] \operatorname{arc} \Delta m$$

$$- \frac{\sin m \cos x \sin(y+n)}{\sin n \sin(x+y)} \operatorname{arc} \Delta n,$$

$$\frac{\Delta u}{u} = - \frac{\cos y \sin(x+m)}{\sin m \sin(x+y)} \operatorname{arc} \Delta m - \frac{\cos x \sin(y+n)}{\sin n \sin(x+y)} \operatorname{arc} \Delta n.$$

$$\Delta v \sin m = \operatorname{arc} \Delta m \left[b \cos(m+x) - v \cos m \right.$$

$$\left. + \frac{b \cos(m+x) \sin x \sin(y-m)}{\sin m \sin(x+y)}\right] - \frac{b \cos(m+x) \sin x \sin(y+n)}{\sin n \sin(x+y)} \operatorname{arc} \Delta n,$$

oder da $b = \frac{v \sin m}{\sin(m+x)}$:

$$\frac{\Delta v}{v} \sin m = \operatorname{arc} \Delta m \left[\frac{\sin m \cos(m+x)}{\sin(m+x)}\right.$$

$$\left. - \cos m + \frac{\cos(m+x) \sin x \sin(y-m)}{\sin(m+x) \sin(x+y)}\right]$$

$$- \frac{\sin m \cos(m+x) \sin x \sin(y+n)}{\sin n \sin(m+x) \sin x + y)} \operatorname{arc} \Delta n$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \operatorname{arc} \Delta m \left[\frac{\cos(m+x) \sin(y-m) - \sin(x+y)}{\sin m \sin(m+x) \sin(x+y)}\right] \sin x$$

$$- \operatorname{arc} \Delta n \,.\, \frac{\cos(m+x) \sin x \sin(y+n)}{\sin n \sin(m+x) \sin(x+y)}.$$

$$\Delta w \sin n = - \operatorname{arc} \Delta m \,.\, \frac{a \cos(n+y) \sin y \sin(m+x)}{\sin m \sin(x+y)}$$

$$+ \operatorname{arc} \Delta n \left[a \cos(n+y) - w \cos n + \frac{a \cos(n+y) \sin y \sin(x-n)}{\sin n \sin(x+y)}\right],$$

oder da $a = \frac{w \sin n}{\sin(n+y)}$:

$$\frac{\Delta w}{w} \sin n = - \operatorname{arc} \Delta m \,.\, \frac{\sin n \sin(m+x) \cos(n+y) \sin y}{\sin m \sin(x+y) \sin(n+y)}$$

$$+ \operatorname{arc} \Delta n \left[\frac{\sin n \cos(n+y)}{\sin(n+y)} - \cos n + \frac{\cos(n+y) \sin y \sin(x-n)}{\sin(n+y) \sin(x+y)}\right],$$

$$\frac{\Delta w}{w} = - \operatorname{arc} \Delta m \,.\, \frac{\sin(m+x) \sin y \cos(n+y)}{\sin m \sin(n+y) \sin(x+y)}$$

$$+ \operatorname{arc} \Delta n \left[\frac{\cos(n+y) \sin(x-n) - \sin(x+y)}{\sin n \sin(n+y) \sin(x+y)}\right].$$

Aus den Ausdrücken für Δx, Δy, $\frac{\Delta v}{v}$, $\frac{\Delta u}{u}$, $\frac{\Delta w}{w}$ (wozu die drei

ersten genügen) schliesst man nun, dass man m und n nicht gar zu klein nehmen darf für den Fall der ersten oder zweiten Figur, und nicht zu nahe an 180^0 für den der dritten, da sonst sin m, sin n zu klein ausfallen; sodann darf nicht $x+y$ für die erste Figur nahe an 180^0 seyn, da sonst $\sin(x+y)$ nahe an 0 wäre; wäre aber $x+y = 180^0$, so läge D in dem Umfang des um ABC beschriebenen Kreises, dem man also nicht zu nahe kommen darf. Für die zweite Figur darf nicht $x+y$ nahe an 0, d. h. nicht $m+n$ nahe an C seyn, da hier übrigens x und y immer ziemlich klein seyn werden; wenn C es ist, so wird man nur dann diesen Fall vortheilhaft anwenden, wenn C bedeutend stumpf ist, und allerdings am besten, wenn $C - (m+n) = 90^0$, da dann $\sin(x+y) = 1$, also seinen grössten Werth erlangt. Im dritten Falle wird immer $m+n > 180^0$, also $x+y$ nicht nahe an 180^0 seyn, es müsste denn C sehr klein, und D nahe an AB seyn, was man vermeiden wird.* Die so eben angegebenen Regeln sind, wie das behandelte Problem selbst, für die Praxis sehr wichtig.

3) Nr. 12 in §. 37: Ist CD = x, so hat man

$$x \cos\gamma \sin(\alpha-\beta) = a \sin\alpha \sin\beta,$$

Fig. 47.

woraus folgt:**

$$\Delta x \cos\gamma \sin(\alpha-\beta) - x \sin\gamma \sin(\alpha-\beta) \operatorname{arc}\Delta\gamma + x\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)(\operatorname{arc}\Delta\alpha - \operatorname{arc}\Delta\beta)$$
$$= \Delta a \sin\alpha \sin\beta + a \cos\alpha \sin\beta \operatorname{arc}\Delta\alpha + a \sin\alpha\cos\beta \operatorname{arc}\Delta\beta,$$

also

$$\Delta x \cos\gamma \sin(\alpha-\beta) = \Delta a \sin\alpha\sin\beta + \operatorname{arc}\Delta\alpha\,[a\cos\alpha\sin\beta - x\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)]$$

---

* Aehnliche Regeln, wie die so eben aufgestellte, hat man aus der Betrachtung des sogenannten Fehlerdreiecks abgeleitet. Die von uns gegebene Ableitung ist jedoch allgemeiner und leichter zu überschauen.

** Es ist nicht schwer, allgemeine Regeln aufzustellen, nach denen diese Bildungsweise vollzogen wird. Hat man nämlich das Produkt $x \cos\gamma \sin(\alpha-\beta)$, so ist zu setzen für $x : x+\Delta x$, für $\cos\gamma : \cos\gamma - \sin\gamma \operatorname{arc}\Delta\gamma$, für $\sin(\alpha-\beta) : \sin(\alpha-\beta) + \cos(\alpha-\beta)(\operatorname{arc}\Delta\alpha - \operatorname{arc}\Delta\beta)$; thut man diess und vernachlässigt die Produkte der Fehler, so erhält man

$$x\cos\gamma\sin(\alpha-\beta) + \Delta x \cos\gamma\sin(\alpha-\beta) - x\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\operatorname{arc}\Delta\gamma + x\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)(\operatorname{arc}\Delta\alpha - \operatorname{arc}\Delta\beta),$$

und die auf $x\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)$ folgende Grösse ist die Aenderung von $x\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)$

$$+ \operatorname{arc} \Delta\beta \, [a \sin\alpha \cos\beta + x \cos\gamma \cos(a - \beta)] + x \sin\gamma \sin(\alpha - \beta) \operatorname{arc} \Delta\gamma$$

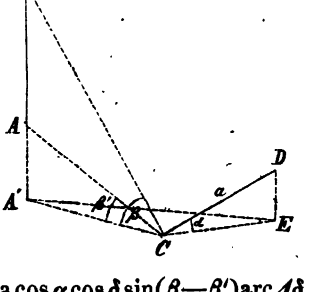
$$= x \cos\gamma \sin(\alpha - \beta) \frac{\Delta a}{a} + \operatorname{arc} \Delta\alpha \left[\frac{x \cos\gamma \sin(\alpha - \beta) \cos\alpha}{\sin\alpha} - x \cos\gamma \cos(\alpha - \beta) \right]$$

$$+ \operatorname{arc} \Delta\beta \left[\frac{x \cos\gamma \sin(\alpha - \beta) \cos\beta}{\sin\beta} + x \cos\gamma \cos(\alpha - \beta) \right] + x \sin\gamma \sin(\alpha - \beta) \operatorname{arc} \Delta\gamma,$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} - \operatorname{arc} \Delta\alpha . \frac{\sin\beta}{\sin\alpha \sin(\alpha - \beta)} + \operatorname{arc} \Delta\beta . \frac{\sin\alpha}{\sin\beta \sin(\alpha - \beta)} + \operatorname{arc} \Delta\gamma \operatorname{tg}\gamma.$$

Es soll also $\alpha - \beta$ nicht zu klein seyn, was darauf zurückkommt, a nicht zu klein zu wählen; da arc $\Delta\gamma$ wohl grösser als arc $\Delta\alpha$, arc $\Delta\beta$ seyn wird, γ aber klein, also tg γ ebenfalls klein ist, so wird selbst ein beträchtlicher Fehler in γ keinen allzugrossen Einfluss ausüben. Da immer $\alpha > \beta$, also $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} > 1$, $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < 1$, so wird man namentlich den Winkel β mit grosser Genauigkeit zu messen haben; das Hauptgewicht jedoch wird im Allgemeinen auf die genaue Messung von a zu legen seyn.

4) Nr. 13 in §. 37. Ist wieder AB = x, so hat man



$$x \sin(\gamma + \delta) \cos\beta \cos\beta' = a \cos\alpha \sin\delta \sin(\beta - \beta'),$$

woraus folgt:

$$\Delta x \sin(\gamma + \delta) \cos\beta \cos\beta' + x \cos(\gamma + \delta) \cos\beta \cos\beta' (\operatorname{arc} \Delta\gamma + \operatorname{arc} \Delta\delta) - x \sin(\gamma + \delta) \sin\beta \cos\beta' \operatorname{arc} \Delta\beta - x \sin(\gamma + \delta) \cos\beta \sin\beta' \operatorname{arc} \Delta\beta' =$$
$$\Delta a \cos\alpha \sin\delta \sin(\beta - \beta') - a \sin\alpha \sin\delta \sin(\beta - \beta') \operatorname{arc} \Delta\alpha + a \cos\alpha \sin\delta \cos(\beta - \beta') (\operatorname{arc} \Delta\beta - \operatorname{arc} \Delta\beta') + a \cos\alpha \cos\delta \sin(\beta - \beta') \operatorname{arc} \Delta\delta,$$

$$\Delta x \sin(\gamma + \delta) \cos\beta \cos\beta' = \Delta a . \cos\alpha \sin\delta \sin(\beta - \beta') - \operatorname{arc} \Delta\alpha .$$

---

während Δx, $-\sin\gamma$ arc $\Delta\gamma$, cos $(\alpha - \beta)$, (arc $\Delta\alpha$ — arc $\Delta\beta$) die Aenderungen von x, cos γ, sin $(\alpha - \beta)$ sind. Diess beachtet, erhält man für die Bildung der Aenderung eines Produkts folgende Regel:

Man multiplizire die Aenderung jedes einzelnen Faktors mit dem Produkte aller übrigen Faktoren, und die so erhaltenen Grössen summire man sodann.

$a \sin\alpha \sin\delta \sin(\beta-\beta') + \text{arc}\,\varDelta\beta\,[x\sin(\gamma+\delta)\sin\beta\cos\beta' + a\cos\alpha$
$\sin\delta\cos(\beta-\beta')]$
$+ \text{arc}\,\varDelta\beta'\,[x\sin(\gamma+\delta)\cos\beta\sin\beta' - a\cos\alpha\sin\delta\cos(\beta-\beta')]$
$- \text{arc}\,\varDelta\gamma\,.\,x\cos(\gamma+\delta)\cos\beta\cos\beta'$
$+ \text{arc}\,\varDelta\delta\,[a\cos\alpha\cos\delta\sin(\beta-\beta') - x\cos(\gamma+\delta)\cos\beta\cos\beta'],$

woraus, da
$$a = \frac{x\sin(\gamma+\delta)\cos\beta\cos\beta'}{\cos\alpha\sin\delta\sin(\beta-\beta')}$$
ist, leicht folgt:
$$\frac{\varDelta x}{x} = \frac{\varDelta a}{a} - \text{arc}\,\varDelta\alpha\,.\,\text{tg}\,\alpha + \text{arc}\,\varDelta\beta : \frac{\cos\beta'}{\cos\beta\sin(\beta-\beta')}$$
$$-\text{arc}\,\varDelta\beta'\frac{\cos\beta}{\cos\beta'\sin(\beta-\beta')} - \text{arc}\,\varDelta\gamma\,\text{cotg}(\gamma+\delta) + \text{arc}\,\varDelta\delta.\frac{\sin\gamma}{\sin\delta\sin(\gamma+\delta)}.$$

Also soll, wenn β und β' nicht äusserst scharf gemessen sind, $\beta-\beta'$ nicht zu klein werden, da sonst der Nenner $\sin(\beta-\beta')$ nahe an 0 kömmt; da α, also auch $\text{tg}\,\alpha$ klein ist, so wird ein Fehler in α keinen gar grossen Einfluss ausüben; die Summe $\gamma+\delta$ soll nicht nahe an 180^0 gehen, da sonst $\text{cotg}(\gamma+\delta)$ und $\frac{1}{\sin(\gamma+\delta)}$ sehr gross würden. Alles kömmt also darauf zurück, die Standlinie CD nicht gar zu weit von AB und auch nicht gar zu klein zu machen, da sonst $\gamma+\delta$ nahe an 180^0 und $\beta-\beta'$ nahe an 0 käme.

Für $\beta' = 0$ hat man:
$$\frac{\varDelta x}{x} = \frac{\varDelta a}{a} - \text{arc}\,\varDelta\alpha.\text{tg}\,\alpha + \frac{2\,\text{arc}\,\varDelta\beta}{\sin 2\beta} - \text{arc}\,\varDelta\gamma\,\text{cotg}(\gamma+\delta) + \frac{\text{arc}\,\varDelta\delta\sin\gamma}{\sin\delta\sin(\gamma+\delta)};$$
ist auch zugleich noch $\alpha = 0$:
$$\frac{\varDelta x}{x} = \frac{\varDelta a}{a} + \frac{2\,\text{arc}\,\varDelta\beta}{\sin 2\beta} - \text{arc}\,\varDelta\gamma\,\text{cotg}(\gamma+\delta) + \frac{\text{arc}\,\varDelta\delta\sin\gamma}{\sin\delta\sin(\gamma+\delta)}.$$

5) Als weiteres Beispiel wollen wir das in §. 40 zuerst berechnete wählen. Man hat dort, wenn man statt der abgekürzten Formel (37') die genauere (37) beachtet:
$$s = \frac{a\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)},\ C = \frac{s}{r}\varrho,\ x = \frac{s\cos\left[z + \frac{2k-1}{2}C\right]}{\sin[z+(k-1)C]}$$
$$= \frac{s\sin[\beta - kC + \frac{1}{2}C]}{\cos[\beta - kC + C]},\ \varrho = \frac{180.60.60}{\pi},$$
d. h.
$$s.\sin(\gamma+\delta) = a\sin\delta,\ C = \frac{s}{r}\varrho,\ x\cos(\beta - kC + C) = s.\sin(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C).$$

Hieraus folgt:

$$\Delta s \,.\, \sin(\gamma+\delta) + s\cos(\gamma+\delta)(\operatorname{arc}\Delta\gamma + \operatorname{arc}\Delta\delta) = \Delta a \sin\delta$$
$$+ a\cos\delta \operatorname{arc}\Delta\delta,\ \operatorname{arc}\Delta C = \frac{\Delta s}{r},\ \operatorname{arc} C = \frac{s}{r},$$
$$\Delta x\cos(\beta - kC + C) - x\sin(\beta - kC + C)(\operatorname{arc}\Delta\beta - k\operatorname{arc}\Delta C$$
$$- \operatorname{arc} C\Delta k + \operatorname{arc}\Delta C)$$
$$= \Delta s\sin(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C) + s\cos(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)(\operatorname{arc}\Delta\beta - k\operatorname{arc}\Delta C$$
$$- \operatorname{arc} C\Delta k + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc}\Delta C),$$

wovon die letzte Gleichung auch heisst:

$$\Delta x\cos(\beta - kC + C) = \operatorname{arc}\Delta\beta[x\sin(\beta - kC + C) + s\cos(\beta - kC$$
$$+ \tfrac{1}{2}C)] - \Delta k\left[\frac{xs}{r}\sin(\beta - kC + C) + \frac{s^2}{r}\cos(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)\right]$$
$$+ \Delta s\left[\sin(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C) - \frac{ks}{r}\cos(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C) + \tfrac{1}{2}\frac{s}{r}\cos\right.$$
$$\left.(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C) - \frac{kx}{r}\sin(\beta - kC + C) + \frac{x}{r}\sin(\beta - kC + C)\right],$$

worin aber

$$x\sin(\beta - kC + C) + s\cos(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)$$
$$= x\left[\sin(\beta - kC + C) + \frac{\cos(\beta - kC + C)}{\sin(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)}\cos(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)\right]$$
$$= x \,.\, \frac{\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)} = \frac{x}{\sin(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)},\ \text{wenn} \cos\tfrac{1}{2}C = 1,$$
$$\frac{xs}{r}\sin(\beta - kC + C) + \frac{s^2}{r}\cos(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C) = \frac{s}{r}[x\sin(\beta - kC + C)$$
$$+ s\cos(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)] = \frac{xs}{r\sin(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)}.$$

Ferner ist

$$\Delta s\sin(\gamma+\delta) = \Delta a\sin\delta - \operatorname{arc}\Delta\gamma \,.\, s\cos(\gamma+\delta) + \operatorname{arc}\Delta\delta\,(a\cos\delta$$
$$- s\cos(\gamma+\delta))$$
$$= \Delta a\sin\delta - \operatorname{arc}\Delta\gamma \,.\, s\cos(\gamma+\delta) + \operatorname{arc}\Delta\delta \,.\, s \,.\, \frac{\sin\gamma}{\sin\delta},$$

woraus

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta a}{a} - \operatorname{arc}\Delta\gamma\operatorname{cotg}(\gamma+\delta) + \operatorname{arc}\Delta\delta\frac{\sin\gamma}{\sin\delta\sin(\gamma+\delta)}.$$

Setzt man diess in den Werth von $\Delta x\cos(\beta - kC + C)$, so erhält man:

$$\Delta x\cos(\beta - kC + C) = \frac{\operatorname{arc}\Delta\beta\, x}{\sin(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)} - \frac{\Delta k \,.\, xs}{r\sin(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)}$$

$$+\left[\frac{\Delta a}{a} - \text{arc}\,\Delta\gamma\,\text{cotg}\,(\gamma+\delta) + \text{arc}\,\Delta\delta\,\frac{\sin\gamma}{\sin\delta\sin(\gamma+\delta)}\right].$$

$$\left[s.\sin(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C) - (k-\tfrac{1}{2})\frac{s^2}{r}\cos(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C) - (k-1)\frac{xs}{r}\right.$$

$$\left.\sin(\beta - kC + C)\right],$$

d. h.

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\text{arc}\,\Delta\beta}{\sin(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)\cos(\beta - kC + C)}$$

$$\frac{\Delta k.\,s}{-r\sin(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)\cos(\beta - kC + C)}$$

$$+\left[\frac{\Delta a}{a} - \text{arc}\,\Delta\gamma\,\text{cotg}\,(\gamma+\delta) + \text{arc}\,\Delta\delta\,\frac{\sin\gamma}{\sin\delta\sin(\gamma+\delta)}\right]$$

$$\left[1 - (k-\tfrac{1}{2})\frac{s}{r}\text{cotg}\,(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C) - (k-1)\frac{s}{r}\,\text{tg}\,(\beta - kC + C)\right].$$

Setzt man hier näherungsweise

$$\sin(\beta - kC + \tfrac{1}{2}C)\cos(\beta - kC + C) = \sin(\beta - kC)\cos(\beta - kC)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin(2\beta - 2kC),\quad \frac{s}{r} = 0,$$

so erhält man

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{2\,\text{arc}\,\Delta\beta}{\sin(2\beta - 2kC)} + \frac{\Delta a}{a} - \text{arc}\,\Delta\gamma\,\text{cotg}(\gamma+\delta) + \text{arc}\,\Delta\delta\,\frac{\sin\gamma}{\sin\delta\sin(\gamma+\delta)},$$

welche Formel ganz der letzten in Nr. 4 entspricht, und nach welcher wir rechnen wollen.

Sey zu dem Ende $\Delta\beta = 20''$, $\frac{\Delta a}{a} = 0{\cdot}00009$, $\Delta\delta = 1''$, $\Delta\gamma = 1''$, $\beta - kC = 1^0\,17'\,42''$, $2\beta - 2kC = 2^0\,35'\,24''$, $\gamma = 55^0\,33'\,19''$, $\delta = 122^0\,32'\,15''$, $\gamma + \delta = 178^0\,5'\,34''$.

$\log 2 = 0{\cdot}30103$	$\log \text{arc}\,1'' = 4{\cdot}68557$
$\log \text{arc}\,20'' = 5{\cdot}98660$	$\log \text{cotg}\,(\gamma+\delta) = 11{\cdot}47756(-)$
$\text{E}\log\sin(2\beta - 2kC) = 1{\cdot}34597$	$0{\cdot}16313-4$
$0{\cdot}63360-3$	
$\frac{2\,\text{arc}\,\Delta\beta}{\sin(2\beta-2kC)} = 0{\cdot}0043013$	$-\text{arc}\,\Delta\gamma\,\text{cotg}\,(\gamma+\delta) = 0{\cdot}0001456$

$\log \text{arc}\,1'' = 4{\cdot}68557$
$\log \sin\gamma = 9{\cdot}91627$
$\text{E}\log\sin\delta = 0{\cdot}07414$
$\text{E}\log\sin(\gamma+\delta) = 1{\cdot}47780$
$0{\cdot}15378-4$

$$\frac{\text{arc}\,\Delta\delta\sin\gamma}{\sin\delta\sin(\gamma+\delta)} = 0{\cdot}0001425$$

also $\frac{\Delta x}{x} = 0{\cdot}0043013 + 0{\cdot}0000900 + 0{\cdot}0001456 + 0{\cdot}0001425$

$$= 0{\cdot}0046794,$$

d. h. $\Delta x = 0{\cdot}0046794 \,.\, x = 0{\cdot}0046794 \,.\, 1651{\cdot}47 = 7{\cdot}71,$
so dass also x höchstens um 8 Fuss gefehlt ist.

6) Wir haben in den vorstehenden Beispielen meist den direkten Weg der Berechnung der Fehler eingeschlagen, ohne uns an die Formeln des §. 47 zu halten. Es versteht sich ganz von selbst, dass wenn man nach den Vorschriften des §. 47 verfährt, man ganz zu denselben Resultaten gelangen wird. Da es jedoch nicht ganz vergeblich seyn dürfte, an einem Beispiele zu zeigen, wie man dabei zu verfahren hat, wollen wir das oben in Nr. 4 berechnete Beispiel nochmals vornehmen. Es bezieht sich dasselbe auf Nr. 13 in §. 37. Die dabei vorkommenden Dreiecke sind:

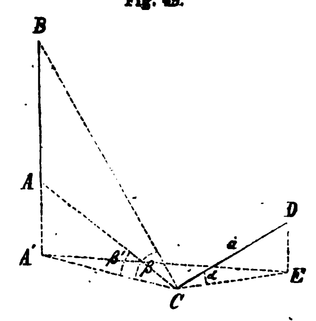


Fig. 49.

DCE, worin gemessen sind $CD = a$,
$DCE = \alpha$, und genau bekannt ist $DEC = 90^\circ$,
A'CE, worin bekannt sind $CE = a \cos\alpha$, $A'CE = \gamma$, $A'EC = \delta$,
BCA', „ „ „ $A'C = \frac{a \cos\alpha \sin\delta}{\sin(\gamma + \delta)}$, $BCA' = \beta$, und
fehlerfrei $BA'C = 90^\circ$,
ACA', worin bekannt sind $A'C = \frac{a \cos\alpha \sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$, $ACA' = \beta'$, und
fehlerfrei $AA'C = 90^\circ$.

In den Formeln (b') des §. 47 ist das dortige $c = CD\ (= a)$, $C = 90^\circ$, $\Delta C = 0$, $a = CE$, also

$$\Delta CE = \frac{CE}{a}\Delta a + DE \operatorname{arc}\Delta CDE,\ \operatorname{arc}\Delta\alpha + \operatorname{arc}\Delta CDE = 0,\ \operatorname{arc}\Delta CDE$$
$$= - \operatorname{arc}\Delta\alpha,$$

also $$\Delta CE = \cos\alpha\, \Delta a - a \sin\alpha \operatorname{arc}\Delta\alpha.$$

In denselben Formeln ist weiter (wegen A'CE): $c = CE\ (= a\cos\alpha)$, $A = \gamma$, $B = \delta$, $b = CA'$,
also

$$\Delta CA' = \frac{A'C}{CE} \,.\, \Delta CE + \frac{A'E}{\sin(\gamma+\delta)} \operatorname{arc}\Delta\delta - A'C \operatorname{cotg}(\gamma+\delta) \operatorname{arc}\Delta\gamma,$$

d. h.
$$\varDelta CA' = \frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}\varDelta CE + \frac{a\cos\alpha.\sin\gamma}{\sin^2(\gamma+\delta)}\operatorname{arc}\varDelta\delta$$
$$-\frac{a\cos\alpha\sin\delta\cos(\gamma+\delta)}{\sin^2(\gamma+\delta)}\operatorname{arc}\varDelta\gamma$$
$$=\frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}\cos\alpha.\varDelta a - \frac{a\sin\alpha\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}\operatorname{arc}\varDelta\alpha + \frac{a\cos\alpha\sin\gamma}{\sin^2(\gamma+\delta)}\operatorname{arc}\varDelta\delta$$
$$-\frac{a\cos\alpha\sin\delta\cos(\gamma+\delta)}{\sin^2(\gamma+\delta)}\operatorname{arc}\varDelta\gamma.$$

In BCA' hat man nun wieder nach denselben Formeln: $c = A'C$, $A = \beta$, $B = 90^\circ$, $\varDelta B = 0$, $a = A'B$.
$$\varDelta A'B = \frac{A'B}{A'C}\varDelta A'C + \frac{BC}{\cos\beta}\operatorname{arc}\varDelta\beta$$
$$= \operatorname{tg}\beta\,\varDelta CA' + \frac{A'C}{\cos^2\beta}\operatorname{arc}\varDelta\beta$$
$$=\frac{\sin\delta\operatorname{tg}\beta}{\sin(\gamma+\delta)}\cos\alpha.\varDelta a - \frac{a\sin\alpha\sin\delta\operatorname{tg}\beta}{\sin(\gamma+\delta)}\operatorname{arc}\varDelta\alpha$$
$$+\frac{a\cos\alpha\sin\gamma\operatorname{tg}\beta}{\sin^2(\gamma+\delta)}\operatorname{arc}\varDelta\delta - \frac{a\cos\alpha\sin\delta\cos(\gamma+\delta)\operatorname{tg}\beta}{\sin^2(\gamma+\delta)}\operatorname{arc}\varDelta\gamma$$
$$+\frac{a\cos\alpha\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)\cos^2\beta}\operatorname{arc}\varDelta\beta.$$

In ACA' ist eben so $c = A'C$, $A = \beta'$, $B = 90^\circ$, $\varDelta B = 0$, $C = 90^\circ - \beta'$, $A'A = a$; also
$$\varDelta AA' = \frac{AA'}{A'C}\varDelta A'C + \frac{AC}{\cos\beta'}\operatorname{arc}\varDelta\beta'$$
$$=\frac{\sin\delta\cos\alpha\operatorname{tg}\beta'}{\sin(\gamma+\delta)}\varDelta a - \frac{a\sin\alpha\sin\delta\operatorname{tg}\beta'}{\sin(\gamma+\delta)}\operatorname{arc}\varDelta\alpha + \frac{a\cos\alpha\sin\gamma\operatorname{tg}\beta'}{\sin^2(\gamma+\delta)}\operatorname{arc}\varDelta\delta$$
$$-\frac{a\cos\alpha\sin\delta\cos(\gamma+\delta)\operatorname{tg}\beta'}{\sin^2(\gamma+\delta)}\operatorname{arc}\varDelta\gamma + \frac{a\cos\alpha\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)\cos^2\beta'}\operatorname{arc}\varDelta\beta'.$$

Die Subtraktion beider Resultate ($\varDelta A'B - \varDelta AA'$) gibt die Formel in Nr. 4, wenn man beachtet, dass:
$$\frac{\cos\alpha\sin\delta\operatorname{tg}\beta}{\sin(\gamma+\delta)} - \frac{\sin\delta\cos\alpha\operatorname{tg}\beta'}{\sin(\gamma+\delta)} = \frac{A'B}{a} - \frac{A'A}{a} = \frac{AB}{a},$$
$$-\frac{a\sin\alpha\sin\delta\operatorname{tg}\beta}{\sin(\gamma+\delta)} + \frac{a\sin\alpha\sin\delta\operatorname{tg}\beta'}{\sin(\gamma+\delta)} = -\operatorname{tg}\alpha\left[\frac{a\cos\alpha\sin\delta\operatorname{tg}\beta}{\sin(\delta+\gamma)}\right.$$
$$\left.-\frac{a\cos\alpha\sin\delta\operatorname{tg}\beta'}{\sin(\gamma+\delta)}\right] = -AB.\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\frac{a\cos\alpha\sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin^2(\gamma+\delta)}-\frac{a\cos\alpha\sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\beta'}{\sin^2(\gamma+\delta)}=\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\delta)}\frac{AB}{\sin\delta},$$

$$-\frac{a\cos\alpha\sin\delta\cos(\gamma+\delta)\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin^2(\gamma+\delta)}+\frac{a\cos\alpha\sin\delta\cos(\gamma+\delta)\,\mathrm{tg}\,\beta'}{\sin^2(\gamma+\delta)}$$

$$=-\frac{\cos(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)}AB=-\mathrm{cotg}(\gamma+\delta).AB,$$

so wie dass

$$\frac{a\cos\alpha\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)\cos^2\beta}=\frac{a\cos\alpha\sin\delta\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin(\gamma+\delta)}.\frac{1}{\sin\beta\cos\beta}=A'B.\frac{1}{\sin\beta\cos\beta}$$

$$=AB\left[1+\frac{AA'}{AB}\right]\frac{1}{\sin\beta\cos\beta}=AB\left[1+\frac{\mathrm{tg}\,\beta'}{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\beta'}\right]\frac{1}{\sin\beta\cos\beta}$$

$$=AB.\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\beta'}.\frac{1}{\sin\beta\cos\beta}=AB.\frac{\cos\beta'}{\cos\beta\sin(\beta-\beta')},$$

$$\frac{a\cos\alpha\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)\cos^2\beta'}=AB\left[\frac{A'B}{AB}-1\right]\frac{1}{\sin\beta'\cos\beta'}$$

$$=AB\left[\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\beta'}-1\right]\frac{1}{\sin\beta'\cos\beta'}=AB.\frac{\mathrm{tg}\,\beta'}{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\beta'}.\frac{1}{\sin\beta'\cos\beta'}$$

$$=AB.\frac{\cos\beta}{\cos\beta'\sin(\beta-\beta')}.$$

Diese Beispiele dürften zur Erläuterung vollkommen hinreichen.

Zehnter Abschnitt.

Vom Interpoliren. Benützung zehnstelliger Logarithmentafeln.

§. 49.

Wir haben in unsern seitherigen Rechnungen nie mehr als siebenstellige Logarithmentafeln vorausgesetzt, da dieselben wohl für die meisten Zwecke unbedingt genügen. Bei manchen sehr genauen Rechnungen jedoch bedarf es mehrstelliger Tafeln, namentlich der zehnstelligen, wie sie z. B. der „Thesaurus Logarithmorum completus“ von Vega (auch mit dem deutschen Titel: Vollständige Sammlung grösserer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln. Leipzig. 1794) enthält. Wir wollen desswegen hier zum Schlusse den Ge-

brauch solcher Tafeln kurz erörtern, müssen aber vorher die für die Praxis äusserst wichtige Interpolationsmethode auseinander setzen. Wir greifen dadurch allerdings in das Gebiet der Analysis über; bei dem fortwährenden Gebrauch der Interpolationen in der Trigonometrie wird man jedoch diese Abschweifung nicht ganz ungerechtfertigt finden.

Wir wollen uns denken, y sey eine Grösse, deren Werth bedingt ist durch den Werth einer andern Grösse x, welch letztere willkührliche Werthe annehmen kann (sey z. B. $y = \sin x$, $\log \cos x$ u. s. w.); wollen ferner annehmen, man wisse, dass wenn x die Werthe $x_1, x_2, x_3, \ldots$ habe, dann y die Werthe $y_1, y_2, y_3, \ldots$ annehme, wo also $x_1, x_2, x_3, \ldots$, eben so wie $y_1, y_2, y_3, \ldots$ bekannte Zahlen sind, und man wünscht nun durch ein einfaches, möglichst genaues Verfahren, denjenigen Werth von y zu erfahren, der einem zwischen $x_1, x_2, \ldots$ liegenden Werthe von x zugehört. Wählen wir ein Beispiel, so hat man, wenn $y = \log \sin x$ für

$$x = 16^\circ 20' : y = 9{\cdot}4490540,$$
$$x = 16^\circ 21' : y = 9{\cdot}4494849,$$
$$x = 16^\circ 22' : y = 9{\cdot}4499153,$$
$$x = 16^\circ 23' : y = 9{\cdot}4503452,$$

und man will nun etwa y für $x = 16^\circ 20' 35''$ hieraus ermitteln. Wir haben das einschlägliche Verfahren bereits in §. 15 angegeben, wollen aber hier näher auf die Sache eingehen.

Wäre y eine solche Grösse ausgedrückt durch x (d. h. eine solche Funktion von x), dass ihr Werth sich leicht berechnen liesse, x mag seyn, was es will, so wäre die Aufgabe natürlich bald erledigt, indem man eben durch ganz direkte Rechnung den betreffenden Werth von y suchen würde, wobei man sich also keineswegs um die bekannten Werthe zu kümmern hätte. Diess ist aber natürlich nicht der Fall, wenn das Interpolationsverfahren angewendet werden muss, da man dasselbe ja gerade desshalb nöthig hat, weil eine leichte und bequeme Berechnung von y nicht anders gefunden werden kann. Eine direkte und meistens leichte Berechnung lassen aber nur Grössen (Funktionen) von der Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots \quad \text{(a)}$$

zu, in denen a, b, c, d, ... bekannte Zahlen bedeuten, da die einzelnen Potenzen durch Multiplicationen immer leicht zu erhalten

sind. Man wird sich also die Frage stellen, kann man nicht etwa y unter die Form (a) bringen, d. h. als eine Funktion von x betrachten, die nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitet?

Wir wollen nun annehmen, die Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ seyen steigend geordnet, d. h. $x_2 > x_1, x_3 > x_2, \ldots$, der Anzahl nach ihrer n, so ist wohl von selbst klar, dass wenn eine Grösse

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

so beschaffen ist, dass sie für $x = x_1$ gibt $y = y_1$; für $x = x_2$ u.s.w., man berechtigt seyn werde, anzunehmen, dieselbe liefere die Werthe von y für Werthe von x, die zwischen obigen Werthen liegen. Weiss man von y weiter Nichts, als dass für $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, y zu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ wird, so muss man diese Annahme offenbar gelten lassen; kennt man dagegen im Allgemeinen y, wie diess gerade bei uns der Fall ist, wo z. B. $y = \sin x$, oder $\log \operatorname{tg} x$ u. s. w., so wird man jene Annahme unter der Einschränkung gelten lassen, dass y innerhalb der Werthe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ im Allgemeinen stetig verlaufe, d. h. sich nur um Weniges ändert, wenn auch x sich um wenig ändert, so wie dass die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nahe genug an einander gewählt werden, damit die Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nicht bedeutend von einander verschieden sind.

Diess vorausgesetzt, ist es aber nicht schwer, die Funktion (b) zu bestimmen. Sind nämlich n Werthe von y, die zu n Werthen von x gehören, gegeben, so setze man:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + kx^{n-1}, \quad \text{(c)}$$

wo $a, b, \ldots, k$ noch unbestimmte Koeffizienten bedeuten. Alsdann muss man haben:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 + cx_1^{\,2} + dx_1^{\,3} + \ldots + kx_1^{\,n-1}, \\ y_2 &= a + bx_2 + cx_2^{\,2} + dx_2^{\,3} + \ldots + kx_2^{\,n-1}, \\ &\ldots\ldots \\ y_n &= a + bx_n + cx_n^{\,2} + dx_n^{\,3} + \ldots + kx_n^{\,n-1} \end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}$$

aus welchen n Gleichungen sich die n Unbekannten $a, b, c, d, \ldots, k$ ganz unzweideutig bestimmen lassen. Man kennt also jetzt die Grösse (c) und für jeden zwischen x_1 und x_n liegenden Werth von x wird sich daraus dann der zugehörige Werth von y ergeben. Wir wollen auf dieses Verfahren hier nicht weiter eingehen, da es für uns im Augenblicke von wenigem Interesse ist, sondern sogleich zu dem etwas speziellern Falle übergehen, da die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$

alle gleich weit von einander abstehen, d. h. da $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1}$ ist. Heisst diese sich gleich bleibende Differenz h, so hat man also für x die Werthe:

$$x_1, x_1 + h, x_1 + 2h, \ldots\ldots, x_1 + (n-1)h, \quad (e)$$

während y die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n \quad (e')$$

zugehören. Bilden wir nun die Differenzen $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2, \ldots$, $y_n - y_{n-1}$, so sollen diese die ersten Differenzen der Reihe (e′) heissen, und durch

$$\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \ldots, \Delta y_{n-1} \quad (e'')$$

bezeichnet werden, wo also $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, $\Delta y_2 = y_3 - y_2, \ldots$, $\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$ ist. Eben so sollen die Unterschiede $\Delta y_2 - \Delta y_1$, $\Delta y_3 - \Delta y_2, \ldots, \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$ durch

$$\Delta^2 y_1, \Delta^2 y_2, \ldots, \Delta^2 y_{n-2} \quad (e^3)$$

bezeichnet werden, und die zweiten Differenzen der Reihe (e′) heissen. Die Grössen $\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$, $\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2, \ldots, \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3}$ sollen durch

$$\Delta^3 y_1, \Delta^3 y_2, \ldots, \Delta^3 y_{n-3} \quad (e^4)$$

bezeichnet werden, und die vierten Differenzen der Reihe (e′) heissen u. s. w.

Nun behaupte ich zunächst, dass wenn $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Werthe von y sind, wie sie aus (c) folgen, wenn man $x = x_1$, $x_1 + h, x_1 + 2h, \ldots$, $x_1 + (n-1)h$ setzt, nothwendig die n^{ten} Differenzen der Reihe (e′) Null seyn werden. Wir wollen den Beweis nur für den Fall führen, dass $n = 4$ ist; man wird daraus schon ersehen, dass der Satz ganz allgemein gilt. Sey also

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

so hat man

$$y_1 = a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3,$$

$$y_2 = a + b(x_1 + h) + c(x_1 + h)^2 + d(x_1 + h)^3 = a + bh + ch^2 + dh^3 + x_1(b + 2ch + 3dh^2) + x_1^2(c + 3dh) + x_1^3 . d,$$

$$y_3 = a + b(x_1 + 2h) + c(x_1 + 2h)^2 + d(x_1 + 2h)^3 = a + b.2h + c.4h^2 + d.8h^3 + x_1(b + 2c.2h + 3d.4h^2) + x_1^2(c + 3d.2h) + x_1^3 d,$$

$$y_4 = a + b(x_1 + 3h) + c(x_1 + 3h)^2 + d(x_1 + 3h)^3 = a + b3h + c.9h^2 + d.27h^3 + x_1(b + 2c.3h + 3d.9h^2) + x_1^2(c + 3d.3h) + x_1^3 d.$$

....

Hieraus folgt:

$$\Delta y_1 = bh + ch^2 + dh^3 + x_1(2ch + 3dh^2) + x_1^2(3dh),$$
$$\Delta y_2 = bh + 3ch^2 + 7dh^3 + x_1(2ch + 3d.3h^2) + x_1^2(3d.h),$$
$$\Delta y_3 = bh + 5c.h^2 + 19dh^3 + x_1(2ch + 3d.5h^2) + x_1^2(3dh),$$
$$\Delta y_4 = bh + 7ch^2 + 37dh^3 + x_1(2ch + 3d.7h^2) + x_1^2(3dh),$$
$$\cdots\cdot$$

$$\Delta^2 y_1 = 2ch^2 + 6dh^3 + x_1(3d.2h^2),$$
$$\Delta^2 y_2 = 2ch^2 + 12dh^3 + x_1(3d.2h^2),$$
$$\Delta^2 y_3 = 2ch^2 + 18dh^3 + x_1(3d.2h^2),$$
$$\Delta^2 y_4 = 2ch^2 + 24dh^3 + x_1(3d.2h^2),$$
$$\cdots\cdot$$

$$\Delta^3 y_1 = 6dh^3, \qquad \Delta^4 y_1 = 0,$$
$$\Delta^3 y_2 = 6dh^3, \qquad \Delta^4 y_2 = 0,$$
$$\Delta^3 y_3 = 6dh^3, \qquad \Delta^4 y_3 = 0,$$
$$\cdots\cdot$$

Umgekehrt wird man schliessen, dass wenn die vierten Differenzen der Grössen (e′) Null sind, man wird

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad \text{(f)}$$

setzen können. In den meisten Fällen, in denen das Interpolationsverfahren angewendet wird, wird man aber diese Voraussetzung machen dürfen, und wir wollen nun, indem wir annehmen, dass die vierten Differenzen der Null gleich zu achten seyen, a, b, c, d zu bestimmen suchen. Da aber das Resultat in der Form (f) für unsere Rechnung nicht ganz bequem ist, wollen wir setzen:

$$y = A + B(x - x_1) + C(x - x_1)(x - x_1 - h) + D(x - x_1)(x - x_1 - h)(x - x_1 - 2h).$$

Alsdann hat man:

$$\text{für } x = x_1 : y_1 = A,$$
$$x = x_1 + h : y_2 = A + Bh,$$
$$x = x_1 + 2h : y_3 = A + 2Bh + 2Ch^2,$$
$$x = x_1 + 3h : y_4 = A + 3Bh + 6Ch^2 + 6Dh^3.$$

Hieraus:

$$\Delta y_1 = Bh, \Delta y_2 = Bh + 2Ch^2, \Delta y_3 = Bh + 4Ch^2 + 6Dh^3,$$
$$\Delta^2 y_1 = 2Ch^2, \Delta^2 y_2 = 2Ch^2 + 6Dh^3,$$
$$\Delta^3 y_1 = 6Dh^3,$$

d. h. man hat unmittelbar:

$$A = y_1,\ B = \frac{\Delta y_1}{h},\ C = \frac{\Delta^2 y_1}{2h^2},\ D = \frac{\Delta^3 y_1}{6h^3},$$

folglich

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{h}\Delta y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_1 - h)}{2h^2}\Delta^2 y_1$$
$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_1 - h)(x - x_1 - 2h)}{6h^3}\Delta^3 y_1, \quad (g)$$

aus welcher Formel nun, unter obigen Voraussetzungen, für einen Werth von x der zugehörige Werth von y berechnet werden kann. Der Werth von x soll aber nicht unter x_1 und nicht über $x_1 + 3h$ liegen; in der Regel wird er zwischen x_1 und $x_1 + h$ liegen; dann wird

$$\frac{(x - x_1)(x - x_1 - h)(x - x_1 - 2h)}{6h^3} < 1,$$

also dann das letzte Glied in (g) schon meistens wegfallen.

Man übersieht leicht, in welcher Weise man verfahren müsse, wenn die Formel (g) mehr Glieder enthalten sollte, und dass das nächste

$$\frac{(x - x_1)(x - x_1 - h)(x - x_1 - 2h)(x - x_1 - 3h)}{24h^4}\Delta^4 y_1 \text{ u. s. w.}$$

wäre. Wenn x zwischen x_1 und $x_1 + h$, so werden diese Grössen sehr klein; wäre x weit von x_1 entfernt, so könnte, obgleich $\Delta^4 y_1$ klein ist, dieses Glied doch beträchtlich werden, indem dann der Koeffizient von $\Delta^4 y_1$ einen bedeutenden Werth hätte. Daher rührt es, dass man x zwischen x_1 und $x_1 + h$ einschränkt. Stellen wir die hier nöthigen Grössen tabellarisch zusammen, so haben wir folgende Uebersicht:

x =	y =	1. Differenzen.	2. Differenzen.	3. Differenz.
x_1	y_1			
$x_1 + h$	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1,$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$
$x_1 + 2h$	y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2,$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2.$	
$x_1 + 3h$	y_4	$\Delta y_3 = y_4 - y_3.$		

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{h}\Delta y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_1 - h)}{2h^2}\Delta^2 y_1$$
$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_1 - h)(x - x_1 - 2h)}{6h^3}\Delta^3 y_1. \quad (g)$$

Bezeichnet man die Grösse $\frac{x - x_1}{h}$ durch α, so kann man die Formel (g) auch schreiben:

$$y = y_1 + \alpha \Delta y_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\Delta^3 y_1,$$

und wenn man, behufs bequemerer Rechnung setzt:

$$C = \Delta^2 y_1 + \frac{\alpha-2}{3}\Delta^3 y_1,\ B = \Delta y_1 + \frac{(\alpha-1)}{2} C, \quad (g')$$

so hat man $$y = y_1 + \alpha B, \quad (g'')$$

Darf man schon $\Delta^3 y_1$ vernachlässigen, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} y = y_1 + \frac{x-x_1}{h}\Delta y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_1-h)}{2h^2}\Delta^2 y_1; \\ \frac{x-x_1}{h} = \alpha,\ B = \Delta y_1 + \frac{\alpha-1}{2}\Delta^2 y_1,\ y = y_1 + \alpha B. \end{array}\right\} \quad (h)$$

§. 50.

Wir wollen für jetzt von den wichtigen Formeln des §. 49 nur einen Gebrauch machen, den nämlich auf die Benützung von zehnstelligen Logarithmentafeln, wobei wir die schon oben angeführten Vega'schen im Auge haben. Dieselben geben direkt die Logarithmen aller fünfstelligen ganzen Zahlen, so wie die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von Sekunde zu Sekunde für die zwei ersten (und letzten) Grade, und von 10 zu 10 Sekunden für die übrigen Grade des Quadranten. Mehr als zweite Differenzen verlangt Vega nicht. Wir wollen nun an Beispielen die Benützung solcher Tafeln angeben.

1) Sey $\log 25947{\cdot}3282$ zu suchen.

$$\begin{array}{ll} \log 25947 = 4{\cdot}4140871518 & \\ & +167375 \\ \log 25948 = 4{\cdot}4141038893 & \quad\quad -8 \\ & +167367 \\ \log 25949 = 4{\cdot}4141206260 & \end{array}$$

(Die ersten Differenzen sind in den Tafeln angegeben). Hier ist

$$h = 1,\ x - x_1 = 0{\cdot}3282, \text{ also}$$

$$\log 25947{\cdot}3282 = 4{\cdot}4140871518 + 0{\cdot}3282 \,.\, 167375 - \frac{0{\cdot}3282(0{\cdot}3282-1)}{2} 8.$$

$$\begin{array}{rr} \log 25947 = & 4{\cdot}4140871518, \\ 0{\cdot}3282 \,.\, 167375 = & 54932 \\ -\frac{0{\cdot}3282(0{\cdot}3282-1)}{2} 8 = & 2 \\ \hline \log 25947{\cdot}3282 = & 4{\cdot}4140926452 \end{array}$$

Die Vega'sche Vorschrift lautet:

$$\log N = \log n + D' 0 \cdot abcde + D'' \frac{0 \cdot ab(1 - 0 \cdot ab)}{2},$$

wo N eine Zahl ist, die mit mehr als 5 Ziffern geschrieben ist, n die fünf ersten Ziffern derselben enthält, D' die erste, D'' die zweite (immer negative, hier aber positiv zu nehmende) Differenz bezeichnet; a, b, c, ... die sechste, siebente achte, ... Ziffer der Zahl bezeichnet. Die Richtigkeit dieser Vorschrift wird aus Obigem einleuchten.

2) Aus $\log x = 4 \cdot 7320472587$ soll x gesucht werden. Da wir immer $h = 1$ haben, x aus den Tafeln entnehmen, so ist nach (h):

$$x - x_1 = \frac{y - y_1}{\Delta y_1 + \frac{1}{2}(x - x_1 - 1)\Delta^2 y_1},$$

und man wird zuerst $x - x_1$ nach der Formel

$$x - x_1 = \frac{y - y_1}{\Delta y_1}$$

berechnen und dann einen genauern Werth finden, indem man im Nenner der zweiten Seite für $x - x_1$ den gefundenen Werth setzt.

Nun ist

$$\left.\begin{array}{l}\log 53956 = 4 \cdot 7320397460 = y_1, \\ \log x = 4 \cdot 7320472587 = y,\end{array}\right\} \Delta y_1 = 80490,\ \Delta^2 y_1 = -2.$$

$$y - y_1 = 75127,\ x - x_1 = \frac{75127}{80490} = 0 \cdot 93337,\ x_1 = 53956,$$

$$\frac{(x - x_1 - 1)\Delta^2 y_1}{2} = 0 \cdot 06662$$

$$x - x_1 = \frac{75127}{80490 + 0 \cdot 0666} = 0 \cdot 93337$$

so dass $x = 53956 \cdot 93337.$

3) Aus $\log x = 4 \cdot 0092504763 = y$ soll x gesucht werden.

$$x_1 = 10215,\ y_1 = 4 \cdot 0092383710,\ y - y_1 = 121053,\ \Delta y_1 = 425133,$$
$$\Delta^2 y_1 = -42.$$

$$x - x_1 = \frac{121053}{425133} = 0 \cdot 28474,\ \tfrac{1}{2}(x - x_1 - 1)\Delta^2 y_1 = 21 . 0 \cdot 715,$$

$$x - x_1 = \frac{121053}{425133 + 21 . 0 \cdot 715} = \frac{121053}{425148} = 0 \cdot 28473,$$

$$x = 10215 \cdot 28473.$$

4) Sey zu suchen

$$\log\sin 32^\circ 45' 16{\cdot}734''.$$

$h = 10$, $x_1 = 32^\circ 45' 10''$, $x - x_1 = 6{\cdot}734$, $y_1 = \log\sin 32^\circ 45' 10''$
$= 9{\cdot}733\,2095\,035.$

$$\begin{array}{lll} \log\sin 32^\circ 45' 10'' = 9{\cdot}733\,2095\,035, & & \\ & +327287 & \\ \log\sin 32^\circ 45' 20'' = 9{\cdot}733\,2422\,322, & & -35 \\ & +327287 & \\ \log\sin 32^\circ 45' 30'' = 9{\cdot}733\,2749\,574, & & \end{array}$$

$$\log\sin 32^\circ 45' 16{\cdot}734'' = y_1 + \frac{6{\cdot}734}{10}\,.\,327287 - \frac{6{\cdot}734(6{\cdot}734-10)}{2\,.\,10^2}35.$$

$$\begin{array}{rr} y_1 = & 9{\cdot}733\,2095\,035 \\ \dfrac{6{\cdot}734\,.\,327287}{10} = & 220\,395 \\ -\dfrac{6.7\,(6{\cdot}7-10)}{200}\,35 = & 4 \\ \hline \log\sin 32^\circ 45' 16{\cdot}734'' = & 9{\cdot}733\,2315\,434 \end{array}$$

5) Aus $\log \operatorname{tg} x = 9{\cdot}827\,3425\,034 = y$

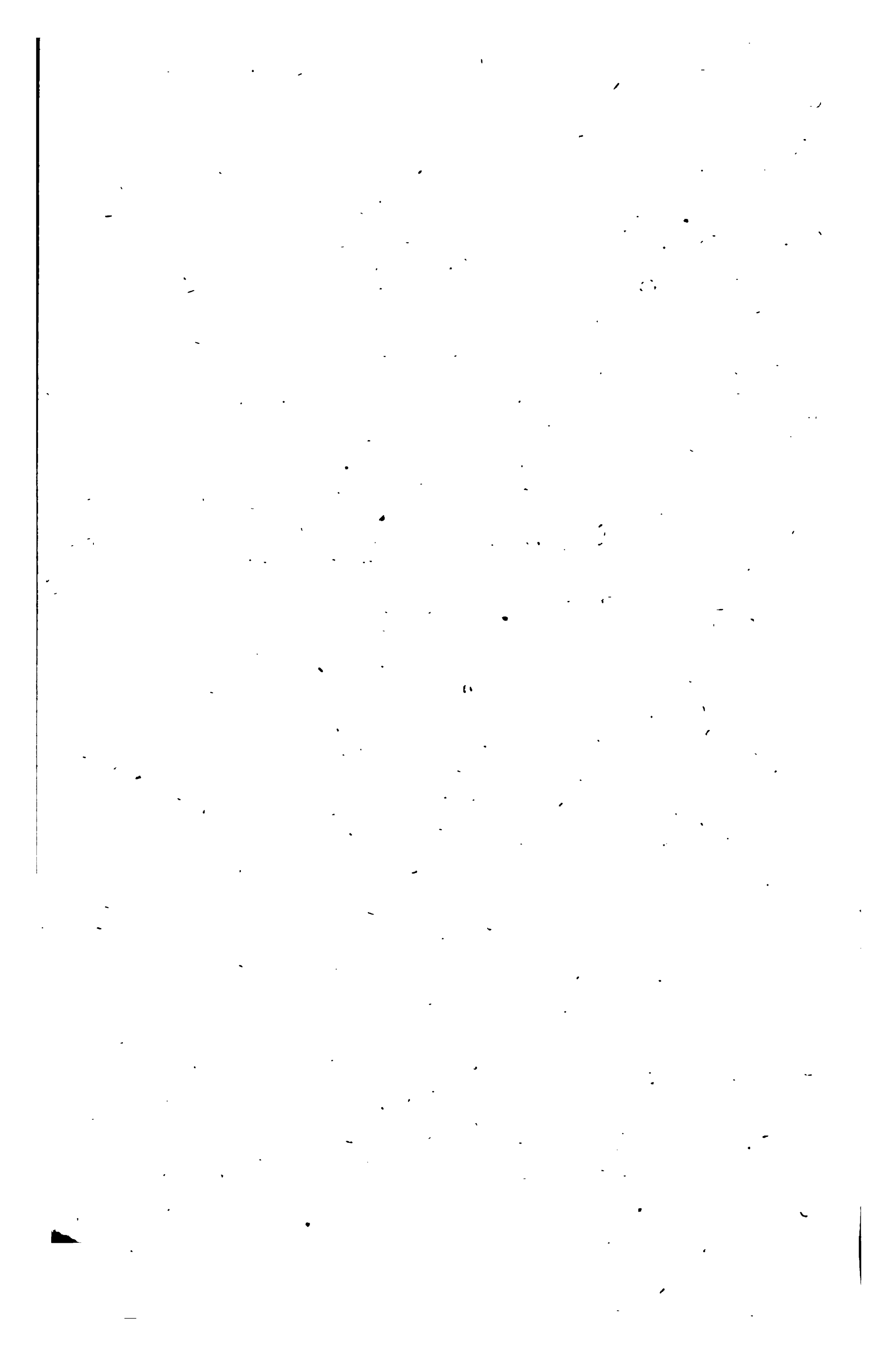
soll x bestimmt werden.

$x_1 = 33^\circ 53' 50''$, $y_1 = 9{\cdot}827\,3057\,671$, $\varDelta y_1 = 454\,830$,
$\varDelta^2 y_1 = -18$, $y - y_1 = 367363$.

$$x - x_1 = \frac{y - y_1}{\frac{1}{10}\varDelta y_1 + \frac{x - x_1 - 10}{200}\varDelta^2 y_1} = \frac{367363}{45483 + \frac{10-(x-x_1)}{200}18}.$$

$$\frac{367363}{45483} = 8{\cdot}0769, \quad \frac{367363}{45483 + \frac{2{\cdot}92}{200}\,.\,18} = \frac{367363}{45483{\cdot}3} = 8{\cdot}0769,$$

also $x = 33^\circ 53' 58{\cdot}0769''.$



Zweite Abtheilung.

Sphärische Trigonometrie.



Erster Abschnitt.

Aufstellung der Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie.

§. 1.

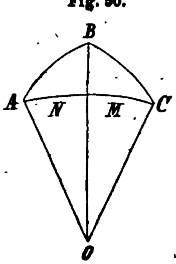
Seyen A, B, C drei Punkte auf der Oberfläche einer Kugel; legen wir nun durch A, B und den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene, so schneidet dieselbe die Kugel in einem Kreise, dessen Halbmesser dem Kugelhalbmesser gleich ist, einem so genannten grössten Kreise. Dessgleichen wollen wir durch A, C und den Kugelmittelpunkt, sowie durch letztern und B, C Ebenen legen, so werden dieselben die Kugel ebenfalls in grössten Kreisen durchschneiden. Geht man auf dem ersten dieser drei Kreise von A nach B, so kann man entweder einen Bogen durchlaufen, der kleiner als der halbe Kreisumfang, oder einen zweiten, der grösser als der halbe Kreisumfang ist. Wenn wir künftig vom Bogen AB sprechen, wollen wir den zwischen A und B liegenden Theil des durch diese zwei Punkte gehenden grössten Kreises verstehen, der kleiner ist als der halbe Umfang des grössten Kreises. Dessgleichen, wenn wir von den Bögen AC, BC sprechen. Die drei Bögen AB, AC, BC bilden nun auf der Oberfläche der Kugel ein sphärisches Dreieck.

Denken wir uns von den Punkten A, B, C auf den Kugelmittelpunkt O die Halbmesser OA, OB, OC gezogen, so werden die drei obgenannten Ebenen sich offenbar in diesen drei Geraden durchschneiden und in O eine dreiseitige körperliche Ecke bilden, deren Kanten OA, OB, OC sind. Die drei Kantenwinkel AOB, AOC, BOC sind die Winkel am Mittelpunkte der Kugel, welche von den drei Bögen AB, AC, BC gemessen werden, und die sich also wie jene Bögen verhalten. Kennt man den Halbmesser der Kugel, so ist es leicht, aus den bekannten Mittelpunktswinkeln die Bögen AB,

AC, BC zu finden. Wir werden desshalb künftig statt der Bögen AB, AC, BC die drei ihnen zugehörigen Mittelpunktswinkel AOB, AOC, BOC einführen, und diese die Seiten des spärischen Dreiecks heissen.

Die dreiseitige körperliche Ecke hat auch drei Flächenwinkel, die Neigungswinkel der Ebenen OAB und OAC, OAB und OBC, OAC und OBC. Diese drei Winkel sollen die Winkel des sphärischen Dreiecks heissen. Wollte man übrigens den Winkel der Bögen AC und AB haben, so müsste man bekanntlich in A auf OA in den Ebenen OAC und OAB Senkrechte (Tangenten an die Bögen AC und AB) errichten; der Winkel dieser Senkrechten wäre der Winkel der Bögen. Allein dieser Winkel ist nichts Anderes, als der Neigungswinkel der Ebenen OAC und OAB.

Fig. 50.



Die Winkel des sphärischen Dreiecks sollen mit A, B, C, die ihnen entgegenstehenden Seiten mit a, b, c bezeichnet werden. Alsdann ist

A der Neigungswinkel der Ebenen OAB und OAC,
B „ „ „ „ OBA „ OBC,
C „ „ „ „ OCA „ OCB,
a = Winkel BOC, b = AOC, c = AOB.

Zugleich sind a, b, c jeder kleiner als 180°, dessgleichen A, B, C.

Von den dreiseitigen körperlichen Ecken werden nun in jedem Lehrbuche der Stereometrie einige Sätze erwiesen, die wir, der Vollständigkeit wegen, ebenfalls hier darstellen wollen. Sie sind:

1) In jeder dreiseitigen körperlichen Ecke sind zwei Kantenwinkel zusammen grösser als der dritte, d. h. in jedem sphärischen Dreieck sind zwei Seiten zusammen grösser als die dritte. Wir haben also zu beweisen, dass AOB + BOC > AOC. Dabei werden wir AOC als den grössten der drei Kantenwinkel annehmen, da wenn AOB oder BOC schon > AOC wäre, unsere Behauptung ganz von selbst klar wäre. Der Beweis kommt ganz offenbar auch darauf hinaus, nachzuweisen, dass BC + AB > AC. Denken wir uns nun, man lege durch B zwei Ebenen, von denen die eine senkrecht auf OC, die andere senkrecht auf OA, so werden dieselben die Kugel in zwei Kreisen schneiden, so beschaffen, dass dieselben als um

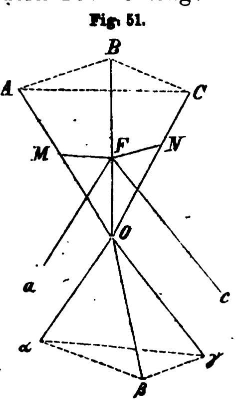
die Punkte C und A mit den sphärischen Halbmessern CB und AB beschrieben angesehen werden können. Beide durch B gehende Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die durch B geht und auf OAC senkrecht steht; diese Gerade trifft die Kugel nochmals in einem Punkte B', in welchem die obigen zwei (kleinen) Kreise sich nochmals durchschneiden. Die Punkte B und B' liegen auf verschiedenen Seiten von AC und in gleicher Entfernung davon. Die beiden um A und C gezogenen Kreise treffen den Bogen AC zwischen A und C, da sonst entweder BC > AC oder AB > AC wäre, was wir nicht voraussetzen. Der Kreis um A treffe AC in M, der um C in N, so ist AM = AB, CN = CB und, wie man sieht AM + CN d. h. AB + BC > AC. Die zwei Punkte M und N können nicht zusammenfallen, da sich die zwei Kreise sonst in diesem Punkte schneiden würden, was nicht der Fall ist, da sie sich nur in B und B' schneiden; eben so kann nicht der um C gezogene Kreis AC in M, der um A gezogene in N schneiden, da der um C gezogene Kreis von B bis B' links von der Ebene BOB', der um A gezogene rechts von BOB' liegt.

Anmerkung. Wir haben hier gern diesen gewissermassen anschaulichern Beweis des angeführten Lehrsatzes gegeben, ohne denselben für genauer als den zu halten, den man gewöhnlich in den Lehrbüchern findet (vergl. Legendre Géometrie, Buch V, Satz XXI). Im Gegentheile halten wir letztern mindestens für eben so genau, während, wie gesagt, der gegebene uns die Sache mehr anschaulich zu machen scheint.

2) Zu jeder dreiseitigen körperlichen Ecke kann man eine zweite bilden der Art, dass die Summe der einander entsprechenden Kantenwinkel der einen und Flächenwinkel der andern 180° beträgt.

Sey zu dem Ende OABC die gegebene dreiseitige körperliche Ecke; in O errichte man auf die Ebene OAB die Senkrechte $O\gamma$, auf OBC die $O\alpha$, auf OAC die $O\beta$, so werden $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ als Kanten einer neuen dreiseitigen körperlichen Ecke $O\alpha\beta\gamma$ angesehen werden können. Die Kanten OA, OB, OC stehen nun aber auch senkrecht auf den Ebenen der neuen Ecke. Denn OA ist die Durchnittslinie der Ebenen OAB und OAC, auf denen $O\gamma$ und $O\beta$ senkrecht stehen; mithin stehen letztere

Fig. 51.



Geraden auch auf OA, und also umgekehrt OA auf $O\beta$, $O\gamma$ senkrecht, also auch OA senkrecht auf der Ebene $O\beta\gamma$; dessgleichen OB senkrecht auf $O\alpha\gamma$, OC senkrecht auf $O\alpha\beta$. Hätte man also $O\alpha\beta\gamma$ als gegebene Ecke gewählt, so wäre durch dieselbe Konstruktion, wie oben, als neue Ecke OABC erschienen.

Wir wollen nun in den beiden Ecken einander entsprechende Kanten- und Flächenwinkel je einen Flächenwinkel der einen und einen Kantenwinkel der andern heissen, wenn der letztere von den zwei Kanten gebildet ist, die auf den Flächen senkrecht stehen, die den ersten bilden. So entsprechen sich

Flächenwinkel an OB und Kantenwinkel $\alpha O\gamma$,
" " OA " " $\beta O\gamma$,
" " OC " " $\alpha O\beta$,
" " $O\alpha$ " " COB,
" " $O\beta$ " " AOC,
" " $O\gamma$ " " AOB.

In der Ecke OAB stehen sich entgegen:

Flächenwinkel an OB und Kantenwinkel AOC,
" " OA " " BOC,
" " OC " " AOB.

Dessgleichen stehen sich in der Ecke $O\alpha\beta\gamma$ entgegen:

Flächenwinkel an $O\alpha$ und Kantenwinkel $\beta O\gamma$,
" " $O\beta$ " " $\alpha O\gamma$,
" " $O\gamma$ " " $\beta O\alpha$.

Nimmt man also in einer der zwei Ecken einen Flächenwinkel und den ihm entgegenstehenden Kantenwinkel und sucht in der andern Ecke die diesen entsprechenden Kanten- und Flächenwinkel, so stehen sich letztere ebenfalls entgegen. So stehen sich entgegen:

Flächenwinkel an OB und Kantenwinkel AOC,
Kantenwinkel $\alpha O\gamma$ und Flächenwinkel an $O\beta$.

Zwei nun einander entsprechende Winkel betragen zusammen 180^0. So z. B. Flächenwinkel an OB + Kantenwinkel $\alpha\, O\gamma = 180^0$. Um diess zu beweisen legen wir durch einen Punkt F der Kante OB eine Ebene senkrecht auf OB, welche die Ebenen OAB, OBC in den Geraden FM, FN treffe, die natürlich auf OB senkrecht stehen. Der Winkel MFN ist also der Flächenwinkel an OB. In derselben Ebene ziehen wir Fa, Fc parallel mit $O\alpha$, $O\gamma$, so ist $aFc = \alpha O\gamma$;

ferner ist $aFM = cFN = 90^\circ$, indem aF auf OAB, Fc auf OBC senkrecht steht. Da aber $aFc + aFM + MFN + NFc = 360^\circ$, und $aFM + NFc = 180^\circ$, so ist

$$aFc + MFN = 180^\circ, \text{ d. h. } \alpha O\gamma + MFN = 180^\circ,$$

was den Satz beweist.

Tragen wir diesen Satz auf die sphärischen Dreiecke über, so heisst er:

Seyen a, b, c die Seiten, A, B, C die ihnen entgegenstehenden Winkel eines sphärischen Dreiecks, so kann man immer ein anderes sphärisches Dreieck erhalten, dessen Seiten $= 180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$ und dessen diesen Seiten entgegenstehende Winkel $180^\circ - a$, $180^\circ - b$, $180^\circ - c$ sind.

3) Da immer zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks grösser sind als die dritte, so hat man also auch

$$180^\circ - A + 180^\circ - B > 180^\circ - C,\ A + B - C < 180^\circ,$$
$$180^\circ - B + 180^\circ - C > 180^\circ - A,\ B + C - A < 180^\circ,$$
$$180^\circ - A + 180^\circ - C > 180^\circ - B,\ A + C - B < 180^\circ.$$

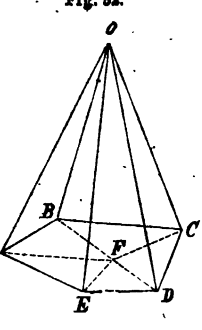
Addirt man diese drei Resultate, so ergibt sich:

$$A + B + C < 540^\circ,$$

d. h. je zwei Winkel eines sphärischen Dreiecks, um den dritten vermindert, betragen weniger als 180°; die Summe aller drei beträgt weniger als 540°.

Was die Grössen $A + B - C$, $B + C - A$, $A + C - B$ betrifft, so werden sie also, wenn sie positiv sind, immer unter 180° seyn; sie können aber ganz wohl auch negativ ausfallen.

4) In jeder beliebigen körperlichen Ecke, in der die sämmtlichen Flächenwinkel kleiner als 180° sind, ist die Summe aller Kantenwinkel kleiner als 360°.



Sey OABCDE eine fünfeckige körperliche Ecke, so ist

$$AOB + BOC + COD + DOE + EOA < 360^\circ.$$

Sey ABCDE eine beliebige Ebene, F ein Punkt in ihr; man ziehe FA, ... FE, so hat man nach Nr. 1:

an der Ecke in A: $OAB + OAE > BAE$,
" " " B: $ABO + OBC > ABC$,

$$\text{an der Ecke in } C: OCB + OCD > BCD,$$
$$\text{„ „ „ „ } D: ODC + ODE > CDE,$$
$$\text{„ „ „ „ } E: OED + OEA > DEA,$$

d. h.

$$OAB + OBA + OBC + OCB + OCD + ODC + ODE + OED + OEA + OAE > BAE + ABC + BCD + CDE + DEA.$$

Da aber

$$OAB + OBA + \ldots + OAE = 5 . 180^0 - (AOB + BOC + COD + DOE + EOA),$$
$$BAE + ABC + \ldots + DEA = 5 . 180^0 - (AFB + BFC + CFD + DFE + EFA) = 5 . 180^0 - 360^0 = 3 . 180^0,$$

so ist

$$5 . 180^0 - (AOB + COB + COD + DOE + EOA) > 3 . 180^0,$$
$$AOB + BOC + COD + DOE + EOA < 360^0,$$

5) In jedem sphärischen Dreieck (und Vieleck) ist also die Summe aller Seiten kleiner als 360^0.

Also auch

$$180^0 - A + 180^0 - B + 180^0 - C < 360^0,$$
$$540^0 - (A + B + C) < 360^0,$$
$$A + B + C > 180^0,$$

d. h. die Summe der drei Winkel ist grösser als 180^0. Daraus folgt dass

$$A + B - C > 180^0 - 2C$$

ist; nun ist $2C$ unter 360^0, also wenn auch $2C > 180^0$, so ist doch $180^0 - 2C$ nie unter -180^0, d h., wenn auch $A + B - C$ negativ ist, so liegt diese Grösse doch zwischen 0 und -180^0. Mithin liegen die Differenzen $A + B - C$, $A - B + C$, $-A + B + C$ immer zwischen -180^0 und $+180^0$; während die Differenzen $a + b - c$, $a - b + c$, $-a + b + c$ immer positiv sind.

Da immer zwei Winkel eines sphärischen Dreiecks, vermindert um den dritten, weniger als 180^0 betragen, so ist also

$$180^0 - a + 180^0 - b - (180^0 - c) < 180^0$$
$$c - (a + b) + 180^0 < 180^0$$
$$a + b - c > 0$$

was wir schon wissen. Aber auch

$$180^0 - a + 180^0 - b - (180^0 - c) > -180^0$$
$$c - (a + b) + 180^0 > -180^0$$

also $$a+b-c<360^0,$$
wie sich von selbst versteht, da ja $a+b+c<360^0$.

Stellen wir alle Sätze nochmals zusammen, so haben wir:

$$\begin{array}{lll} & A+B-C\begin{array}{l}<180^0\\>-180^0,\end{array} & \\ \begin{array}{l}a+b>c,\\a+c>b,\; a+b+c<360^0.\\b+c>a,\end{array} & A-B+C\begin{array}{l}<180^0\\>-180^0,\end{array} & A+B+C\begin{array}{l}>180^0\\<540^0.\end{array} \\ & -A+B+C\begin{array}{l}<180^0\\>-180^0,\end{array} & \end{array}$$

Was wir nun von einem sphärischen Dreiecke beweisen, gilt geradezu für die dreiseitige körperliche Ecke, wenn man nur statt „Winkel des sphärischen Dreiecks" setzt „Flächenwinkel", statt „Seiten des Dreiecks" aber „Kantenwinkel."

§. 2.

Sey ABCD ein Viereck, in welchem AB parallel mit CD gezogen sey, und $AC=BD$, so ist leicht zu beweisen, dass auch Winkel $C=D$, $A=B$ ferner ist (erste Abthl. §. 22. (31)):

Fig. 58.

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB.BD\cos B,$$
$$AD^2=AC^2+CD^2-2AC.CD\cos C.$$

Da aber $C=D$, $A=B$, und $A+B+C+D=180^0$, so ist $B+C=180^0$, also $\cos B=-\cos C$. Mithin:

$$\frac{AD^2}{AB}=AB+\frac{BD^2}{AB}+2BD\cos C,$$
$$\frac{AD^2}{CD}=\frac{AC^2}{CD}+CD-2AC.\cos C,$$

d. h. da $AC=BD$:

$$\frac{AD^2}{AB}+\frac{AD^2}{CD}=AB+CD+\frac{BD^2}{AB}+\frac{BD^2}{CD}$$

oder:

$$AD^2.CD+AD^2.AB=(AB+CD)AB.CD+BD^2.CD+BD^2.AB,$$
$$AD^2(CD+AB)=(AB+CD)AB.CD+BD^2(CD+AB),$$

und wenn man mit $CD+AB$ dividirt:

$$AD^2=AB.CD+BD^2,$$

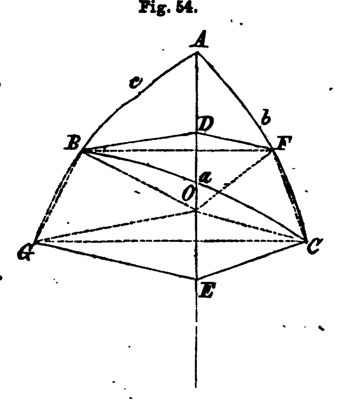
d. h. in einem, wie angegeben gestalteten Vierecke ist das Quadrat der Diagonale gleich dem Produkte der zwei parallelen Seiten plus

dem Quadrate der einen der zwei gleich langen nicht parallelen Seiten.

§. 3.

Sey ABC ein sphärisches Dreieck, in dem wir AB < AC annehmen, und worin A, B, C die drei Winkel, a, b, c die drei Seiten bezeichnen sollen. O stelle den Kugelmittelpunkt vor, OA den nach A gezogenen Halbmesser, der (nöthigenfalls) in OE verlängert sey. Von B ziehe man in der Ebene des Bogens AB die BD senkrecht auf OA und in D in der Ebene des Bogens AC die DF senkrecht auf AO, so wird die Ebene des Dreiecks BDF senkrecht stehen auf OA und der Winkel BDF gleich A seyn. Dessgleichen ziehe man von C in der Ebene von AC die CE senkrecht auf AO, und EG in der Ebene von AB senkrecht auf OA, wobei der Bogen AB bis G verlängert wurde, so wird auch die Ebene GEC senkrecht auf OA stehen, also mit BDF parallel laufen, und GEC = A seyn.

Fig. 54.



Denkt man sich die Halbmesser OB, OF, OG, OC gezogen, so werden die Dreiecke BOD und FOD, GOE und COE kongruent seyn, mithin BD = DF, GE = EC, BOD = FOD, GOE = COE. Daraus folgt nun, dass auch Bogen AB = AF, AG = AC, FC = BG ist. Der zu AF gehörige Mittelpunktswinkel (AOF) ist also = c, der zu FC gehörige = b — c.

Da Bogen FC = BG, so ist auch Sehen FC = BG; ferner laufen, wie leicht zu ersehen, BF und CG mit einander parallel, so dass das Viereck BFCG die Gestalt des in §. 2 betrachteten Vierecks hat. Würde man also die Diagonale BC ziehen, so hätte man:

$$BC^2 = BF \cdot GC + FC^2.$$

Sey nun r der Halbmesser der Kugel, so ist (erste Abthlg. §. 20, Nr. 1 und §. 21, Figur 14):

$BC = 2 r \sin \frac{1}{2} a$, $BD = r \sin c$, $CE = r \sin b$*, $FC = 2 r \sin \frac{1}{2}(b - c)$,

* In unserer Figur ist eigentlich $CE = r \sin (180^0 - b)$, d. h. doch $CE = r \sin b$. Man wird sich auch leicht überzeugen, dass die hier gefundenen Beziehungen ganz

also

$BF = 2BD \sin\frac{1}{2}A = 2r \sin c \sin\frac{1}{2}A$, $GC = 2EC \sin\frac{1}{2}A = 2r \sin b \sin\frac{1}{2}A$.

Demnach hat man

$4r^2 \sin^2\frac{1}{2}a = 2r \sin c \sin\frac{1}{2}A \,.\, 2r \sin b \sin\frac{1}{2}A + 4r^2 \sin^2\frac{1}{2}(b-c)$,

d. h.

$$2\sin^2\frac{1}{2}a = 2\sin b \sin c \,.\, \sin^2\frac{1}{2}A + 2\sin^2\frac{1}{2}(b-c),$$

oder (erste Abthlg. §. 14 (23)):

$$1 - \cos a = \sin b \sin c\,(1 - \cos A) + 1 - \cos(b-c),$$
$$1 - \cos a = \sin b \sin c - \sin b \sin c \,.\, \cos A + 1 - \cos(b-c),$$
$$-\cos a = \sin b \sin c - \sin b \sin e \cos A - \cos b \cos c - \sin b \sin c,$$

(erste Athlg. §. 12)

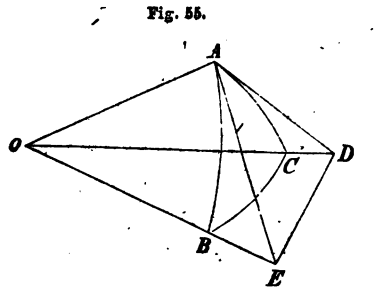
$$-\cos a = -\sin b \sin c \cos A - \cos b \cos c,$$

d. h. $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Diese Gleichung ist die Fundamentalgleichung, von der wir ausgehen werden. Eben desshalb dürfte eine zweite Ableitung derselben vielleicht nicht unerwünscht seyn, wobei wir bemerken, dass noch eine ziemliche Anzahl anderer Ableitungsweisen vorhanden ist.

Sey wieder ABC ein sphärisches Dreieck, O der Mittelpunkt der Kugel. Sey AD in der Ebene des Bogens AC Tangente in A an diesen Bogen, dessgleichen AE für AB, so ist EAD = A. Ferner ist AOC = b, AOB = c, BOC = a. Daraus folgt (erte Abthlg. §. 20); wenn r den Kugelhalbmesser bedeutet:

Fig. 55.



---

allgemein gelten, welche Werthe auch immer a, b, c, A haben mögen, wenn sie nur unter 180° sind. Für den besondern Fall, dass b = c wäre, würde allerdings F mit C, B mit G zusammenfallen, also das Viereck GBFC nicht vorhanden seyn; alsdann hat man jedoch $BC = 2r \sin\frac{1}{2}a$, oder da jetzt BC mit GC zusammenfällt, auch $GC = 2r \sin\frac{1}{2}a$. Aber es ist auch, wie im Texte, $GC = 2r \sin b \sin\frac{1}{2}A$, demnach

$$2r \sin\frac{1}{2}a = 2r \sin b \sin\frac{1}{2}A, \quad \sin\frac{1}{2}a = \sin b \sin\frac{1}{2}A.$$

Diese Gleichung ist aber die gefundene Fundamentalgleichung, denn sie gibt:

$$2\sin^2\frac{1}{2}a = 2\sin^2 b \sin^2\frac{1}{2}A, \quad 1 - \cos a = \sin^2 b\,(1 - \cos A),$$
$$1 - \cos a = \sin^2 b - \sin^2 b \cos A, \quad \cos a = \cos^2 b + \sin^2 b \cos A,$$

welche letztere Gleichung aus $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ folgt, wenn b = c ist. Wie natürlich zu erwarten war, gilt also die Fundamentalgleichung auch noch für b = c.

$$AD = r\,\mathrm{tg}\,b,\ AE = r\,\mathrm{tg}\,c, OD = \frac{r}{\cos b},\ OE = \frac{r}{\cos c}.$$

Ferner (erste Abthlg. §. 22):

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2DA\,.\,AE\,.\,\cos A = r^2\,\mathrm{tg}^2 b + r^2\,\mathrm{tg}^2 c$$
$$- 2r^2\,\mathrm{tg}\,b\,.\,\mathrm{tg}\,c \cos A,$$

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD.OE\cos a = \frac{r^2}{\cos^2 b} + \frac{r^2}{\cos^2 c} - \frac{2r^2 \cos a}{\cos b.\cos c}.$$

Hieraus erhält man:

$$r^2\mathrm{tg}^2 b + r^2\mathrm{tg}^2 c - 2r^2\mathrm{tg}\,b\,.\,\mathrm{tg}\,c\,.\cos A = \frac{r^2}{\cos^2 b} + \frac{r^2}{\cos^2 c} - \frac{2r^2\cos a}{\cos b \cos c},$$

oder wenn man mit $\cos^2 b \cos^2 c$ multiplizirt und durch r^2 dividirt:

$$\sin^2 b \cos^2 c + \sin^2 c \cos^2 b - 2 \sin b \sin c \cos b \cos c \cos A = \cos^2 c$$
$$+ \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos c,$$

d. h.

$$(\sin^2 b - 1) \cos^2 c + \cos^2 b (\sin^2 c - 1) - 2 \sin b \sin c \cos b \cos c \cos A$$
$$= - 2 \cos a \cos b \cos c,$$

$$- \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 b \cos^2 c - 2 \sin b \sin c \cos b \cos c \cos A$$
$$= - 2 \cos a \cos b \cos c,$$

$$2 \cos^2 b \cos^2 c + 2 \sin b \sin c \cos b \cos c \cos A = 2 \cos a \cos b \cos c,$$

$$\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = \cos a.$$

Man hat also die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,^{*} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

d. h. der Cosinus einer Seite ist gleich dem Produkte der Cosinus der zwei andern Seiten, plus dem Produkte der Sinus der zwei andern Seiten in den Cosinus des Winkels, der der ersten Seite entgegensteht.

Anmerkung. Diese drei Gleichungen sind die nothwendigen und genügenden Fundamentalgleichungen; alle übrigen Beziehungen werden sich desshalb aus ihnen nach den gewöhnlichen Regeln der Rechnung ableiten lassen, wie sich im Nachstehenden zeigen wird. Dass sie übrigens nothwendig sind, aber auch genügen, lässt sich in folgender Weise leicht einsehen. Ein sphärisches Dreieck ist

---

* Von diesen Gleichungen könnten die zwei letztern eben so unmittelbar abgeleitet werden, wie die erste; es bedarf dessen aber nicht, da es genügt, in der ersten Gleichung a und b, A und B zu vertauschen, um nothwendig die zweite zu erhalten u. s. w. Sobald man übrigens die erste Gleichung in Worte fasst, ergibt sich die Richtigkeit der andern von selbst.

vollkommen bestimmt, wenn in demselben z. B. gegeben sind zwei Seiten (b und c), nebst dem von diesen Seiten gebildeten Winkel (A). In diesem Falle giebt nun die erste Gleichung (1) den cos a, also da a zwischen 0° und 180° liegt, die Seite a ganz unzweideutig; eben so unzweideutig folgen dann aus den zwei andern Gleichungen (1) die Winkel B und C, so dass alle übrigen Stücke gefunden werden können. Es ergibt sich hieraus offenbar, dass drei Gleichungen nothwendig sind, und dass die drei (1) genügen. Eine Beziehung zwischen den Seiten und Winkeln des Dreiecks, die andere Werthe liefern würden, als die gefundenen, kann aber nicht existiren, einfach desshalb, weil andere Werthe dieser Grössen (a, B, C) auch nicht existiren, da ja nur ein Werth für jede möglich, und derselbe bereits gefunden ist.

Die Gleichungen (1) entsprechen den Gleichungen (31) in §. 22 der ersten Abtheilung und man könnte letztere auch aus den obigen ableiten, etwa in nachstehender Weise. Sey r der Halbmesser der Kugel, auf der das sphärische Dreieck verzeichnet ist; α, β, γ die Längen der drei Bögen BC, AC, AB, so ist (erste Abtheilung §. 16):

$$\cos a = 1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{r^2} + \frac{1}{24}\frac{\alpha^4}{r^4} - \ldots, \cos b = 1 - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{r^2} + \frac{1}{24}\frac{\beta^4}{r^4} - \ldots, \cos c = 1 - \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{r^2}$$
$$+ \frac{1}{24}\frac{\gamma^4}{r^4} - \ldots, \sin b = \frac{\beta}{r} - \frac{1}{6}\frac{\beta^3}{r^3} + \ldots, \sin c = \frac{\gamma}{r} - \frac{1}{6}\frac{\gamma^3}{r^3} + \ldots,$$

also wird die erste Gleichung (1) zu:

$$1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{r^2} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{r^2} + \ldots\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{r^2} + \ldots\right) + \left(\frac{\beta}{r} - \frac{1}{6}\frac{\beta^3}{r^3} + \ldots\right)$$
$$\left(\frac{\gamma}{r} - \frac{1}{6}\frac{\gamma^3}{r^3} + \ldots\right)\cos A,$$

d. h.

$$1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{r^2} + \ldots = 1 - \frac{1}{2}\frac{\beta^2 + \gamma^2}{r^2} + \ldots + \frac{\beta\gamma}{r^2}(1 - \ldots)\cos A,$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{r^2} + \ldots = -\frac{1}{2}\frac{\beta^2 + \gamma^2}{r^2} + \ldots + \frac{\beta\gamma}{r^2}(1 - \ldots)\cos A,$$

wo die weggelassenen Grössen alle höhere Potenzen von r, als die zweite, im Nenner haben. Multiplizirt man mit $-2r^2$, so hat man

$$\alpha^2 + \ldots = \beta^2 + \gamma^2 + \ldots - 2\beta\gamma(1 - \ldots)\cos A.$$

Lässt man $r = \infty$ werden, so geht die Kugel in eine Ebene, das sphärische Dreieck in ein ebenes über; dabei werden nun die weggelassenen Grössen, da sie noch r im Nenner haben, ausfallen, so dass man hat:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A,$$

d. h. die eine Gleichung (31) in §. 22 der ersten Abtheilung.

§. 4.

Aus (1) zieht man:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

also

$$1+\cos A = 1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c} = \frac{\sin b\sin c+\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-(\cos b\cos c-\sin b\sin c)}{\sin b\sin c} = \frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c}$$

$$=-\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b-c)}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c}$$ (erste Abthlg. §§. 8, 14, 13),

d. h.
$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c}.$$

Eben so:

$$1-\cos A=1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}=\frac{\sin b\sin c-\cos a+\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}=-\frac{2\sin\frac{1}{2}(b-c+a).\sin\frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b-c).\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\sin c},$$

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}A=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b-c).\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\sin c},$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c).\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\sin c}.$$

Durch Division beider Resultate ergibt sich:

$$tg^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c).\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c).\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}.$$

Setzt man $a+b+c=2s$,

so ist $a+b-c=2s-2c$,

$a-b+c=2s-2b$,

$b+c-a=2s-2a$,

also:

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c)=s,\ \tfrac{1}{2}(a+b-c)=s-c,\ \tfrac{1}{2}(a-b+c)=s-b,$$
$$\tfrac{1}{2}(b+c-a)=s-a,$$

d. h. man hat nun:

$$\left.\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}, \\
\sin \tfrac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-c)}{\sin a \sin c}}, \\
\sin \tfrac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}}, \\
\cos \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \cdot \sin c}}, \\
\cos \tfrac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin e}}, \\
\cos \tfrac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}, \\
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin s \cdot \sin(s-a)}}, \\
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-c)}{\sin s \cdot \sin(s-b)}}, \\
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin s \cdot \sin(s-c)}},
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wo die Quadratwurzel nur positiv genommen ist, da $\tfrac{1}{2} A$, $\tfrac{1}{2} B$, $\tfrac{1}{2} C$ unter 90° sind. Da ferner nach §. 1 Nr. 1 immer $s-a$, $s-b$, $s-c$ positiv sind, und s sowohl, als jede dieser Grössen unter 180° bleibt (§. 1, Nr. 4), so sind die Grössen unter den Wurzelzeichen alle positiv.

Durch Multiplikation zieht man heraus:

$$2 \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A = 2 \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a) \cdot \sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin^2 b \sin^2 c}},$$

d. h. $\sin b \sin c \cdot \sin A = 2 \sqrt{\sin s \cdot \sin(s-a) \cdot \sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}$.

Eben so:

$$\sin a \cdot \sin c \cdot \sin B = 2 \sqrt{\sin s \cdot \sin(s-a) \cdot \sin(s-b) \cdot \sin(s-c)},$$
$$\sin a \cdot \sin b \cdot \sin C = 2 \sqrt{\sin s \cdot \sin(s-a) \sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}.$$

Daraus folgt:

$$\sin b \sin c \sin A = \sin a \sin c \sin B = \sin a \sin b \cdot \sin C,$$

d. h.

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B, \ \sin c \sin A = \sin a \sin C, \ \sin c \sin B = \sin b \sin C,$$

oder

$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$, $\sin a : \sin c = \sin A : \sin C$, $\sin b : \sin c = \sin B : \sin C$, (3)

d. h. die Sinus der Seiten verhalten sich, wie die Sinus der entgegenstehenden Winkel.

§. 5.

Aus (1) hat man:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Setzt man diesen Werth von cos c in die erste Gleichung, so erhält man:

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos a - \cos a \cos^2 b = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos a (1 - \cos^2 b) = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos a \sin^2 b = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A.$$

Dividirt man durch sin b, und schreibt sogleich die weitern Formeln hin, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}
\cos a \sin b &= \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A,\\
\cos b \sin a &= \sin b \cos a \cos C + \sin c \cos B,\\
\cos c \sin b &= \sin c \cos b \cos A + \sin a \cos C,\\
\cos b \sin c &= \sin b \cos c \cos A + \sin a \cos B,\\
\cos a \sin c &= \sin a \cos c \cos B + \sin b \cos A,\\
\cos c \sin a &= \sin c \cos a \cos B + \sin b \cos C,
\end{aligned}\right\} (4)$$

welche Formeln ebenfalls leicht in Worten auszusprechen sind. *

Setzt man in (4) nach (3): $\sin c = \frac{\sin a \, . \, \sin C}{\sin A}$, so hat man:

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin a \sin C \operatorname{cotg} A;$$

dividirt man noch durch sin a, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cotg} a \sin b &= \cos b \cos C + \sin C \operatorname{cotg} A,\\
\operatorname{cotg} b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \operatorname{cotg} B,\\
\operatorname{cotg} c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \operatorname{cotg} C,\\
\operatorname{cotg} b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \operatorname{cotg} B,\\
\operatorname{cotg} a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \operatorname{cotg} A,\\
\operatorname{cotg} c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B \operatorname{cotg} C.
\end{aligned}\right\} (5)$$

---

* Alle diese Formeln werden durch einfache Buchstabenvertauschung aus einander abgeleitet. So folgt die zweite aus der ersten, wenn man a und b, also auch A und B tauscht; die dritte aus der ersten, wenn man a und c, A und C tauscht; die vierte aus der dritten durch Vertauschung von b und c, B und C u. s. w.

Aus (4) hat man

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A.$$

Setzt man nach (3):

$$\sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A}, \sin c = \frac{\sin C \sin a}{\sin A},$$

so ist

$$\frac{\sin a \cos a \sin B}{\sin A} = \sin a \cos b \cos C + \frac{\sin a \sin C \cos A}{\sin A},$$

d. h. $\sin a \cos a \sin B = \sin a \cos b \cos C \sin A + \sin a \sin C \cos A,$

oder wenn man mit sin a dividirt:

$$\left.\begin{aligned}
\cos a \sin B &= \cos b \sin A \cos C + \cos A \sin C,\\
\cos b \sin A &= \cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C,\\
\cos a \sin C &= \cos c \sin A \cos B + \cos A \sin B,\\
\cos c \sin A &= \cos a \sin C \cos B + \cos C \sin B,\\
\cos b \sin C &= \cos c \sin B \cos A + \cos B \sin A,\\
\cos c \sin B &= \cos b \sin C \cos A + \cos C \sin A.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Die Gleichungen (4) sind Gleichungen zwischen den drei Seiten und zwei Winkeln; die (5) zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln; (6) zwischen zwei Seiten und drei Winkeln. Ein Schritt weiter wird uns nun die gesuchte Gleichung zwischen einer Seite und den drei Winkeln geben.

Aus (6) hat man

$$\cos a \sin B = \cos b \sin A \cos C + \cos A \sin C,$$
$$\cos b \sin A = \cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C,$$

also wenn man diesen Werth in die erste Gleichung einsetzt:

$$\cos a \sin B = \cos a \sin B \cos^2 C + \cos C \sin C \cos B + \cos A \sin C,$$
$$\cos a \sin B (1 - \cos^2 C) = \cos C \sin C \cos B + \cos A \sin C,$$
$$\cos a \sin B \sin^2 C = \sin C \cos C \cos B + \cos A \sin C,$$
$$\cos a \sin B \sin C = \cos C \cos B + \cos A,$$

d. h. man hat:

$$\left.\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,\\
\cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,\\
\cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

d. h. der Cosinus eines Winkels ist gleich dem negativen Produkte der Cosinus der beiden andern Winkel, plus dem Produkte der Sinus der beiden andern Winkel in den Co-

sinus der Seite, welche dem ersten Winkel entgegensteht.*

Da die Gleichungen (7) abermals einen wichtigen Satz ausdrücken, so wollen wir eine zweite Ableitung derselben angeben.

Da nach §. 1 Nr. 2 es immer auch ein sphärisches Dreieck gibt, dessen drei Seiten $180^0 - A$, $180^0 - B$, $180^0 - C$, und dessen drei Winkel $180^0 - a$, $180^0 - b$, $180^0 - c$ sind, so hat man nach §. 3:

$$\cos(180^0 - A) = \cos(180^0 - B) \cdot \cos(180^0 - C) + \sin(180^0 - B) \sin(180^0 - C) \cos(180^0 - a),$$

d. h.

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a \text{ (erste Abthlg. §. 9)},$$

oder

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Durch eine ähnliche Umformung gehen die Sätze (6) direkt aus (4) hervor.

Aus (7) folgt:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

also wie in §. 4:

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin B \sin C + \cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} = \frac{\cos A + \cos(B - C)}{\sin B \sin C}$$

$$= \frac{2\cos \frac{1}{2}(A + B - C) \cos \frac{1}{2}(A - B + C)}{\sin B \sin C},$$

---

* In der Anmerkung zu §. 3 haben wir die Gleichungen (1) als die nothwendigen und genügenden Fundamentalgleichungen der sphärischen Trigonometrie bezeichnet. Mit demselben Rechte könnte man diess auch von den Gleichungen (7) sagen, da aus diesen ebenfalls alle andern abgeleitet werden könnten, was man durch ein Zurückgehen durch (6), (5), (4) erlangen würde.

Was ferner die gleichfalls berührte Beziehung dieser Gleichungen mit denen der ebenen Trigonometrie anbelangt, so entsprechen die Formeln (2) den Formeln (34) in §. 23 der ersten Abtheilung, die (3) den (29) in §. 22; die im §. 6 hier noch abgeleiteten Formeln (9) entsprechen den (33) in §. 23, die (10) den (30) in §. 22. Was die (7) anbelangt, so entsprechen sie der Formel $A + B + C = 180^0$ der ebenen Trigonometrie; denn man zieht aus ihnen, indem $\cos a = 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + \ldots$, für $r = \infty$ zu $\cos a = 1$ wird:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C = -\cos(B - C), \quad \cos B = -\cos(A + C),$$
$$\cos C = -\cos(A + B),$$

also nothwendig $A + B + C = 180^0$.

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\sin B\sin C - \cos A - \cos B\cos C}{\sin B\sin C} = -\frac{\cos A + \cos(B+C)}{\sin B\sin C}$$

$$= -\frac{2\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C}.$$

Setzt man nun

$$A+B+C=2S,$$

also

$$A+B-C=2S-2C,$$
$$A-B+C=2S-2B,$$
$$B+C-A=2S-2A,$$

so hat man folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}a &= \sqrt{\frac{-\cos S\,.\cos(S-A)}{\sin B\sin C}},\\
\sin\tfrac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{-\cos S\,.\cos(S-B)}{\sin A\sin C}},\\
\sin\tfrac{1}{2}c &= \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\sin A\sin B}},\\
\cos\tfrac{1}{2}a &= \sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}},\\
\cos\tfrac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-C)}{\sin A\sin C}},\\
\cos\tfrac{1}{2}c &= \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A\sin B}},\\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a &= \sqrt{\frac{-\cos S\,.\cos(S-A)}{\cos(S-B)\,.\cos(S-C)}},\\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}},\\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c &= \sqrt{\frac{-\cos S\,.\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}},
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

in welchen Gleichungen die Quadratwurzel nur positiv genommen ist, da $\tfrac{1}{2}a$, $\tfrac{1}{2}b$, $\tfrac{1}{2}c$ unter 90° sind. Da nach §. 1: $S=\tfrac{1}{2}(A+B+C)$ zwischen 90° und 270°; $S-A$, $S-B$, $S-C$ zwischen $-90°$ und $+90°$ liegen, so ist $\cos S$ negativ; $\cos(S-A)$, $\cos(S-B)$, $\cos(S-C)$ dagegen sind positiv, die unter dem Wurzelzeichen vorkommenden Grössen sind also sämmtlich positiv. Aus den Gleichungen (8) lassen sich die Gleichungen (3) ebenfalls leicht ableiten.

§. 6.

Aus den Formeln (2) in §. 4 folgt unmittelbar:

$$\cos\tfrac{1}{2}A.\cos\tfrac{1}{2}B=\frac{\sin s}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a).\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}=\frac{\sin s}{\sin c}.\sin\tfrac{1}{2}C.$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sin\tfrac{1}{2}B=\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}=\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sin\tfrac{1}{2}C,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B=\frac{\sin(s-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s.\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}=\frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cos\tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\frac{\sin(s-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s.\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}=\frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cos\tfrac{1}{2}C,$$

wie man sich leicht überzeugt, und dabei beachtet, dass beide Seiten positiv sind. Daraus folgt:

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B+\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\frac{\sin\tfrac{1}{2}C}{\sin c}(\sin s+\sin(s-c))$$

$$=\frac{\sin\tfrac{1}{2}C}{2\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c}.2\sin(s-\tfrac{1}{2}c)\cos\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin\tfrac{1}{2}C}{\sin\tfrac{1}{2}c}.\sin\tfrac{1}{2}(a+b),$$

(erste Abthlg. §. 14), da $s-\tfrac{1}{2}c=\tfrac{1}{2}(a+b+c)-\tfrac{1}{2}c=\tfrac{1}{2}(a+b)$; d. h. man hat (wegen $\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B+\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$):

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B)=\sin\tfrac{1}{2}(a+b).\frac{\sin\tfrac{1}{2}C}{\sin\tfrac{1}{2}c}.$$

Eben so:

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B-\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\frac{\sin\tfrac{1}{2}C}{\sin c}[\sin s-\sin(s-c)]$$

$$=\frac{\sin\tfrac{1}{2}C}{2\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c}.2\cos\tfrac{1}{2}(a+b).\sin\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}(a+b).\frac{\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}c},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)=\cos\tfrac{1}{2}(a+b).\frac{\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}c}.$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B+\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\frac{\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin c}[\sin(s-b)+\sin(s-a)]$$

$$=\frac{\cos\tfrac{1}{2}C}{2\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c}.2\sin[s-\tfrac{1}{2}(a+b)]\cos\tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$=\frac{\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c}.\sin\tfrac{1}{2}c.\cos\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\cos\tfrac{1}{2}C.\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}c},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)=\cos\tfrac{1}{2}(a-b).\frac{\cos\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}c}.$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B-\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin c}[\sin(s-b)-\sin(s-a)]$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}C}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\,.\,2\cos[s-\tfrac{1}{2}(a+b)]\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}c}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(a-b),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B)=\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

Man hat also folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C,\\
&\sin\tfrac{1}{2}(A+C)\cos\tfrac{1}{2}b=\cos\tfrac{1}{2}(a-c)\cos\tfrac{1}{2}B,\\
&\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}c=\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C,\\
&\sin\tfrac{1}{2}(A-C)\sin\tfrac{1}{2}b=\sin\tfrac{1}{2}(a-c)\cos\tfrac{1}{2}B,\\
&\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C,\\
&\cos\tfrac{1}{2}(A+C)\cos\tfrac{1}{2}b=\cos\tfrac{1}{2}(a+c)\sin\tfrac{1}{2}B,\\
&\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}c=\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C,\\
&\cos\tfrac{1}{2}(A-C)\sin\tfrac{1}{2}b=\sin\tfrac{1}{2}(a+c)\sin\tfrac{1}{2}B,\\
&\sin\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}a=\cos\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}A,\\
&\cos\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}a=\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A,\\
&\sin\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}a=\sin\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}A,\\
&\cos\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}a=\sin\tfrac{1}{2}(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A.
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Durch Division zieht man aus den Gleichungen (9):

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C,\\
&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)}{\cos\frac{1}{2}(a+c)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B,\\
&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A,\\
&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C,\\
&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-C)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+c)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B,\\
&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A.\\
&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c,
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+c) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b,\\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b+c) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a,\\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c,\\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-c) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}(A+C)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b,\\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b-c) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a.
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Anmerkung. Die wichtigen Formeln (9) hat zuerst Mollweide in der „monatlichen Korrespondenz“ 18. Band, S. 399 aufgestellt; sie pflegen jedoch gewöhnlich die Gaussischen Gleichungen genannt zu werden, da Gauss sie in der Theoria motus corporum coelestium pag. 51 aufstellte. Doch ist der betreffende Band der monatlichen Korrespondenz im November 1808, das Gaussische Werk erst 1809 erschienen.

Die Gleichungen (10) pflegen die Neper'schen Gleichungen genannt zu werden. Den oben mitgetheilten Beweis derselben scheint zuerst Matzka (Professor an der Universität Prag) gefunden zu haben. Man vergleiche desshalb die 7. Auflage der Vega'schen Vorlesungen, zweiter Band, S. 245. (Wien, 1835).

§. 7.

Aus den Gleichungen (9) lassen sich nun zunächst einige interessante Resultate ziehen.

1) Aus

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C,$$

folgt, dass wenn $A > B$, also $\frac{1}{2}(A-B)$ positiv ist, auch $\sin\frac{1}{2}(a-b)$ positiv seyn muss, da es dann $\sin\frac{1}{2}(A-B)$, $\sin\frac{1}{2}c$, $\cos\frac{1}{2}C$ sind; also ist alsdann auch $a > b$. Ist umgekehrt $a > b$, so muss auch $A > B$ seyn, da dann $\sin\frac{1}{2}(A-B)$ positiv seyn muss.*

Man schliesst hieraus, dass in einem sphärischen Dreiecke der grössern (kleinern) Seite auch der grössere (kleinere) Winkel entgegensteht und umgekehrt. Daraus folgt von selbst, dass wenn zwei Seiten einander gleich sind, auch die ihnen entgegenstehenden Winkel gleich seyn werden und umgekehrt.

---

* Es könnte allerdings $\sin\frac{1}{2}(A-B)$ auch positiv seyn, wenn $A < B$; nur müsste dann $\frac{1}{2}(A-B)$ unter -180^0, also $A-B$ unter -360^0 liegen, was sicherlich nicht der Fall ist.

Für $a = b$ folgt aber aus (10):

und für $A = B$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} A &= \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} C}{\cos a}, \\ \operatorname{tg} a &= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\cos A}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

2) Aus $\cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2} C$

folgt, da $\cos \frac{1}{2} c$, $\sin \frac{1}{2} C$ immer positiv sind; $\frac{1}{2}(a+b)$ und $\frac{1}{2}(A+B)$ nicht über 180° hinausgehen, dass

wenn $\frac{1}{2}(A+B) < 90^\circ$, also $\cos \frac{1}{2}(A+B)$ positiv ist, auch $\cos \frac{1}{2}(a+b)$ positiv, also $\frac{1}{2}(a+b) < 90^\circ$ seyn muss;

wenn $\frac{1}{2}(A+B) > 90^\circ$, also $\cos \frac{1}{2}(A+B)$ negativ ist, auch $\cos \frac{1}{2}(a+b)$ negativ, also $\frac{1}{2}(a+b) > 90^\circ$ seyn muss;

wenn $\frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ$, als $\cos \frac{1}{2}(A+B)$ Null ist, auch $\cos \frac{1}{2}(a+b)$ Null, also $\frac{1}{2}(a+b) = 90^\circ$ seyn muss.

Daher schliesst man hieraus:

Sind zwei Winkel zusammen kleiner, gleich, grösser als 180°, so sind die ihnen entgegenstehenden Seiten ganz in demselben Falle, und umgekehrt.

Anmerkung. Wir haben im Vorstehenden diejenigen Formeln entwickelt, die zur Auflösung der sphärischen Dreiecke dienen können und zu diesem Zwecke vollkommen hinreichen. Es versteht sich ganz von selbst, dass man durch Verbindungen der erhaltenen Formeln, in ähnlicher Weise wie in §. 5 weitere Formeln erhalten könne. Wir wollen, da wir solche Formeln hier nicht brauchen, von der Ableitung derselben Umgang nehmen. Zur Uebung mögen einige vorgelegt werden, indem dabei auf eine Abhandlung des Verfassers in Grunerts Archiv Thl. 7, S. 234 verwiesen wird, wo, auf einem verschiedenen Wege, eine Menge solcher Formeln abgeleitet wurde.

1) $\cos a \sin b \sin A = \sin a \cos b \sin A \cos C + \sin a \cos A \sin C$, aus (4) und (2).

2) $\sin A = \sin B \cos C \cos c + \cos B \sin C \cos a \cos c + \sin a \sin c \sin C$, aus (2) und (4).

3) $\sin a \cos A = -\sin a \cos B \cos C + \cos a \sin b \sin A \sin C$, aus (4) und Nr. 1, oder (2) und (7).

4) $\cos a \sin A = \cos b \cos c \sin A + \sin a \sin c \cos A \sin B$, aus (1) und (2).

5) $\sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C = \sin A \sin B - \cos c \cos A \cos B$, aus (2), (1) und (7).

6) $\cos a \cos B = \cos c \sin C \sin A - \sin c \sin b \cos C - \cos b \cos c \cos A \cos C$, aus (1), (7), (2).

7) $\cos A \cos B \sin C = -\sin A \cos B \cos C \cos b - \cos A \sin B \cos C \cos a + \sin A \sin B \sin C \cos a \cos b$, aus (7).

8) $\cos A = \cos a \sin b \sin c - \sin a \cos b \sin c \cos C - \sin a \sin b \cos c \cos C - \cos a \cos b \cos c \cos B \cos C + \cos b \cos c \sin B \sin C$, aus (7), (1), (4).

u. s. w.

§. 8.

Wir haben im Vorstehenden keinerlei spezielle Voraussetzung in Bezug auf die Grösse der Winkel oder Seiten gemacht; doch mag es hier von Interesse seyn, den Fall zu untersuchen, wenn Seiten oder Winkel $= 90^0$ sind.

1) Sey $A = 90^0$, so folgt nun:

$\cos a = \cos b \cos c$ aus (1),

$\sin b = \sin a \sin B$ aus (3),

$\sin c = \sin a \sin C$ aus (3),

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cotg} C &= \operatorname{cotg} c \sin b,\\ \operatorname{cotg} B &= \operatorname{cotg} b \sin c,\end{aligned}\right\}\text{ aus } (5)$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg} b &= \operatorname{tg} a \cos C,\\ \cos b \sin c &= \sin a \cos B,\\ \operatorname{tg} c &= \operatorname{tg} a \cos B,\\ \cos c \sin b &= \sin a \cos C\end{aligned}\right\}\text{ aus } (4), \quad \left.\begin{aligned}\cos a \sin B &= \cos b \cos C,\\ \cos a \sin C &= \cos c \cos B,\\ \cos b \sin C &= \cos B,\\ \cos c \sin B &= \cos C\end{aligned}\right\}\text{ aus } (6),$$

$1 = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \cos a$ aus (7).

Aus den Gleichungen $\operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \sin c$ und $\operatorname{cotg} C = \operatorname{cotg} c \sin b$, folgt, weil $\sin b$ und $\sin c$ positiv sind, dass wenn $B < 90^0$ auch $b < 90^0$; wenn $B > 90^0$ auch $b > 90^0$ und umgekehrt. Eben so verhalten sich C und c; man hat also:

$$B \gtreqless 90^0 \text{ auch } b \gtreqless 90^0,\ C \gtreqless 90^0 \text{ auch } c \gtreqless 90^0.$$

Diese Beziehungen folgen übrigens direckt aus §. 7. Ist $B < 90^0$, so ist, da $A = 90^0$, $A + B < 180^0$; also $a + b < 180^0$; da ferner $B < A$, so ist auch $b < a$, also muss nothwendig $b < 90^0$, da sonst, wegen $a > b$, $a + b > 180^0$ wäre. Ist $B = 90^0$, so ist $A + B = 180^0$, also $a + b = 180^0$, und da $A = B$, so ist auch $a = b$, also $a = b = 90^0$; ist endlich $B > 90^0$, so ist $A + B > 180^0$, also $a + b > 180^0$, und da $B > A$, so ist auch $b > a$, mithin $b > 90^0$, da für $b \overline{\overline{<}} 90^0$, und $a < b$, $a + b < 180^0$ wäre. In derselben Weise findet man die Beziehung zwischen C und c.

Aus der Gleichung $\cos a = \cos b \cos c$ folgt, dass $a < 90^0$ seyn wird, wenn b und c beide $< 90^0$ oder beide $> 90^0$ sind; a wird $= 90^0$ seyn, wenn b oder c es ist; endlich $a > 90^0$, wenn eine der Seiten b und c grösser, die andere kleiner als 90^0 ist.

2) Sey $A = 90^0$, $B = 90^0$. Nach §. 8 ist alsdann auch $a = b$, also da $A + B = 180^0$, mithin auch $a + b = 180^0$, ist $a = b = 90^0$. Da ferner die Gleichungen in Nr. 1 immer noch gelten, wenn nur $B = 90^0$ gesetzt wird, so ist jetzt

$$\cos c = \cos C, \ \sin c = \sin C,$$

also $c = C$, wobei jedoch C (wie c) willkührlich bleibt. Man wird sich, wenn man diesen Fall durch Zeichnung darstellen will, leicht überzeugen, dass die Spitze C der sogenannte Pol des durch AB gehenden grössten Kugelkreises ist, d. h. derjenige Punkt, der von letzterm Kreise nach allen Richtungen um 90° absteht.

Von den Gleichungen in Nr. 1 sind keine beizubehalten, als die eben angegebenen, da für $A = B = a = b = 90^0$ alle andern identisch erfüllt sind.

3) Ist $A = B = C = 90^0$, so folgt aus Nr. 2, dass auch $a = b = c = 90^0$ ist.

4) Sey $a = 90^0$, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A = -1,\\ \cos b = \sin c \cos B,\\ \cos c = \sin b \cos C.\end{array}\right\} \text{aus (1).} \qquad \left.\begin{array}{l}\cos b = -\operatorname{tg} C \operatorname{cotg} A,\\ \operatorname{cotg} b = \sin C \operatorname{cotg} B,\\ \cos c = -\operatorname{tg} B \operatorname{cotg} A,\\ \operatorname{cotg} c = \sin B \operatorname{cotg} C.\end{array}\right\} \text{aus (5).}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin B = \sin b \sin A,\\ \sin C = \sin c \sin A.\end{array}\right\} \text{aus (3).} \qquad \left.\begin{array}{l}\cos b \sin A = \cos B \sin C,\\ \cos c \sin A = \cos C \sin B,\end{array}\right\} \text{aus (6).}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos b \cos C = -\sin c \cos A,\\ \cos B \cos c = -\sin b \cos A.\end{array}\right\} \text{aus (4).} \qquad \cos A = -\cos B \cos C \quad \text{aus (7).}$$

Aus $\cos b = \sin c \cos B$, $\cos c = \sin b \cos C$ folgt wie in Nr. 1, dass wenn

$$b \gtreqless 90^0 \text{ auch } B \gtreqless 90^0, \quad c \gtreqless 90^0 \text{ auch } C \gtreqless 90^0$$

und umgekehrt sey, welche Beziehungen übrigens auch aus §. 7 direkt abgeleitet werden können.

5) Sey $a = b = 90^0$, so ist nach §. 7 auch $A = B = 90^0$ und man hat den Fall Nr. 2; dessgleichen Nr. 3, wenn $a = b = c = 90^0$.

6) Sey $A = 90^0$, $a = 90^0$. Aus (1) folgt jetzt:

$$0 = \cos b \cos c,$$

d. h. entweder $\cos b = 0$, oder $\cos c = 0$, mithin entweder $b = 90^0$, oder $c = 90^0$. Ist nun $b = 90^0$, so ist nach Nr. 5 auch $B = 90^0$ und $C = c$; ist $c = 90^0$, so ist auch $C = 90^0$ und $B = b$. Also wird jetzt das Dreieck nothwendig zwei rechte Winkel haben, also der Fall 2 oder 5 eintreten.

Zweiter Abschnitt.

Auflösung der sphärischen Dreiecke.

§. 9.

In einem sphärischen Dreieck sind die drei Seiten a, b, c gegeben; man soll die drei Winkel A, B, C desselben berechnen.

(Diese Aufgabe ist offenbar identisch mit der: aus den bekannten Kantenwinkeln einer dreiseitigen Ecke die ihnen entgegenstehenden Flächenwinkel zu berechnen. Aehnliches gilt für die folgenden Fälle.)

Die Rechnung wird nach den Formeln (2) in §. 4 zu führen seyn, worin die Werthe $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} B$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} C$ im Allgemeinen das sicherste Resultat geben. Wenn man jedoch will, so kann man ganz direkt die Formeln (1) anwenden. Man hat

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Man bestimme nun den Winkel α so dass

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos b \cos c}{\sin a}, \ \cos b \cos c = \sin a \operatorname{tg} \alpha,$$

so ist
$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \sin a \operatorname{tg} \alpha}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos a \cos \alpha - \sin a \sin \alpha}{\sin b \sin c \,.\, \cos \alpha} = \frac{\cos(\alpha + a)}{\sin b \ \sin c \ \cos \alpha}.$$

Eben so wenn

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos a \cos c}{\sin b}, \ \operatorname{tg} \gamma = \frac{\cos a \cos b}{\sin c}:$$

$$\cos B = \frac{\cos(\beta + b)}{\sin a \sin c \cos \beta}, \ \cos C = \frac{\cos(\gamma + c)}{\sin a \sin b \cos \gamma}.$$

Ist eine der gegebenen Seiten, z. B. $a = 90^\circ$, so hat man zur Bestimmung der Winkel nach §. 8, Nr. 4:

$$\cos B = \frac{\cos b}{\sin c}, \ \cos C = \frac{\cos c}{\sin b}, \ \cos A = -\operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} c$$

oder dieselben Formeln wie vorhin. Wir wollen nun einige Beispiele berechnen.

1) $a = 72^\circ 14' 26''$, $b = 110^\circ 18' 20''$, $c = 48^\circ 50' 42''$.

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = 115^\circ 41' 44''.$$

$s - a = 43^0 27' 18''$, $s - b = 5^0 23' 24''$, $s - c = 66^0 51' 2''$

$\log \sin (s - b) = 8{\cdot}9728253$ | $\log \sin (s - a) = 9{\cdot}8374524$
$\log \sin (s - c) = 9{\cdot}9635435$ | $\log \sin (s - c) = 9{\cdot}9635435$
$E \log \sin s = 0{\cdot}0452217$ | $E \log \sin s = 0{\cdot}0452217$
$E \log \sin (s - a) = 0{\cdot}1625475$ | $E \log \sin (s - b) = 1{\cdot}0271746$
$19{\cdot}1441380$ | $20{\cdot}8733922$
$\log tg \frac{1}{2} A = 9{\cdot}5720690$, | $\log tg \frac{1}{2} B = 10{\cdot}4366961$,
$\frac{1}{2} A = 20^0 28' 15{\cdot}8''$ | $\frac{1}{2} B = 69^0 54' 17{\cdot}7''$
$A = 40^0 56' 31{\cdot}7''$ | $B = 139^0 48' 35{\cdot}4''$

$\log \sin (s - a) = 9{\cdot}8374524$
$\log \sin (s - b) = 8{\cdot}9728253$
$E \log \sin s = 0{\cdot}0452217$
$E \log \sin (s - c) = 0{\cdot}0364564$
$18{\cdot}8919558$
$\log tg \frac{1}{2} C = 9{\cdot}4459779$
$\frac{1}{2} C = 15^0 36' 6{\cdot}7''$
$C = 31^0 12' 13{\cdot}5''$

2) $a = 90^0$, $b = 133^0 0' 18''$, $c = 122^0 0' 43''$.

$\log \cos b = 9{\cdot}8338239 (-)$, | $\log \cos c = 9{\cdot}7243545 (-)$,
$E \log \sin c = 0{\cdot}0716361$ | $E \log \sin b = 0{\cdot}1359077$
$\log \cos B = 9{\cdot}9054600 (-)$ | $\log \cos C = 9{\cdot}8602622 (-)$,
$B = 143^0 33' 0{\cdot}7''$. | $C = 136^0 27' 30''$.

$\log cotg b = 9{\cdot}9697319 (-)$
$\log cotg c = 9{\cdot}7959906 (-)$
$\log \cos A = 9{\cdot}7657225 (-)$
$A = 125^0 40' 0{\cdot}9''$.

3) $a = 90^0$, $b = 90^0$, $c = 87^0 24' 36''$.

$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = 133^0 42' 18''$.

$s - a = 43^0 42' 18''$, $s - b = 43^0 42' 18''$, $s - c = 46^0 17' 42''$.

$\log \sin (s - b) = 9{\cdot}8394438$ | $\log \sin (s - a) = 9{\cdot}8394438$
$\log \sin (s - c) = 9{\cdot}8590823$ | $\log \sin (s - c) = 9{\cdot}8590823$
$E \log \sin s = 0{\cdot}1409176$ | $E \log \sin s = 0{\cdot}1409176$
$E \log \sin (s - a) = 0{\cdot}1605562$ | $E \log \sin (s - b) = 0{\cdot}1605562$
$19{\cdot}9999999$ | $19{\cdot}9999999$
$\log tg \frac{1}{2} A = 9{\cdot}9999999$ | $\log tg \frac{1}{2} B = 9{\cdot}9999999$
$\frac{1}{2} A = 45^0$, | $\frac{1}{2} B = 45^0$.
$A = 90^0$. | $B = 90^0$.

$$\log \sin (s - a) = 9{\cdot}8394438$$
$$\log \sin (s - b) = 9{\cdot}8394438$$
$$E \log \sin s = 0{\cdot}1409176$$
$$E \log \sin (s - c) = 0{\cdot}1409176$$
$$\overline{19{\cdot}9607228}$$
$$\log tg \tfrac{1}{2} C = 9{\cdot}9803614$$
$$\tfrac{1}{2} C = 43^\circ 42' 18''$$
$$C = 87^\circ 24' 36'' \text{ (§. 8 Nr. 3).}$$

Zur Uebung legen wir vor:

$$\begin{cases} a = 47^\circ 45' 39'', \ b = 69^\circ 49' 19'', \ c = 80^\circ 17' 36'', \\ A = 48^\circ 24' 56'', B = 71^\circ 29' 46'', C = 95^\circ 13' 26''. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 120^\circ 55' 35'', \ b = 85^\circ 36' 50'', \ c = 59^\circ 55' 10'', \\ A = 129^\circ 47' 56'', B = 63^\circ 15' 12'', C = 50^\circ 48' 20''. \end{cases}$$

Zur Kontrole der richtigen Rechnung wird man etwa die Formeln (9) in §. 6 oder auch (3) in §. 4 benützen können.

§. 10.

In einem sphärischen Dreiecke sind alle Winkel gegeben; man soll die drei Seiten berechnen.

Für diesen Fall dienen die Formeln (8) in §. 5. Ist einer der Winkel, z. B. A ein rechter, so kann man sich derselben Formeln oder der in §. 8 Nr. 1 aufgestellten bedienen.

1) $A = 59^\circ 4' 25''$, $B = 94^\circ 23' 10''$, $C = 120^\circ 4' 50''$.

$$S = \tfrac{1}{2}(A + B + C) = 136^\circ 46' 12{\cdot}5''$$

$$S - A = 77^\circ 41' 47{\cdot}5'', \ S - B = 42^\circ 23' 2{\cdot}5'', \ S - C = 16^\circ 41' 22{\cdot}5''$$

$$\log \cos S = 9{\cdot}8624961$$
$$\log \cos (S - A) = 9{\cdot}3285623$$
$$E \log \cos (S - B) = 0{\cdot}1315652$$
$$E \log \cos (S - C) = 0{\cdot}0186931$$
$$\overline{19{\cdot}3413167}$$
$$\log tg \tfrac{1}{2} a = 9{\cdot}6706583$$
$$\tfrac{1}{2} a = 28^\circ 6' 1{\cdot}77''$$
$$a = 50^\circ 12' 3{\cdot}5''$$

$$\log \cos S = 9{\cdot}8624961$$
$$\log \cos (S - B) = 9{\cdot}8684348$$
$$E \log \cos (S - A) = 0{\cdot}6714376$$
$$E \log \cos (S - C) = 0{\cdot}0186930$$
$$\overline{20{\cdot}4210615}$$
$$\log tg \tfrac{1}{2} b = 10{\cdot}2105307$$
$$\tfrac{1}{2} b = 58^\circ 22' 24{\cdot}57''$$
$$b = 116^\circ 44' 49{\cdot}1''$$

$$\log \cos S = 9{\cdot}8624961$$
$$\log \cos (S - C) = 9{\cdot}9813069$$
$$E \log \cos (S - A) = 0{\cdot}6714376$$
$$E \log \cos (S - B) = 0{\cdot}1315651$$
$$\overline{20{\cdot}6468057}$$

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c = 10{\cdot}3234028$$
$$\tfrac{1}{2} c = 64^\circ 35' 49{\cdot}9''$$
$$c = 129^\circ 11' 39{\cdot}9''$$

2) $A = 90^\circ$, $B = 63^\circ 15' 12''$, $C = 135^\circ 33' 39''$.

$$\log \cos B = 9{\cdot}6532654 \qquad \log \cos C = 9{\cdot}8536947 (-)$$
$$E \log \sin C = 0{\cdot}1548088 \qquad E \log \sin B = 0{\cdot}0491460$$
$$\log \cos b = 9{\cdot}8080702 \qquad \log \cos c = 9{\cdot}9028407 (-)$$
$$b = 50^\circ 0' 0'' \qquad c = 143^\circ 5' 10{\cdot}6''$$

$$\log \operatorname{cotg} B = 9{\cdot}7024034$$
$$\log \operatorname{cotg} C = 10{\cdot}0085027 (-)$$
$$\log \cos a = 9{\cdot}7109061 (-)$$
$$a = 120^\circ 55' 34''.$$

Zur Uebung legen wir vor:

$$\begin{cases} A = 40^\circ 56' 31{\cdot}8'', & B = 139^\circ 48' 35{\cdot}4'' & C = 31^\circ 12' 13{\cdot}5'', \\ a = 72^\circ 14' 26'', & b = 110^\circ 18' 20'', & c = 48^\circ 50' 42''. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 90^\circ, & B = 50^\circ 2' 1'', & C = 92^\circ 8' 23'', \\ a = 91^\circ 47' 40'', & b = 50^\circ 0' 0'', & c = 92^\circ 47' 32''. \end{cases}$$

Auch hier könnte man durch Einführung von Hilfswinkeln die Aufgabe lösen. Man hat nämlich:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C};$$

man bestimme nun α aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos B \cos C}{\sin A},$$

so ist
$$\cos a = \frac{\cos A + \sin A \operatorname{tg} \alpha}{\sin B \sin C} = \frac{\cos (A - \alpha)}{\sin B \sin C . \cos \alpha}.$$

Eben so wenn

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos A \cos C}{\sin B}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\cos A \cos B}{\sin C}:$$
$$\cos b = \frac{\cos (B - \beta)}{\sin A \sin C \cos \beta}, \quad \cos c = \frac{\cos (C - \gamma)}{\sin A \sin B \cos \gamma}.$$

§. 11.

In einem sphärischen Dreiecke sind gegeben zwei Seiten b, c nebst dem von ihnen gebildeten Winkel A; es sollen die übrigen Stücke gefunden werden.

Aus den Formeln (10) in §. 6:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A,\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A,$$

folgt $\frac{1}{2}(B+C)$ und $\frac{1}{2}(B-C)$, woraus dann B und C erhalten werden. Die fehlende Seite a kann man aus einer der folgenden Formeln, die aus (9) und (10) sich ergeben, ableiten:

$$\cos\tfrac{1}{2}a=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}\cos\tfrac{1}{2}A=\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\sin\tfrac{1}{2}A,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}\cos\tfrac{1}{2}A=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}\sin\tfrac{1}{2}A,$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b+c)\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b-c)\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}.$$

Für $b+c=180^\circ$ ist auch (§. 7) $B+C=180^\circ$, $\frac{1}{2}(B+C)=90^\circ$, so dass man bloss $\frac{1}{2}(B-C)$ zu berechnen hat (wobei $b > c$ vorausgesetzt werde.) Für $b=c$ ist auch $B=C$, also $B+C=2B$, $B-C=0$. Die erste Formel gibt in diesem Falle B. (§. 7 Formel (11)).

Ist $A=90^\circ$, so kann man immerhin in derselben Weise verfahren, oder auch die Formeln des §. 8 anwenden:

$$\cos a=\cos b\cos c,\ \operatorname{cotg}C=\sin b\operatorname{cotg}c,\ \operatorname{cotg}B=\sin c\operatorname{cotg}b.$$

Will man im allgemeinen Fall a direkt erhalten, so hat man nach (1):

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

Man bestimme nun α durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}b\cos A,\ \sin b\cos A=\cos b\operatorname{tg}\alpha,$$

so ist

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin c\cos b\operatorname{tg}\alpha=\frac{\cos b}{\cos\alpha}(\cos c\cos\alpha+\sin c\sin\alpha)$$
$$=\frac{\cos b\,.\cos(c-\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Man kann noch eine zweite Hilfsformel zur Bestimmung von a in folgender Weise aufstellen:

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$
$$=\cos b\cos c+\sin b\sin c(1-2\sin^2\tfrac{1}{2}A)\ \text{(erste Abthlg. §. 14)}$$
$$=\cos b\cos c+\sin b\sin c-2\sin b\sin c\sin^2\tfrac{1}{2}A$$
$$=\cos(b-c)-2\sin b\sin c\sin^2\tfrac{1}{2}A.$$

Also $$1-2\sin^2\tfrac{1}{2}a=1-2\sin^2\tfrac{1}{2}(b-c)-2\sin b\sin c\sin^2\tfrac{1}{2}A$$
$$\sin^2\tfrac{1}{2}a=\sin^2\tfrac{1}{2}(b-c)+\sin b\sin c\sin^2\tfrac{1}{2}A.$$

Man bestimme nun φ so, dass

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\frac{1}{2}A\sqrt{\sin b\sin c}}{\sin\frac{1}{2}(b-c)},\ \sin b\sin c\sin^2\tfrac{1}{2}A=\sin^2\tfrac{1}{2}(b-c)\operatorname{tg}^2\varphi,$$

so ist $\sin^2 \frac{1}{2} a = \sin^2 \frac{1}{2}(b-c)[1+tg^2 \varphi] = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(b-c)}{\cos^2 \varphi}$,

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \varphi},$$

wenn φ zwischen 0 und 180° gewählt ist, in welchem Falle $\cos \varphi$ und $\sin \frac{1}{2}(b-c)$ dasselbe Zeichen haben. Für $b = c$ wäre einfach $\sin^2 \frac{1}{2} a = \sin^2 b \sin^2 \frac{1}{2} A$; $\sin \frac{1}{2} a = \sin b \sin \frac{1}{2} A$, wie sich auch aus $\sin \frac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}(B-C)} \sin \frac{1}{2} A$ für $b = c$, also $B = C$ findet.

Auch die zwei Winkel B und C könnten vermittelst Hilfswinkel berechnet werden. Man hat nämlich nach (5):

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos A}{\sin A}, \operatorname{cotg} C = \frac{\operatorname{cotg} c \sin b - \cos b \cos A}{\sin A}.$$

Man bestimme nun β und γ (zwischen 0 und 180°) durch die Gleichungen:

$$tg \beta = \cos A . tg b, \quad tg \gamma = \cos A . tg c,$$

also $\operatorname{cotg} b = \cos A \operatorname{cotg} \beta$, $\operatorname{cotg} c = \cos A . \operatorname{cotg} \gamma$,

so erhält man

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\operatorname{cotg} A \sin(c-\beta)}{\sin \beta}, \operatorname{cotg} C = \frac{\operatorname{cotg} A \sin(b-\gamma)}{\sin \gamma}.$$

$b = 140° 7' 56''$, $c = 91° 47' 40''$, $A = 129° 57' 59''$, also $\frac{1}{2}(b+c) = 115° 57' 48''$, $\frac{1}{2}(b-c) = 24° 10' 8''$, $\frac{1}{2} A = 64° 58' 56{\cdot}5''$.

$\log \cos \frac{1}{2}(b-c) = 9{\cdot}9601579$	$\log \sin \frac{1}{2}(b-c) = 9{\cdot}6121772$
$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} A = 9{\cdot}6690051$	$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} A = 9.6690051$
$E \log \cos \frac{1}{2}(b+c) = 0{\cdot}3587273(-)$	$E \log \sin \frac{1}{2}(b+c) = 0{\cdot}0462042$
$\log tg \frac{1}{2}(B+C) = 9{\cdot}9878913(-)$	$\log tg \frac{1}{2}(B-C) = 9{\cdot}3273865$
$\frac{1}{2}(B+C) = 135° 47' 55{\cdot}2''$	$\frac{1}{2}(B-C) = 11° 59' 51{\cdot}5''$

$$\log tg \tfrac{1}{2}(b-c) = 9.6520192$$
$$\log \sin \tfrac{1}{2}(B+C) = 9{\cdot}8433460$$
$$E \log \sin \tfrac{1}{2}(B-C) = 0{\cdot}6822053$$
$$\log tg \tfrac{1}{2} a = 10{\cdot}1775705$$
$$\tfrac{1}{2} a = 56° 23' 59{\cdot}8''$$
$$a = 112° 47' 59{\cdot}6''$$

$$\tfrac{1}{2}(B+C) = 135° 47' 55.2''$$
$$\tfrac{1}{2}(B-C) = 11° 59' 51{\cdot}5''$$
$$\text{durch Addition: } B = 147° 47' 46{\cdot}7''$$
$$\text{durch Subtraktion: } C = 123° 48'\ 3{\cdot}7''$$

Zur Uebung mögen dienen:

$$\begin{cases} b=116^\circ 44' 49'', \; c=129^\circ 11' 40'', \; A=59^\circ 4' 25'', \\ B=94^\circ 23' 10'', \; C=120^\circ 4' 50'', \; a=50^\circ 12' 4''. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=129^\circ 57' 59'', \; c=87^\circ 51' 37'', \; A=88^\circ 12' 20'', \\ B=130^\circ 0' 0'', \; C=87^\circ 12' 28'', \; a=90^\circ. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=50^\circ 0' 0'', \; c=92^\circ 47' 32'', \; A=90^\circ, \\ B=50^\circ 2' 1'', \; C=92^\circ 8' 23'', \; a=91^\circ 47' 40''. \end{cases}$$

§. 12.

In einem sphärischen Dreiecke sind gegeben eine Seite a und die zwei an ihr liegenden Winkel B, C; man soll die übrigen Stücke berechnen.

Aus §. 6 hat man, wenn $B > C$:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b+c) = \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b-c) = \frac{\sin \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}(B+C)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a;$$

hieraus erhält man $\frac{1}{2}(b+c)$, $\frac{1}{2}(b-c)$, also b und c; der Winkel A ergibt sich dann nach (9) in §. 6; wenn man dort $\cos \frac{1}{2} A$, $\sin \frac{1}{2} A$ oder $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A$ bestimmt.

Man kann den fehlenden Winkel A übrigens auch direkt finden. Aus (7) folgt:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a;$$

man bestimme nun den Winkel φ so dass

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} B \cos a, \quad \sin B \cos a = \cos B \operatorname{tg} \varphi,$$

so ist

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin C \cos B \operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos B}{\cos \varphi}(\sin C \sin \varphi - \cos C \cos \varphi)$$
$$= -\frac{\cos B \cos(\varphi + C)}{\cos \varphi}.$$

Die Seiten b und c liessen sich ebenfalls in anderer Weise finden. Aus (5) folgt:

$$\operatorname{cotg} b = \frac{\cos a \cos C + \sin C \operatorname{cotg} B}{\sin a}, \quad \operatorname{cotg} c = \frac{\cos a \cos B + \sin B \operatorname{cotg} C}{\sin a};$$

man bestimme also die Winkel α, β der Art, dass

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{cotg} B}{\cos a}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{cotg} C}{\cos a},$$

so ist

$$\operatorname{cotg} b = \frac{\operatorname{cotg} a \cdot \cos(C-\alpha)}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cotg} c = \frac{\operatorname{cotg} a \cdot \cos(B-\beta)}{\cos \beta}.$$

Ist $a = 90^0$, so hat man nach §. 8 Nr. 4:

$$\cotg b = \sin C \cotg B,\ \cotg c = \sin B \cotg C,\ \cos A = -\cos B \cos C.$$

Für $B = C$ ist auch $b = c$ und also:

$$\tg b = \frac{\tg \frac{1}{2} a}{\cos B},$$

woraus b (und also auch c) folgt.

Da die Rechnung ganz der in §. 11 ähnlich ist, so mögen bloss Beispiele zur Uebung vorgelegt werden.

$$\begin{cases} a = 120^0 55' 35'',\ B = 63^0 15' 12'',\ C = 50^0 48' 20'', \\ A = 129^0 47' 56'',\ b = 85^0 36' 50'',\ c = 59^0 55' 10''. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 90^0,\ B = 143^0 33',\ C = 136^0 27' 30'', \\ A = 125^0 40',\ b = 133^0 0' 18'',\ c = 122^0 0' 43''. \end{cases}$$

§. 13.

In einem sphärischen Dreiecke sind zwei Seiten und ein Winkel gegeben, welch letzterer einer der gegebenen Seiten entgegensteht, also a, b, A; man soll die übrigen Stücke des Dreiecks daraus berechnen.

Man hat zunächst nach (3):

$$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B,\ \sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}.$$

Aus dieser Formel ergeben sich zwei Werthe von B, wovon der eine zwischen 0 und 90^0, der andere zwischen 90^0 und 180^0 liegt (vergl. erste Abthlg. §. 27). Wir müssen hiebei nun folgende drei Fälle unterscheiden:

I. $a + b < 180^0$, also auch $A + B < 180^0$. (§. 7.)

1) $A < 90^0$ $\begin{cases} a < b, \text{ also auch } A < B, \text{ mithin B spitz oder stumpf, (zweideutig)}, \\ a = b, \text{ also auch } A = B, \text{ mithin } B < 90^0, \text{ (unzweideutig)}, \\ a > b, \text{ „ „ } A > B, \text{ „ } B < 90^0, \text{ „} \end{cases}$

2) $A = 90^0$ $\begin{cases} a < b, \text{ also auch } A < B, \text{ ist unmögl., da sonst } A + B > 180^0, \\ a = b, \text{ „ „ } A = B, \text{ „ „ , „ „ } A + B = 180^0, \\ a > b, \text{ „ „ } A > B, \text{ mithin } B < 90^0 \text{ (unzweideutig)}. \end{cases}$

3) $A > 90^0$ $\begin{cases} a < b, \text{ also auch } A < B, \text{ ist unmögl., da sonst } A + B > 180^0, \\ a = b, \text{ „ „ } A = B, \text{ „ „ , „ „ } A + B > 180^0, \\ a > b, \text{ „ „ } A > B, \text{ also } B < 90^0 \text{ (unzweideutig)}. \end{cases}$

II. $a + b = 180^\circ$, also auch $A + B = 180^\circ$.

1) $A < 90^\circ$
- $a < b$, also auch $A < B$, also B nur stumpf, damit $A + B = 180^\circ$ (unzweideutig),
- $a = b$, also auch $A = B$, ist unmögl., da sonst $A + B < 180^\circ$,
- $a > b$, „ „ $A > B$, „ „ , „ „ $A + B < 180^\circ$.

2) $A = 90^\circ$
- $a < b$, also auch $A < B$, unmögl., da sonst $A + B > 180^\circ$,
- $a = b$, „ „ $A = B$, also $B = 90^\circ$ (unzweideutig),
- $a > b$, „ „ $A > B$, unmöglich, da sonst $A + B < 180^\circ$.

3) $A < 90^\circ$
- $a < b$, also auch $A < B$, unmöglich, da sonst $A + B > 180^\circ$,
- $a = b$, „ „ $A = B$, „ , „ „ $A + B > 180^\circ$,
- $a > b$, „ „ $A > B$, mithin B bloss $< 90^\circ$ (unzweidtg.).

III. $a + b > 180^\circ$, also auch $A + B > 180^\circ$.

1) $A < 90^\circ$
- $a < b$, also auch $A < B$, also $B > 90^\circ$ (unzweideutig),
- $a = b$, „ „ $A = B$, unmöglich, da sonst $A + B < 180^\circ$.
- $a > b$, „ „ $A > B$, „ , „ „ $A + B < 180^\circ$,

2) $A = 90^\circ$
- $a < b$, also auch $A < B$, $B > 90^\circ$ (unzweideutig),
- $a = b$, „ „ $A = B$, unmögl., da sonst $A + B = 180^\circ$.
- $a > b$, „ „ $A > B$, „ , „ „ $A + B < 180^\circ$,

3) $A > 90^\circ$
- $a < b$, also auch $A < B$; $B > 90^\circ$ (unzweideutig),
- $a = b$, „ „ $A = B$, $B > 90^\circ$ „
- $a > b$, „ „ $A > B$, B kann beide Werthe haben (zweideutig).

Mithin hat man zweideutige Fälle nur, wenn zugleich:
$a + b < 180^\circ$, $A < 90^\circ$, $a < b$; oder $a + b > 180^\circ$, $A > 90^\circ$, $a > b$.

In diesem Falle ist aber die Auflösung nothwendig zweifach. Aus

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$$

folgt für $A < 90^\circ$, $a < b$, $a + b < 180^\circ$, nothwendig ein spitzer Winkel B, der grösser ist als A, also ein stumpfer, kleiner als $180^\circ - A$, mithin beträgt der stumpfe Winkel B mit dem Winkel A noch nicht 180°.

Für $A > 90^\circ$, $a > b$, $a + b > 180^\circ$ folgt für B ein stumpfer Winkel, kleiner als A, also ein spitzer grösser als $180^\circ - A$, mithin beträgt der spitze Winkel B mit dem Winkel A mehr als 180°.

Natürlich kann es sich ereignen, dass bei beliebig gewählten Angaben ein Dreieck unmöglich wird (vergl. erste Abthlg. §. 27). Es wird diess geschehen, wenn $\sin B > 1$ ausfällt.

Hat man B berechnet, so kennt man jetzt in dem Dreiecke a, b, A, B und findet c, C aus den Formeln (10) des §. 6. Sind beide Werthe von B zulässig gewesen, so erhält man natürlich auch zwei Dreiecke zur Berechnung.

Sey z. B. $a = 37^\circ 48' 20''$, $b = 50^\circ 32' 40''$, $A = 40^\circ 36' 50''$.

$$\begin{aligned} \log\sin b &= 9{\cdot}8876835 \\ \log\sin A &= 9{\cdot}8135531 \\ E\log\sin a &= 0{\cdot}2125510 \\ \hline \log\sin B &= 9{\cdot}9137876 \end{aligned}$$

$$B = \begin{cases} 55^\circ 4' 47{\cdot}4'' \\ 124^\circ 55' 12{\cdot}6'' \end{cases}$$

Es gibt also in diesem Falle zwei Dreiecke, in denen a, b, A dieselben Werthe haben.

Für das erstere ist nun:

$\frac{1}{2}(b+a) = 44^\circ 10' 30''$, $\frac{1}{2}(b-a) = 6^\circ 22' 10''$, $\frac{1}{2}(B-A) = 7^\circ 13' 58{\cdot}7''$,
$\frac{1}{2}(B+A) = 47^\circ 50' 48{\cdot}7''$

$$\begin{aligned} \log\sin\tfrac{1}{2}(b+a) &= 9{\cdot}8431407 & \log\sin\tfrac{1}{2}(B-A) &= 9{\cdot}8700255 \\ \log tg\tfrac{1}{2}(B-A) &= 9{\cdot}1035098 & \log tg\tfrac{1}{2}(b-a) &= 9{\cdot}0477731 \\ E\log\sin\tfrac{1}{2}(b-a) &= 0{\cdot}9549159 & E\log\sin\tfrac{1}{2}(B-A) &= 0{\cdot}8999599 \\ \hline \log cotg\tfrac{1}{2}C &= 9{\cdot}9015664 & \log tg\tfrac{1}{2}c &= 9{\cdot}8177585 \\ \tfrac{1}{2}C &= 51^\circ 26' 17{\cdot}6'' & \tfrac{1}{2}c &= 33^\circ 18' 59{\cdot}7'' \\ C &= 102^\circ 52' 35{\cdot}2'' & c &= 66^\circ 37' 59{\cdot}5'' \end{aligned}$$

für das zweite ist:

$\frac{1}{2}(b+a) = 44^\circ 10' 30''$, $\frac{1}{2}(b-a) = 6^\circ 22' 10''$, $\frac{1}{2}(B-A) = 42^\circ 9' 11{\cdot}3''$,
$\frac{1}{2}(B+A) = 82^\circ 46' 1{\cdot}3''$

$$\begin{aligned} \log\sin\tfrac{1}{2}(b+a) &= 9{\cdot}8431407 & \log\cos\tfrac{1}{2}(B+A) &= 9{\cdot}1000400 \\ \log tg\tfrac{1}{2}(B-A) &= 9{\cdot}9567711 & \log tg\tfrac{1}{2}(b+a) &= 9{\cdot}9874915 \\ E\log\sin\tfrac{1}{2}(b-a) &= 0{\cdot}9549159 & E\log\cos\tfrac{1}{2}(B-A) &= 0{\cdot}1299746 \\ \hline \log cotg\tfrac{1}{2}C &= 10{\cdot}7548277 & \log tg\tfrac{1}{2}c &= 9{\cdot}2175061 \\ \tfrac{1}{2}C &= 9^\circ 58' 27'' & \tfrac{1}{2}c &= 9^\circ 22' 11{\cdot}5'' \\ C &= 19^\circ 56' 54'' & c &= 18^\circ 44' 23''. \end{aligned}$$

§. 14.

In einem sphärischen Dreieck sind gegeben eine Seite a, ein ihr anliegender Winkel B, und der ihr gegenüberstehende A; die übrigen Stücke desselben zu bestimmen.

Man hat

$$\sin A : \sin B = \sin a : \sin b,\ \sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}.$$

Hieraus folgen wieder zwei Werthe von b, und man muss, wie in §. 13 folgende Fälle unterscheiden:

I. $A + B < 180^\circ$, also auch $a + b < 180^\circ$. (§. 7.)

1) $a < 90^\circ$
- $A < B$, also auch $a < b$, mithin kann b beide Werthe haben (zweideutig),
- $A = B$, also auch $a = b$, mithin $b < 90^\circ$ (unzweideutig),
- $A > B$, „ „ $a > b$, „ $b < 90^\circ$ „

2) $a = 90^\circ$
- $A < B$, also auch $a < b$, unmöglich, da sonst $a + b > 180^\circ$,
- $A = B$, „ „ $a = b$, „ „ „ $a + b = 180^\circ$,
- $A > B$, „ „ $a > b$, $b < 90^\circ$ (unzweideutig).

3) $a > 90^\circ$
- $A < B$, „ „ $a < b$, unmöglich, da sonst $a + b > 180^\circ$,
- $A = B$, „ „ $a = b$, „ „ „ $a + b > 180^\circ$,
- $A > B$, „ „ $a > b$, $b < 90^\circ$ (unzweideutig).

II. $A + B = 180^\circ$, also auch $a + b = 180^\circ$.

1) $a < 90^\circ$
- $A < B$, also auch $a < b$, also $b > 90^\circ$, damit $a + b = 180^\circ$ (unzweideutig),
- $A = B$, also auch $a = b$, unmöglich, da sonst $a + b < 180^\circ$,
- $A > B$, „ „ $a > b$, „ „ „ $a + b < 180^\circ$,

2) $a = 90^\circ$
- $A < B$, „ „ $a < b$, „ „ „ $a + b > 180^\circ$,
- $A = B$, „ „ $a = b$, $b = 90^\circ$ (unzweideutig),
- $A > B$, „ „ $a > b$, unmöglich, da sonst $a + b < 180^\circ$,

3) $a > 90^\circ$
- $A < B$, „ „ $a < b$, „ „ „ $a + b > 180^\circ$,
- $A = B$, „ „ $a = b$, „ „ „ $a + b > 180^\circ$,
- $A > B$, „ „ $a > b$, $b < 90^\circ$ (unzweideutig).

III. $A + B > 180^\circ$, $a + b > 180^\circ$.

1) $a < 90^\circ$
- $A < B$, also auch $a < b$, $b > 90^\circ$, da sonst $a + b$ nicht $> 180^\circ$ (unzweideutig),
- $A = B$, also auch $a = b$, unmöglich, da sonst $a + b < 180^\circ$,
- $A > B$, „ „ $a > b$, „ „ „ $a + b < 180^\circ$,

2) $a = 90^\circ$
- $A < B$, also auch $a < b$, $b > 90^\circ$ (unzweideutig),
- $A = B$, „ „ $a = b$, unmöglich, da sonst $a + b = 180^\circ$,
- $A > B$, „ „ $a > b$, „ „ „ $a + b < 180^\circ$.

3) $a > 90^\circ$
- $A < B$, „ „ $a < b$, $b > 90^\circ$ (unzweideutig),
- $A = B$, „ „ $a = b$, $b > 90^\circ$ (unzweideutig),
- $A > B$, „ „ $a > b$, b kann beide Werthe haben (zweideutig).

Zweideutige Fälle treten also nur dann ein, wenn gleichzeitig: $A+B < 180^\circ$, $A < B$, $a < 90^\circ$; $A+B > 180^\circ$, $A > B$, $a > 90^\circ$.

Dass aber diese Fälle wirklich zweideutig sind, ergibt sich wie in §. 13.

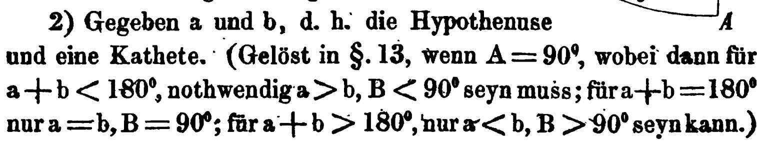
§. 15.

Die in den §§. 9—14 behandelten Fälle umfassen die vollständige Auflösung der sphärischen Dreiecke. Wir haben das rechtwinklige Dreieck keineswegs davon abgesondert, da dasselbe natürlich unter die allgemeine Regel fallen muss, wobei wir freilich meistens diesen besondern Fall noch besonders erörtert haben.

Will man die Fälle des rechtwinkligen Dreiecks speziell zusammengestellt sehen, so kann man sich folgende Tabelle machen:

Sey A der rechte Winkel, also a die Hypothenuse, b, c die Katheten, so hat man:

Fig. 56.



1) Gegeben b, c d. h. die beiden Katheten. (Allgemein gelöst in §. 11.)

$$\cos a = \cos b \cos c,\ \operatorname{cotg} C = \operatorname{cotg} c \sin b,$$
$$\operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \sin c.$$

2) Gegeben a und b, d. h. die Hypothenuse und eine Kathete. (Gelöst in §. 13, wenn $A = 90^\circ$, wobei dann für $a + b < 180^\circ$, nothwendig $a > b$, $B < 90^\circ$ seyn muss; für $a + b = 180^\circ$ nur $a = b$, $B = 90^\circ$; für $a + b > 180^\circ$, nur $a < b$, $B > 90^\circ$ seyn kann.)

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b},\ \cos C = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b,\ \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}.$$

$$(B \gtreqless 90^\circ, \text{ wenn } b \gtreqless 90^\circ, \text{ §. 8}).$$

3) Gegeben B, C d. h. die beiden andern Winkel. (Gelöst in §. 10).

$$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C,\ \cos c = \frac{\cos C}{\sin B},\ \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}.$$

4) Gegeben b, C, d. h. eine Kathete und der ihr anliegende Winkel. (Gelöst in §. 12.)

$$\cos B = \cos b \sin C,\ \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C},\ \operatorname{cotg} c = \frac{\operatorname{cotg} C}{\sin b}.$$

5) Gegeben a, B, d. h. die Hypothenuse und einer der an ihr liegenden Winkel. (Allgemein gelöst in §. 14, wo $A = 90^\circ$. Für $B < 90^\circ$, also $A + B < 180^\circ$, also $A > B$, ist dort, wenn $a < 90^\circ$,

auch $b < 90^\circ$; wenn $a = 90^\circ$, $b < 90^\circ$; wenn $a > 90^\circ$, $b < 90^\circ$. Für $B = 90^\circ$, also $A = B$ kann nur $a = b = 90^\circ$ seyn. Für $B > 90^\circ$, also $A + B > 180^\circ$, und $A < B$, ist wenn $a < 90^\circ$, $b > 90^\circ$; wenn $a = 90^\circ$, $b > 90^\circ$; wenn $a > 90^\circ$, $b > 90^\circ$).

$$\cot g\, C = \operatorname{tg} B \cos a,\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B,\ \sin b = \sin a \sin B.$$

$$(b \gtreqless 90^\circ, \text{ wenn } B \gtreqless 90^\circ).$$

6) Gegeben b, B d. h. eine Kathete und der ihr entgegenstehende Winkel. (Gelöst in §. 14, wenn man dort die Buchstaben a, b und A, B vertauscht. Da dann $A = 90^\circ$, also wenn $A + B < 180^\circ$ seyn soll, $B < 90^\circ$, mithin $B < A$, so wird, wenn $b < 90^\circ$, a zwei Werthe haben und b aber nur $< 90^\circ$ seyn dürfen; für $B = 90^\circ$, also $A + B = 180^\circ$, $B = A$, kann nur $b = a = 90^\circ$ seyn; für $B > 90^\circ$, also $A + B > 180^\circ$, $B > A$, kann nur $b > 90^\circ$ seyn, und a hat zwei Werthe).

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B},\ \cos C = \operatorname{tg} b \cot g\, a,\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B.$$

a ist absolut zweideutig, ausser wenn $b = B$.

Hat man ein wirkliches Dreieck vor sich, und will gewisse fehlende Stücke aus gewissen gemessenen berechnen, so wird diess natürlich nach dem Obigen keiner weitern Schwierigkeit unterliegen, und man wird auch von vorn herein versichert seyn, dass das so berechnete Dreieck wirklich bestehe. Denn die gemessenen Stücke sind — der Annahme nach — aus einem wirklichen Dreiecke entnommen und sind in genügender Zahl, um das Dreieck zu bestimmen; die berechneten Stücke sind aus Gleichungen gefunden worden, welche jedenfalls richtig sind, und denen die Stücke des vorhandenen Dreiecks genügen; man wird also natürlich nichts Anderes erhalten können, als eben diese wirklich bestehenden Stücke.

Da man in den Anwendungen es begreiflicher Weise nur mit wirklich bestehenden sphärischen Dreiecken zu thun haben kann, so versteht sich ganz von selbst, dass man die in diesem Abschnitte aus einander gesetzten Auflösungsmethoden ohne weitere Bedenklichkeit wird gebrauchen dürfen.

Wählt man jedoch die Angaben, nach denen gerechnet werden soll, beliebig, so muss man natürlich auf die Fundamentalbeziehungen achten, die wir früher aufgestellt haben. Sie sind:

1) In jedem sphärischen Dreiecke sind zwei Seiten zusammen grösser als die dritte. (§. 1. Nr. 1.)

2) Die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind zusammen kleiner als 360°. (§. 1. Nr. 4.)

3) Jede Seite eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als 180°.

4) In jedem sphärischen Dreiecke sind die drei Winkel zusammen grösser als 180°. (§. 1. Nr. 5.)

5) Dieselben drei Winkel sind aber zusammen kleiner als 540°. (§. 1. Nr. 3.)

6) Die Differenz zwischen der Summe zweier Winkel und dem dritten Winkel liegt zwischen — 180° und 180°. (§. 1. Nr. 5.)

7) Jeder Winkel eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als 180°.

8) Dem grössern Winkel eines sphärischen Dreiecks steht die grössere Seite; und der grössern Seite der grössere Winkel entgegen. (§. 7.)

9) Sind zwei Winkel eines spärischen Dreiecks zusammen grösser, oder gleich, oder kleiner als 180°, so ist die Summe der entgegenstehenden Seiten ebenfalls grösser, oder gleich, oder kleiner als 180°. (§. 7.)

10) Ist die Summe zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks grösser, oder gleich, oder kleiner als 180°, so ist die Summe der entgegenstehenden Winkel eben so beschaffen. (§. 7.)

11) Sind Seiten (Winkel) einander gleich, so sind es auch die entgegenstehenden Winkel (Seiten). Ein gleichseitiges sphärisches Dreieck ist also auch ein gleichwinkliges und umgekehrt. (§. 7.)

12) In einem rechtwinklig sphärischen Dreiecke werden jede Kathete und der ihr entgegenstehende Winkel zugleich grösser, oder gleich, oder kleiner als 90° seyn. (§. 8. Nr. 1.)

13) Hat ein sphärisches Dreieck zwei rechte Winkel, so sind auch die entgegenstehenden Seiten gleich 90°. (§. 8. Nr. 2.)

14) Hat ein sphärisches Dreieck eine Seite = 90°, so wird jede andere Seite und der ihr entgegenstehende Winkel zugleich grösser, oder gleich, oder kleiner als 90° seyn. (§. 8. Nr. 4.)

Diess sind die Beziehungen, die man im Auge haben muss, wenn man Angaben machen will, die wirklichen Dreiecken entsprechen. Verletzt man aber diese Beziehungen nicht, so kann man frei wählen. Also:

a) wenn man die drei Seiten eines Dreiecks beliebig wählt, so jedoch, dass die Sätze 1—3 nicht verletzt sind, so kann man daraus immer ein sphärisches Dreieck konstruiren, also auch berechnen. Seyen AOB, BOC, AOD drei Winkel, die den obigen Bedingungen entsprechen; man drehe nun BOC um OB, AOD um AO, so werden zwei Kegelflächen entstehen, die sich schneiden werden, so dass also die Durchschnittslinie die dritte Kante der zu bildenden Ecke ist, wenn OB, OA die zwei andern sind. Allerdings schneiden sich die zwei Kegelflächen zweimal, so dass zwei dreiseitige Ecken zu entstehen scheinen; da dieselben aber gleiche Kantenwinkel haben, so haben sie auch gleiche Flächenwinkel (§. 9), und sind also nicht verschieden, wenn sie gleich nicht zur Deckung gebracht werden können. Die Konstruktion der Ecke ist aber auch Konstruktion des Dreiecks.

Fig. 97.

b) Wählt man die Winkel beliebig, aber so, dass die Sätze 4—6 nicht verletzt sind, so kann man immer damit ein sphärisches Dreieck (körperliche Ecke) konstruiren.

Sind A, B C die drei Winkel; 180° — A, 180° — B, 180° — C ihre Ergänzungen zu 180°, so werden letztere drei als Seiten betrachtet, den Sätzen 1 —3 genügen (§. 1. Nr. 3, 5). Man kann also mit ihnen, als Seiten ein sphärisches Dreieck koustruiren; also gibt es ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel A, B, C sind (§. 1. Nr. 2).

c) Wählt man zwei Seiten so, dass der Satz 3 nicht verletzt ist, und einen Winkel so, dass der Satz 7 nicht verletzt ist, so kann man, wenn erstere zwei den letztern bilden sollen, damit immer ein Dreieck konstruiren.

Der Nachweis dieses Satzes ist höchst einfach. Wären in obiger Figur BOA, BOC die gegebenen Seiten, so drehe man BOC um BO, bis AOB und BOC mit einander den gegebenen Winkel machen; alsdann bildet OC in seiner neuen Lage die dritte Kante; AO, OB die beiden andern.

d) Wählt man zwei Winkel so, dass Satz 7, und eine Seite so, dass Satz 3 nicht verletzt ist, so kann man damit, wenn erstere an letzterer anliegen sollen, immer ein sphärisches Dreieck bilden.

Vermittelst des Satzes in §. 1. Nr. 2 wird diese Behauptung aus c) gerechtfertigt.

e) Wählt man zwei Seiten und einen Winkel, der der einen Seite entgegenstehen soll, ohne dass die Sätze 3, 7, 14 verletzt sind, so wird man damit höchstens zwei Dreiecke construiren können.

Seyen in obiger Figur AOB, BOC die zwei Seiten, der an OA liegende, also BOC entgegenstehende Winkel gegeben. Durch OA lege man eine Ebene, die mit AOB den gegebenen Winkel mache; um OB beschreibe man, indem man BOC um OB dreht, eine Kegelfläche, so wird dieselbe die fragliche, oberhalb der Papierebene (d. h. der Ebene BOA) befindliche Ebene entweder gar nicht schneiden, oder in einer Geraden, oder in zwei Geraden, oder in einer Geraden berühren; diese Geraden sind dann aber die dritte Kante. Also wird man entweder gar keine Ecke (sphärisches Dreieck), oder eine, oder zwei Ecken erhalten können.

f) Wählt man zwei Winkel und eine Seite, die einem Winkel entgegenstehen soll, ohne die Sätze 3, 7, 12 zu verletzen, so kann man damit höchstens zwei sphärische Dreiecke konstruiren. Die Rechtfertigung dieser Behauptung ergibt sich aus e) nach §. 1. Nr. 2.

Es ist nicht schwer zu übersehen, dass diese Konstruktionen auch unmittelbar auf die oben aufgestellten Sätze 1—14 führen würden; wir wollen uns jedoch, da diess für uns weniger von Interesse ist, dabei nicht aufhalten, indem wir dem Leser überlassen, sich den konstruktiven Beweis jener Sätze aus Obigem abzuleiten.

Dritter Abschnitt.

Berechnung der Fläche des sphärischen Dreiecks.

§. 16.

Wir haben seither den Halbmesser der Kugel nie beachtet, wie diess auch ganz in der Ordnung war, da die aufgestellten Beziehungen ja im Grunde doch nur Beziehungen zwischen Kanten und Flächenwinkeln dreiseitiger körperlicher Ecken sind. Wenn wir aber

von der Fläche eines sphärischen Dreiecks sprechen, so ist von vorn herein klar, dass es auf den Werth des Halbmessers hiebei wesentlich ankommt. Wir werden unter Fläche des sphärischen Dreiecks nun denjenigen Theil der Kugelfläche verstehen, der von den drei Bögen, welche das Dreieck bilden, und von denen jeder kleiner ist als der halbe Umfang des grössten Kreises der Kugel, umschlossen ist. Um dieselbe aber berechnen zu können, müssen wir zuerst auf einen stereometrischen Satz zurückkommen.

Es folgt ganz unmittelbar aus §. 9, dass wenn in zwei sphärischen Dreiecken die drei Seiten gegenseitig gleich sind, auch die diesen Seiten entgegenstehenden Winkel einander gleich seyn werden, so wie aus §. 10 der umgekehrte Satz sich ergibt. Die Gleichheit der Seiten (§. 1) zieht natürlich auch die Gleichheit der Bögen, welche das Dreieck bilden, nach sich. Zwei sphärische Dreiecke nun, deren Seiten und Winkel gegenseitig gleich sind, können eine solche Lage haben, dass sie einander decken können, oder auch nicht. Das Erstere ist leicht einzusehen; vom Letztern wird man sich die klarste Vorstellung machen, wenn man sich in die drei Eckpunkte eines sphärischen Dreiecks die drei Kugelhalbmesser gezogen denkt, diese dann rückwärts verlängert, bis sie die Kugel wieder treffen und durch die so erhaltenen Eckpunkte ein Dreieck legt. Das letztere hat mit dem erstern offenbar gleiche Seiten, wird aber mit demselben nicht zur Deckung gebracht werden können.

Zwei sphärische Dreiecke auf derselben Kugel, welche sich decken, haben natürlich gleiche Fläche; aber auch zwei Dreiecke, die sich nicht decken, wenn nur die Seiten beider gleich sind, haben ebenfalls gleiche Fläche. Dieser letzte Satz wird in folgender Weise bewiesen werden können.

Sey ABC ein sphärisches Dreieck, OA, OB, OC die drei vom Kugelmittelpunkt O aus gezogenen Halbmesser, welche, rückwärts verlängert, die Kugel wieder in A′ B′ C′ treffen. Das Kugeldreieck A′ B′ C′ hat nun mit ABC gleiche Seiten, kann aber nicht mit ihm zur Deckung gebracht werden. Denken wir uns die Sehnen AB, AC, BC, so wie A′B′, A′C′, B′C′ gezogen, so wird auch

$$\text{Sehne } AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C'$$

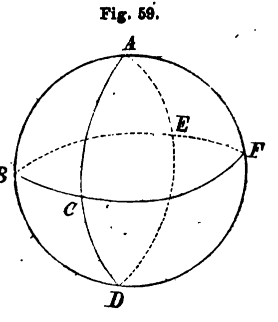
seyn, also werden die zwei um die (Sehnen-) Dreiecke ABC, A′B′C′ gezogenen Kreise gleiche Halbmesser haben (erste Abth. §. 28).

Diese Kreise liegen aber auf der Kugeloberfläche, indem sie nichts Anderes sind, als die Durchschnitte der Ebenen ABC, A'B'C' mit der Kugelfläche. Die von denselben umschlossenen Theile der Kugelfläche können aber, wie leicht ersichtlich, zur Deckung gebracht werden, sind folglich gleich gross. Zwischen den Bögen AB, AC, BC und dem um ABC beschriebenen kleinen Kreise der Kugel liegen zweieckige Flächenstücke, welche mit den entsprechenden zwischen A'B', A'C', B'C' und dem um A'B'C' beschriebenen kleinen Kugelkreise liegenden zur Deckung gebracht werden können. So z. B das zwischen AB und dem kleinen Kreisbogen AB liegende, mit dem zwischen A'B' und dem kleinen Kreisbogen A'B' liegenden. Zu dem Ende lege man nämlich A' auf B, B' auf A, also A'B' auf BA, was immer möglich ist, da AB = A'B'; alsdann wird der kleine Kreisbogen A'B' auf den kleinen Kreisbogen BA fallen, welche zwei ebenfalls gleich gross sind, so dass die Flächenstücke sich decken. Die genannten Flächenstücke sind also, ihrem Inhalte nach gleich gross, und da die ganzen von den kleinen Kreisen umspannten Kugelstücke es auch sind, so ergibt sich ganz unmittelbar die Gleichheit der Flächeninhalte der Dreiecke ABC und A'B'C'.

Fig. 58.

Seyen ferner ABD, ACD zwei Halbkreise grösster Kugelkreise, also A und D zwei Endpunkte desselben Durchmessers, so bildet die Figur ABDCA ein sphärisches Zweieck, und dessen Fläche ist offenbar in der Kugelfläche so enthalten, als der Winkel BAC in 360°. Bezeichnet man den Winkel BAC mit A, und drückt ihn in Graden aus, so hat man folglich, wenn r den Kugelhalbmesser bezeichnet:

Fig. 59.



$$\text{Zweieck ABDCA} = \frac{4\,r^2\pi\,.\,A}{360}.$$

Sey nun ABC ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten sämmtlich

zu ganzen Kreisen verlängert seyen, so werden diese Kreise sich in den Punkten D, E und F nochmals durchschneiden. Die von BCFEB umspannte Halbkugel, auf der A liegt, enthält die Dreiecke ABC, AEF, ACF, ABE. Nun ist aber leicht zu sehen, dass die Dreiecke BCD und AEF gleiche Fläche haben, indem E in demselben Durchmesser mit C, F in demselben mit B, A in demselben mit D liegt, was nach dem Obigen die Gleichheit der Flächen bedingt. Somit ist

$$ABC + AEF = \text{Zweieck } ABDCA = \frac{4 r^2 \pi A}{360}.$$

Ferner

$$ABC + BAE = \text{Zweieck } CBEAC = \frac{4 r^2 \pi . C}{360},$$

$$ABC + ACF = \text{Zweieck } ABCFA = \frac{4 r^2 \pi B}{360},$$

somit da

$$ABC + AEF + ACF + ABE = 2 r^2 \pi,$$

hat man, wenn man obige drei Gleichungen addirt:

$$2 ABC + 2 r^2 \pi = 4 r^2 \pi \left(\frac{A + B + C}{360}\right),$$

$$2 ABC = 4 r^2 \pi \left(\frac{A + B + C}{360} - \frac{1}{2}\right) = 4 r^2 \pi \left(\frac{A + B + C - 180}{360}\right)$$

$$ABC = 4 r^2 \pi \left(\frac{A + B + C - 180}{720}\right),$$

d. h. die Fläche des Dreiecks ABC verhält sich zur Kugelfläche, wie sich der Ueberschuss der drei Winkel des Dreiecks über 180° verhält zu 720°.

Diesen Ueberschuss pflegt man den sphärischen Exzess zu nennen und hat also, wenn er mit E bezeichnet wird:

$$\text{Fläche des Dreiecks} = \frac{r^2 \pi . E^0}{180} = \frac{r^2 \pi E'}{180.60} = \frac{r^2 \pi E''}{180.60.60},$$

je nachdem E in Graden, oder Minuten, oder Sekunden gegeben ist. Offenbar kann man kurzweg schreiben (erste Abthlg. §. 33):

$$\text{Fläche des Dreiecks} = r^2 \operatorname{arc} E. \quad (12)$$

Da man durch grösste Kreise ein jedes sphärische Vieleck in sphärische Dreiecke zerlegen kann, so ist es leicht, den Ausdruck für die Fläche desselben zu finden.

§. 17.

Wie aus der Formel (12) hervorgeht, handelt es sich, um die Fläche des Dreiecks bestimmen zu können, um die Berechnung des

sphärischen Exzesses. Wir wollen zu dem Ende einige Formeln aufstellen, welche dazu dienen können, E zu bestimmen. Gemäss §. 1 schwankt übrigens E zwischen 0 und 360°.

Man hat nun

$$A+B+C-180^0=E,\ A+B+C=180^0+E,\ \tfrac{1}{2}(A+B+C)=90^0+\frac{E}{2}.$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=-\sin\frac{E}{2},\ \sin\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\cos\frac{E}{2}.$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\sin\frac{E}{2}=-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=-\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C+\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$=-\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}+\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b).\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\ (\S.6)$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\left[\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}.2\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\ \text{(erste Abthlg. §. 14)}$$

$$=\frac{\sin C\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin a.\frac{1}{2}\sin b.\sin C}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\ \text{(eben daselbst)},$$

d. h. nach §. 4:

$$\sin\frac{E}{2}=\tfrac{1}{2}.\frac{\sqrt{\sin s.\sin(s-a)\sin(s-b).\sin(s-c)}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\quad(13)$$

ferner

$$\cos\frac{E}{2}=\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C+\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}+\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\ (\S.6)$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b).\sin s.\sin(s-c)+\cos\frac{1}{2}(a+b).\sin(s-a)\sin(s-b)}{\cos\frac{1}{2}c.\sin a\sin b}\ (\S.4)$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\left[\frac{1}{2}\cos c-\frac{1}{2}\cos(2s-c)\right]+\cos\frac{1}{2}(a+b)\left[\frac{1}{2}\cos(a-b)-\cos(2s-a-b)\right]}{\cos\frac{1}{2}c\sin a\sin b}$$

(erste Abthlg. §. 14 Formeln (24))

$$\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos c - \cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos(a+b) + \cos\tfrac{1}{2}(a+b).$$

$$= \frac{\cos(a-b) - \cos\frac{1}{2}(a+b)\cos c}{2\cos\frac{1}{2}c\sin a\sin b}$$

$$= \frac{\cos c[\cos\frac{1}{2}(a-b) - \cos\frac{1}{2}(a+b)] - \cos\frac{1}{2}(a-b)[2\cos^2\frac{1}{2}(a+b) - 1] + \cos\frac{1}{2}(a+b)[2\cos^2\frac{1}{2}(a-b) - 1] \quad \text{(erste Abthlg. §. 14 (23))}}{2\cos\frac{1}{2}c\sin a\sin b}$$

$$= \frac{2\cos c\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}b - 2\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a+b)[\cos\frac{1}{2}(a+b) - \cos\frac{1}{2}(a-b)] + \cos\frac{1}{2}(a-b) - \cos\frac{1}{2}(a+b)}{2\cos\frac{1}{2}c\sin a\sin b}$$

$$= \frac{2\cos c\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b + [\cos a + \cos b]\,.\,2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b + 2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{2\cos\frac{1}{2}c\,.\,2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\,.\,2\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b}$$

$$= \frac{\cos c + \cos a + \cos b + 1}{4\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}$$

oder wenn man $\cos c = 2\cos^2\frac{1}{2}c - 1$ u. s. w. setzt:

$$\cos\frac{E}{2} = \frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a + \cos^2\frac{1}{2}b + \cos^2\frac{1}{2}c - 1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}. \quad (14)$$

Nach §. 14 der ersten Abtheilung ist, wenn man die Formeln (13) und (14) beachtet:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}E = \frac{1 - \cos\frac{E}{2}}{\sin\frac{E}{2}} = \frac{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c - \cos^2\frac{1}{2}a - \cos^2\frac{1}{2}b - \cos^2\frac{1}{2}c + 1}{\sqrt{\sin s\,.\,\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}$$

$$= \frac{(1-\cos^2\frac{1}{2}a)(1-\cos^2\frac{1}{2}b) - (\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b - \cos\frac{1}{2}c)^2}{\sqrt{\sin s\,.\,\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b - (\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b - \cos\frac{1}{2}c)^2}{\sqrt{\sin s\,.\,\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}$$

$$= \frac{[\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b + \cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b - \cos\frac{1}{2}c][\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b - \cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \cos\frac{1}{2}c]}{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}} \quad (\text{da } M^2 - N^2 = (M+N)(M-N))$$

$$= \frac{[\cos\frac{1}{2}(a-b) - \cos\frac{1}{2}c][\cos\frac{1}{2}c - \cos\frac{1}{2}(a+b)]}{\sqrt{\sin s\,.\,\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{a-b+c}{4}\right)\sin\left(\frac{c+b-a}{4}\right)\,.\,2\sin\frac{a+b+c}{4}\,.\,\sin\left(\frac{a+b-c}{4}\right)}{\sqrt{\sin s\,.\,\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}$$

$$= 4\,\frac{\sin\left(\frac{s-b}{2}\right)\sin\left(\frac{s-a}{2}\right)\sin\frac{s}{2}\,.\,\sin\left(\frac{s-c}{2}\right)}{\sqrt{\sin s\,.\,\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}.$$

$$=4\sqrt{\frac{\sin^2\frac{s}{2}.\sin^2\frac{s-a}{2}.\sin^2\frac{s-b}{2}.\sin^2\frac{s-c}{2}}{16\sin\frac{s}{2}\cos\frac{s}{2}.\sin\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-a}{2}.\sin\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-b}{2}\sin\frac{s-c}{2}\cos\frac{s-c}{2}}}$$

d. h.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}. \quad (15)$$

(Ein anderer Beweis desselben Satzes befindet sich in Grunerts Archiv XX S. 358).

Man hat ferner:

$$\operatorname{cotg}\frac{E}{2}=-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B+C)=-\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)+\operatorname{tg}\frac{1}{2}C}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{tg}\frac{1}{2}C}\text{(erste Abth. §. 8)}$$

$$=-\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C+\cos\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(a+b)-\cos\frac{1}{2}(a-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}C\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C} \quad (§. 6)$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C+\cos\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C+\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C.\sin\frac{a}{2}.\sin\frac{b}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)+[\cos\frac{1}{2}(a+b)-\cos\frac{1}{2}(a-b)]\sin^2\frac{1}{2}C}{\sin C\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)-2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin^2\frac{1}{2}C}{\sin C\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin C\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}-\frac{2\sin^2\frac{1}{2}C}{\sin C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin C\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C.$$

Da auch

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin C\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\sin C\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}=\frac{\operatorname{cotg}\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{b}{2}}{\sin C}+\frac{1}{\sin C},$$

und

$$\frac{1}{\sin C}-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C=\frac{1}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}-\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{1-2\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos C}{\sin C}=\operatorname{cotg} C,$$

so hat man

$$\operatorname{cotg}\frac{E}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin C\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C=\frac{\operatorname{cotg}\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{b}{2}}{\sin C}+\operatorname{cotg} C. \quad (16)$$

Da endlich

$$A+B+C=180^0+E,\ A=180^0+E-(B+C),$$

so hat man

$$\cos A=\cos[180^0+E-(B+C)],$$

also (§. 12):

$$\cos[180^0+E-(B+C)]=-\frac{\cos B\cos(\varphi+C)}{\cos\varphi}, \quad (17)$$

wenn

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg} B\cos a$$

ist. Da $180^0+E-(B+C)$ zwischen 0 und 180^0 liegt, so bestimmt (17) diese Winkel. Uebrigens kann man auch schreiben:

$$\cos(B+C-E)=\frac{\cos B\cos(\varphi+C)}{\cos\varphi} \quad (17')$$

und es liegt $B+C-E$ zwischen 0 und 180^0.

Die Formeln (13), (14), (15) geben E aus den drei Seiten, und zwar (15) ganz unzweifelhaft, da $\frac{1}{4}E$ zwischen 0 und 90^0 liegt; die (14) dessgleichen, da $\frac{1}{2}E$ zwischen 0 und 180^0 liegt; die Formel (13) kann jedoch zwei Werthe von $\frac{1}{2}E$ geben, und wenn man sie anwenden will, muss man vorher wissen, ob $\frac{1}{2}E$ zwischen 0 und 90^0, oder zwischen 90^0 und 180^0 liegt. Die Formel (16) gibt $\frac{E}{2}$ unzweifelhaft aus zwei Seiten und dem von ihnen gebildeten Winkel, während (17′) E ebenfalls genau aus einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln gibt.

§. 18.

Wir wollen hier noch einige Aufgaben beifügen, deren Lösung sich aus dem Vorstehenden unmittelbar ergibt.

1) Man kennt die Fläche F eines sphärischen Dreiecks, so wie zwei seiner Winkel, das Dreieck soll bestimmt werden.

Sind B und C die gegebenen Winkel, r der Halbmesser der Kugel, C der dritte Winkel und E der sphärische Exzess, so ist

$$A+B+C=180^0+E,\ E=A+B+C-180^0,$$

also nach (12) in §. 16:

$$\text{arc}(A+B+C-180^0)=\frac{F}{r^2},$$

woraus in Sekunden:

$$A=180^0-(B+C)+\frac{F}{r^2}\frac{180.60.60}{\pi},$$

wenn auch $180^0-(B+C)$ in Sekunden gegeben wird. Jetzt kennt man A und kann nach §. 10 das Dreieck bestimmen.

2) Man kennt die Fläche F nebst zwei Seiten a, b; das Dreieck soll bestimmt werden.

Nach (12) ist

$$\text{arc}\,E=\frac{F}{r^2},$$

woraus E folgt. In (16) hat man nun:

$$\cotg\frac{E}{2}=\frac{\cotg\frac{a}{2}.\cotg\frac{b}{2}}{\sin C}+\cotg C,$$

woraus

$$\sin C\cotg\frac{E}{2}-\cos C=\cotg\frac{a}{2}\cotg\frac{b}{2}$$

$$\sin C\cos\frac{E}{2}-\cos C\sin\frac{E}{2}=\cotg\frac{a}{2}\cotg\frac{b}{2}.\sin\frac{E}{2},$$

$$\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)=\cotg\frac{a}{2}\cotg\frac{b}{2}\sin\frac{E}{2}.$$

Da nun $\frac{E}{2}<180^0$, so ist die zweite Seite dieser Gleichung positiv und also $C-\frac{E}{2}$ positiv und kleiner als 180^0. Dabei sind aber noch zwei Werthe von $C-\frac{E}{2}$ möglich, wovon der eine unter 90^0, der andere über 90^0 ist. Fällt dabei C noch unter 180^0 aus, so sind beide Werthe zulässig.

3) Man soll ein sphärisches Dreieck durch einen Bogen vom Punkte A aus halbiren.

Sey D der Punkt, in welchem der halbirende Bogen die Seite BC trifft; in dem Dreiecke ABD kennt man nun die Seite AB = c, den Winkel B und die Fläche F = der halben Fläche des Dreiecks ABC.

Ist also E der sphärische Exzess dieses Dreiecks, berechnet aus der Gleichung $\text{arc } E = \frac{F}{r^2}$, so hat man nach (16):

$$\text{cotg}\frac{E}{2} = \frac{\text{cotg}\frac{c}{2} \cdot \text{cotg}\frac{1}{2}BD}{\sin B} + \text{cotg} B,$$

$$\text{cotg}\frac{1}{2}BD = \frac{\text{cotg}\frac{E}{2} - \text{cotg} B}{\text{cotg}\frac{c}{2}} \sin B = \frac{\sin\left(B - \frac{E}{2}\right)\text{tg}\frac{c}{2}}{\sin\frac{E}{2}},$$

wodurch $\frac{1}{2}$ BD, also auch BD gefunden wird.

Vierter Abschnitt.

Vergleichung der sphärischen Dreiecke, deren Seiten klein sind im Verhältniss zum Halbmesser der Kugel, mit ebenen Dreiecken.

§. 19.

Wir wollen annehmen, die Grössen a. b, c bedeuten die Längen der Bögen BC, AC, AB, und es sey r der Halbmesser der Kugel, den wir so gross annehmen, dass die Quotienten $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ klein genug seyen, dass man ihre sechsten und höhern Potenzen vernachlässigen könne (wobei wir also alle diejenigen Grössen weglassen, die r^6 im Nenner haben, während der Zähler aus a, b, c besteht). Seyen ferner A, B, C die Winkel des sphärischen Dreiecks; A′, B′, C′ die Winkel eines ebenen Dreiecks, dessen Seiten gleich a, b, c seyen, F die Fläche dieses ebenen Dreiecks.

Fig. 60.

Unter all den gemachten Voraussetzungen hat man nach §. 16 der ersten Abtheilung in dem Ausdruck (§. 4)

$$\sin C = \frac{2\sqrt{\sin s \cdot \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin a \cdot \sin b}$$

zu setzen:

$$\sin s = \frac{s}{r} - \frac{1}{6}\left(\frac{s}{r}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{s}{r}\right)^5, \sin(s-a) = \frac{s-a}{r} - \frac{1}{6}\left(\frac{s-a}{r}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{s-a}{r}\right)^5, \ldots\ldots, \sin b = \frac{b}{r} - \frac{1}{6}\left(\frac{b}{r}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{b}{r}\right)^5,$$

und erhält:

$$\sin C = 2\frac{\sqrt{\frac{s}{r}\left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{s}{r}\right)^2+\frac{1}{120}\left(\frac{s}{r}\right)^4\right]\frac{s-a}{r}\left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{s-a}{r}\right)^2+\frac{1}{120}\left(\frac{s-a}{r}\right)^4\right]\frac{s-b}{r}\left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{s-b}{r}\right)^2+\frac{1}{120}\left(\frac{s-b}{r}\right)^4\right]\frac{s-c}{r}.\left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{s-c}{r}\right)^2+\frac{1}{120}\left(\frac{s-c}{r}\right)^4\right].}}{\frac{a}{r}\left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{1}{120}\left(\frac{a}{r}\right)^4\right]\frac{b}{r}\left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{b}{r}\right)^2+\frac{1}{120}\left(\frac{b}{r}\right)^4\right]}$$

Multiplizirt man und lässt Alles weg, was r^6 in den Nenner erhält, so hat man hieraus:

$$\sin C = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-b)}}{ab}.$$

$$\frac{\sqrt{1-\frac{s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2}{6r^2}+\frac{s^4+(s-a)^4+(s-b)^4+(s-c)^4}{120r^4}+\frac{s^2(s-a)^2+s^2(s-b)^2+s^2(s-c)^2+(s-a)^2(s-b)^2+(s-a)^2(s-c)^2+(s-b)^2(s-c)^2}{36r^4}}}{1-\frac{a^2+b^2}{6r^2}+\frac{a^4+b^4}{120r^4}+\frac{a^2b^2}{36r^4}}$$

$$=\frac{2F}{ab}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2}{6r^2}+\frac{s^4+(s-a)^4+(s-b)^4+(s-c)^4}{120r^4}+\frac{s^2(s-a)^2+s^2(s-b)^2+s^2(s-c)^2+(s-a)^2(s-b)^2+(s-a)^2(s-c)^2+(s-b)^2(s-c)^2}{36r^4}}}{1-\frac{a^2+b^2}{6r^2}+\frac{a^4+b^4}{120r^2}+\frac{a^2b^2}{36r^4}}$$

(erste Abthlg. §. 28). Nun ist im Allgemeinen:

$$\sqrt{1-\frac{\alpha}{r^2}+\frac{\beta}{r^4}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{r^2} + \frac{\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\alpha^2}{r^4}\text{*};$$

---

* Man findet dieses in folgender Weise. Sey

$$\sqrt{1-\frac{\alpha}{r^2}+\frac{\beta}{r^4}} = 1 + \frac{x}{r^2} + \frac{y}{r^4},$$

o hat man, wenn man quadrirt, und obige Einschränkung beachtet:

$$1-\frac{\alpha}{r^2}+\frac{\beta}{r^4} = 1 + \frac{2x}{r^2} + \frac{2y}{r^4} + \frac{x^2}{r^4},$$

demnach ist die obige Grösse unter dem Quadratwurzelzeichen gleich:

$$1-\frac{s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2}{12r^2}$$

$$+\frac{s^4+(s-a)^4+(s-b)^4+(s-c)^4}{240r^4}$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l}s^2(s-a)^2+s^2(s-b)^2+s^2(s-c)^2+(s-a)^2(s-b)^2\\+(s-a)^2(s-c)^2+(s-b)^2(s-c)^2\end{array}\right.}{72r^4}$$

$$-\frac{\left\{\begin{array}{l}s^4+(s-a)^4+(s-b)^4+(s-c)^4+2s^2(s-a)^2+2s^2(s-b)^2\\+2s^2(s-c)^2+2(s-a)^2(s-b)^2+2(s-a)^2(s-c)^2+2(s-b)^2(s-c)^2\end{array}\right.}{288r^4}$$

$$=1-\frac{s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2}{12r^2}$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l}s^4+(s-a)^4+(s-b)^4+(s-c)^4+10[s^2(s-a)^2+s^2(s-b)^2\\+s^2(s-c)^2+(s-a)^2(s-b)^2+(s-a)^2(s-c)^2+(s-b)^2(s-c)^2]\end{array}\right.}{1440r^4}$$

$$=1-\frac{s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2}{12r^2}$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l}[s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2]^2+8[s^2(s-a)^2+s^2(s-b)^2\\+s^2(s-c)^2+(s-a)^2(s-b)^2+(s-a)^2(s-c)^2+(s-b)^2(s-c)^2].\end{array}\right.}{1440r^4}$$

Nun ist

$$s=\tfrac{1}{2}(a+b+c),\ s-a=\tfrac{1}{2}(-a+b+c),\ s-b=\tfrac{1}{2}(a-b+c),$$
$$s-c=\tfrac{1}{2}(a+b-c);$$

hieraus folgt:

$$s^2+(s-a)^2+(s-b^2+(s-c)^2=a^2+b^2+c^2.$$

Ferner nach §. 23 der ersten Abtheilung:

$$s(s-a)=bc\cos^2\frac{A'}{2},\ s(s-b)=ac\cos^2\frac{B'}{2},\ s(s-c)=ab\cos^2\frac{C'}{2},$$

$$(s-a)(s-b)=ab\sin^2\frac{C'}{2},\ (s-a)(s-c)=ac\sin^2\frac{B'}{2},$$

$$(s-b)(s-c)=bc\sin^2\frac{A'}{2};$$

---

mithin: $2x=-\alpha,\ 2y+x^2=\beta,$

d. h. $x=-\tfrac{1}{2}\alpha,\ 2y=\beta-x^2=\beta-\tfrac{1}{4}\alpha^2,\ y=\tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{8}\alpha^2,$

welches die im Texte angegebenen Werthe sind.

hieraus:

$$s^2(s-a)^2+s^2(s-b)^2+s^2(s-c)^2+(s-a)^2(s-b)^2+(s-a)^2$$
$$(s-c)^2+(s-b)^2(s-c)^2 = b^2c^2\left[\cos^4\frac{A'}{2}+\sin^4\frac{A'}{2}\right]+$$
$$a^2c^2\left[\cos^4\frac{B'}{2}+\sin^4\frac{B'}{2}\right]+a^2b^2\left[\cos^4\frac{C'}{2}+\sin^4\frac{C'}{2}\right].$$

Nun ist (erste Abthlg. §. 14):

$$\cos^4\frac{A'}{2}+\sin^4\frac{A'}{2}=\left(\frac{1+\cos A'}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos A'}{2}\right)^2=\frac{1+\cos^2 A'}{2};$$

mithin letztere Grösse gleich

$$\frac{b^2c^2}{2}+\frac{a^2c^2}{2}+\frac{a^2b^2}{2}+\frac{b^2c^2\cos^2A'+a^2c^2\cos^2B'+a^2b^2\cos C'}{2}$$
$$=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{2}$$
$$+\frac{\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)^2+\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}{2} \text{ (erste Abth. §. 22.)}$$
$$=\frac{4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+3(a^4+b^4+c^4)-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{8}$$
$$=\frac{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+3(a^4+b^4+c^4)}{8}.$$

Die durch $1440r^4$ dividirte Grösse ist also:

$$(a^2+b^2+c^2)^2+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+3(a^4+b^4+c^4)$$
$$=4[a^4+b^4+c^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2],$$

mithin endlich:

$$\sin C=\frac{2F}{ab}\left\{\frac{1-\frac{a^2+b^2+c^2}{12r^2}+\frac{a^4+b^4+c^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{360r^4}}{1-\frac{a^2+b^2}{6r^2}+\frac{a^4+b^4}{120r^4}+\frac{a^2b^2}{36r^4}}\right\}.$$

Dividirt man mit dem Nenner noch in den Zähler und vernachlässigt wie oben, so erhält man:

$$\sin C=\frac{2F}{ab}\left[1+\frac{a^2+b^2-c^2}{12r^2}+\frac{3(a^4+b^4)+c^4+a^2b^2-4(a^2c^2+b^2c^2)}{360r^4}\right]^*$$

als Endwerth von sin C.

---

* Die Division von $1-\frac{\alpha}{r^2}+\frac{\beta}{r^4}$ durch $1-\frac{\alpha'}{r^2}+\frac{\beta'}{r^4}$ gibt: $1+\frac{\alpha'-\alpha}{r^2}$ $+\frac{\alpha'(\alpha'-\alpha)+\beta-\beta'}{r^4}$. Hier ist:

Nun ist (erste Abthlg. §. 28):

$$\frac{2F}{ab} = \sin C',$$

also hat man

$$\sin C = \sin C' + \frac{2F}{ab}\left[\frac{a^2+b^2-c^2}{12r^2}\right.$$
$$\left. + \frac{3(a^4+b^4)+c^4+a^2b^2-4(a^2c^2+b^2c^2)}{360r^4}\right],$$

$$\sin C - \sin C' = \frac{2F}{ab}\left[\frac{a^2+b^2-c^2}{12r^2} + \frac{3(a^4+b^4)+c^4+a^2b^2-4(a^2c^2+b^2c^2)}{360r^4}\right].$$

Daraus ergibt sich, dass C und C′ nicht viel verschieden sind.* Man wird also $C - C'$ als nur wenig Sekunden (in der Regel) betragend ansehen. Setzen wir demnach

$$C = C' + x, \quad \operatorname{arc} x = \frac{u}{r^2} + \frac{v}{r^4},$$

wo u und v zwei unbekannte Grössen sind. Diese Annahme ist nach dem Obenstehenden gerechtfertigt, und wird sich nochmals durch das Endresultat rechtfertigen. Es erfolgt aus dieser Annahme:

$$\operatorname{arc}^2 x = \frac{u^2}{r^4}, \quad \operatorname{arc}^3 x = 0, \quad \cos x = 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc}^2 x \ldots = 1 - \tfrac{1}{2}\frac{u^2}{r^4},$$

$$\alpha = \frac{a^2+b^2+c^2}{12}, \; \beta = \frac{a^4+b^4+c^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{360}, \; \alpha' = \frac{a^2+b^2}{6},$$

$$\beta' = \frac{a^4+b^4}{120} + \frac{a^2b^2}{36};$$

setzt man diese Werthe, so ist

$$\alpha' - \alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{12}, \; \alpha'(\alpha'-\alpha) = \frac{(a^2+b^2)^2-(a^2+b^2)c^2}{72},$$

$$\beta - \beta' = \frac{c^4 - 2(a^4+b^4) - 9a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{360},$$

$$\alpha'(\alpha'-\alpha)+\beta-\beta' = \frac{5(a^4+2a^2b^2+b^4)-5(a^2c^2+b^2c^2)+c^4-2(a^4+b^4) - 9a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{360}$$

$$= \frac{3(a^4+b^4)+c^4+a^2b^2-4(a^2c^2+b^2c^2)}{360}.$$

* Aus der ungefähren Gleichheit von sin C und sin C′ folgt allerdings nur, dass entweder $C = C'$ oder $C + C' = 180^0$; da man aber aus den Werthen von $\sin \frac{1}{2} C$ und $\sin \frac{1}{2} C'$ in §. 4 und §. 23 der ersten Abtheilung ebenfalls schliesst, dass ungefähr $\sin \frac{1}{2} C = \sin \frac{1}{2} C'$, so ist die oben angegebene Schlussweise gerechtfertigt.

$$\sin x = \operatorname{arc} x - \tfrac{1}{6}\operatorname{arc}^3 x \ldots = \frac{u}{r^2} + \frac{v}{r^4}$$

wenn man, wie immer, die Grössen mit r^6 im Nenner weglässt, mithin

$$\sin C = \sin(C' + x) = \sin C' \cos x + \cos C' \sin x = \sin C'\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{u^2}{r^4}\right]$$
$$+ \cos C' . \left(\frac{u}{r^2} + \frac{v}{r^4}\right),$$

d. h.

$$\sin C - \sin C' = -\frac{u^2}{2r^4}\sin C' + \cos C'\left(\frac{u}{r^2} + \frac{v}{r^4}\right)$$
$$= \frac{2F}{ab}\left[\frac{a^2+b^2-c^2}{12r^2} + \frac{3(a^4+b^4)+c^4+a^2b^2-4(a^2c^2+b^2c^2)}{360r^4}\right],$$

und also zur Bestimmung von u, v (wenn man die Grössen beiderseits gleichsetzt, die dieselbe Potenz von r im Nenner haben):

$$u\cos C' = \frac{2F}{ab}.\frac{a^2+b^2-c^2}{12}, \quad -\frac{u^2}{2}\sin C' + v\cos C'$$
$$= \frac{2F}{ab}.\frac{3(a^4+b^4)+c^4+a^2b^2-4(a^2c^2+b^2c^2)}{360},$$

d. h. da (erste Abthlg. §. 22) $a^2+b^2-c^2 = 2ab\cos C'$, also

$$\frac{2F}{ab}.\frac{a^2+b^2-c^2}{12} = \frac{F\cos C'}{3}:$$

$$u = \frac{F}{3}, \left(u^2 = \frac{F^2}{9}\right),$$

$$v\cos C' = \frac{2F}{ab}.\frac{3(a^4+b^4)+c^4+a^2b^2-4(a^2c^2+b^2c^2)}{360} + \frac{F^2}{18}\sin C'$$

d. h.

$$v\cos C' = \sin C'\left[\frac{3(a^4+b^4)+c^4+a^2b^2-4(a^2c^2+b^2c^2)+20F^2}{360}\right].$$

Aber (erste Abthlg. §. 28):

$$F^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$
$$= \frac{1}{16}(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4),$$

also

$$v\cos C' = \sin C'\left[\frac{7(a^4+b^4)-c^4+14a^2b^2-6(a^2c^2+b^2c^2)}{1440}\right]$$

$$= \sin C' \frac{(a^2+b^2-c^2)(7a^2+7b^2+c^2)}{1440}$$
$$= \frac{2ab\cos C' \sin C'(7a^2+7b^2+c^2)}{1440},$$
$$v = \frac{2ab\sin C'(7a^2+7b^2+c^2)}{1440} = \frac{4F(7a^2+7b^2+c^2)}{1440}$$
$$= \frac{F(7a^2+7b^2+c^2)}{360},$$

mithin
$$\operatorname{arc} x = \frac{F}{3r^2} + \frac{F(7a^2+7b^2+c^2)}{360r^4},$$

also wenn wieder $\frac{180.60.60}{\pi} = \varrho$, so hat man in Sekunden:
$$C - C' = \frac{F\varrho}{3r^2}\left[1 + \frac{7a^2+7b^2+c^2}{120r^2}\right],$$

d. h. man hat folgendes Gleichungssystem:
$$\left.\begin{aligned} A - A' &= \frac{F}{3r^2}\varrho\left[1 + \frac{7b^2+7c^2+a^2}{120r^2}\right],\\ B - B' &= \frac{F}{3r^2}\varrho\left[1 + \frac{7a^2+7c^2+b^2}{120r^2}\right],\\ C - C' &= \frac{F}{3r^2}\varrho\left[1 + \frac{7a^2+7b^2+c^2}{120r^2}\right].\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Addirt man diese Gleichungen, beachtet dass $A'+B'+C'=180^\circ$, $A+B+C=180^\circ+E$ (§. 16), so hat man in Sekunden:
$$E = \frac{F}{r^2}\varrho\left[1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{24r^2}\right]. \quad (19)$$

Würde man schon die mit r^4 dividirten Glieder vernachlässigen, so hätte man:
$$\left.\begin{aligned} E = \frac{F}{r^2}\varrho,\ A = A' + \tfrac{1}{3}E,\ B = B' + \tfrac{1}{3}E,\ C = C' + \tfrac{1}{3}E,\\ A' = A - \tfrac{1}{3}E,\ B' = B - \tfrac{1}{3}E,\ C' = C - \tfrac{1}{3}E,\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

d. h. unter dieser Voraussetzung wird das sphärische Dreieck wie ein ebenes angesehen, also auch berechnet werden können, wenn man zuerst jeden Winkel des sphärischen Dreiecks um den dritten Theil des sphärischen Exzesses vermindert.* Dieser Satz rührt von Legendre her und trägt seinen Namen.

---

* Genau gesprochen, heisst der Satz so: Wenn ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten klein sind im Verhältniss zum Halbmesser der Kugel, mit einem ebenen

Ist F_1 die Fläche des sphärischen Dreiecks, so ist nach §. 16. $F_1 = r^2 \operatorname{arc} E$, also

$$F_1 = F\left(1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{24 r^2}\right), \quad (21)$$

welche Formel denselben Grad der Genauigkeit hat, wie (20).

§. 20.

Der in den Formeln (20) ausgesprochene Legendre'sche Satz ist von der grössten Wichtigkeit für die Anwendungen. Er zeigt nämlich, wie man, statt ein sphärisches Dreieck zu berechnen, ein ebenes berechnen kann. Da nun in der Regel letztere Rechnung weit kürzer ist, so ist dadurch natürlich eine grosse Erleichterung für den Rechner erzielt.

Wir wollen nun die einzelnen Fälle, wie sie vorkommen können, betrachten, und dabei sogleich annehmen, dass a, b, c oder die Seiten des sphärischen Dreiecks, in Längenmass, natürlich demselben wie r oder der Kugelhalbmesser, gegeben seyen.

1) Kennt man die drei Seiten a, b, c des sphärischen Dreiecks, das wir natürlich von der hier betrachteten Beschaffenheit annehmen, so wird man zuerst F nach der Formel

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

berechnen; dann gibt (20) E in Sekunden; berechnet man (nach §. 26 der ersten Abthlg.) die drei Winkel A', B', C' des ebenen Dreiecks, in dem a, b, c die Seiten sind, so findet man die drei Winkel A, B, C des sphärischen Dreiecks ebenfalls nach (20).

2) Kennt man zwei Seiten a, b nebst dem Winkel C, den sie bilden, so wird man F nach der Formel (erste Abth. §. 28):

$$F = \tfrac{1}{2} a b \sin C'$$

zu berechnen haben, wobei freilich $C' = C - \frac{1}{3}E$ seyn soll; E kennt man aber nicht, soll es im Gegentheil erst finden. Setzt man aber nun

$$C' = C - \frac{F}{3r^2}\varrho,$$

so hat man

Dreiecke gleich lange Seiten hat, so sind die Winkel des ersten gleich den entsprechenden des zweiten, wenn jeder der letztern um den dritten Theil des sphärischen Exzesses vermehrt wird.

$$E = \frac{F}{r^2}\varrho = \frac{1}{2}\frac{ab\varrho}{r^2}\sin\left[C - \frac{F}{3r^2}\varrho\right] = \frac{1}{2}\frac{ab\varrho}{r^2}\left[\sin C . \cos\frac{F}{3r^2}\varrho - \cos C \sin\frac{F}{3r^2}\varrho\right].$$

Da man hier diejenigen Grössen vernachlässigt, welches r^4 im Nenner haben, so ist

$$\cos\frac{F}{3r^2}\varrho = 1,\ \sin\frac{F}{3r^2}\varrho = \frac{F}{3r^2},$$

also

$$E = \frac{1}{2}\frac{ab}{r^2}\left[\sin C - \cos C . \frac{F}{3r^2}\right]\varrho = \frac{1}{2}\frac{ab\sin C}{r^2}\varrho,$$

da $\frac{1}{2}\frac{ab\cos C . F}{3r^4}$ zu vernachlässigen ist. Somit berechnet man E nach der Formel

$$E = \frac{1}{2}\frac{ab\sin C}{r^2}\varrho,$$

berechnet ferner das ebene Dreieck, das die Seiten a, b, nebst dem von ihnen gebildeten Winkel $C - \frac{1}{3}E$ hat (erste Abthlg. §. 25); sind dann A', B' die zwei andern Winkel, c die dritte Seite; so ist auch c die dritte Seite des sphärischen Dreiecks, $A' + \frac{1}{3}E$, $B' + \frac{1}{3}E$ die zwei andern Winkel.

3) Man kennt eine Seite c nebst den zwei anliegenden Winkeln A und B. Alsdann ist (erste Abthlg. §. 28):

$$F = \frac{c^2 \sin A' \sin B'}{2\sin(A'+B')}.$$

Nun ist

$$A' = A - \frac{1}{3}E = A - \frac{F\varrho}{3r^2},\ B' = B - \frac{F\varrho}{3r^2},$$

also

$$\frac{\sin A' . \sin B'}{\sin(A'+B')} = \frac{\sin\left(A - \frac{F\varrho}{3r^2}\right) . \sin\left(B - \frac{F\varrho}{3r^2}\right)}{\sin\left(A + B - \frac{2F\varrho}{3r^2}\right)},$$

mithin

$$E = \frac{F}{r^2}\varrho = \frac{c^2}{2r^2}\varrho . \frac{\sin\left(A - \frac{F\varrho}{3r^2}\right)\sin\left(B - \frac{F\varrho}{3r^2}\right)}{\sin\left(A + B - \frac{2F\varrho}{3r^2}\right)}$$

$$=\frac{\varrho c^2}{2r^2}\cdot\frac{\left(\sin A-\cos A\cdot\frac{F}{3r^2}\right)\left(\sin B-\cos B\cdot\frac{F}{3r^2}\right)}{\sin(A+B)-\cos(A+B)\cdot\frac{2F}{3r^2}}$$

$$=\frac{\varrho c^2}{2r^2}\left[\frac{\sin A\sin B-\sin(A+B)\cdot\frac{F}{3r^2}}{\sin(A+B)-\cos(A+B)\cdot\frac{F}{3r^2}}\right]=\frac{\varrho c^2}{2r^2}\cdot\frac{\sin A\cdot\sin B}{\sin(A+B)},$$

wenn man die Division vollzieht und auf die seither festgehaltene Beschränkung achtet. Also wird man jetzt E nach der Formel

$$E=\frac{\varrho c^2}{2r^2}\cdot\frac{\sin A\cdot\sin B}{\sin(A+B)}$$

berechnen; dann ein ebenes Dreieck auflösen, in dem c eine Seite, $A-\frac{1}{3}E$, $B-\frac{1}{3}E$ die anliegenden Winkel sind, und so den dritten Winkel C', nebst den zwei andern Seiten a, b erhalten (erste Abthlg. §. 24); letztere sind die Längen der zwei fehlenden Seiten des sphärischen Dreiecks; der fehlende Winkel ist $C'+\frac{1}{3}E$.

4) In den Anwendungen liegt die Aufgabe durchweg so, dass man eine Seite c nebst den zwei anliegenden Winkeln wie in Nr. 3, oder nebst allen drei Winkeln A, B, C kennt. In letzterm Falle wird man übrigens den sphärischen Excess nicht geradezu aus der Gleichung $A+B+C-180^\circ=E$ ableiten könne, da A, B, C als aus der Beobachtung genommen, mit den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern (erste Abthlg. §. 45) behaftet sind. In diesem Falle wird man A, B, C zuerst auf 180° ausgleichen, d. h. wenn $A+B+C = 180^\circ+\alpha$, von A, B, C die Grösse $\frac{1}{3}\alpha$ abziehen, und nun mit diesen drei Winkeln und der Seite c nach §. 28 der ersten Abtheilung die Grösse F berechnen. Der sphärische Excess ergibt sich dann nach der Formel (20). Einer weitern Rechnung müssen dann allerdings noch ausgleichende Rechnungen vorausgehen, über die wir uns hier nicht weiter verbreiten können. (Vergl. §. 26.)

Fällt die nach den gegebenen Formeln berechnete Grösse E dermassen klein aus, dass sie nicht mehr beachtet werden kann, so ist das Dreieck geradezu als ein ebenes anzusehen.

Wir wollen nun an einem speziellen Falle zeigen, in wie weit man berechtigt ist, den Legendre'schen Satz anzuwenden. Aus Gleichung (16) in §. 17 folgt, dass für $C=90^\circ$, die Grösse E ihren

Maximumwerth erreicht; setzen wir also in Nr. 2; $C = 90^\circ$ und nehmen an, es sey

$$a = b = \frac{r\pi}{180},$$

d. h. die Seiten des sphärischen Dreiecks umfassen einen Grad (den 360. Theil des Umfangs des grössten Kreises).

Nach §. 11 hat man hier

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{cotg} 45^\circ}{\cos a} = \operatorname{tg} A,\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c = \operatorname{tg} a \cos B.$$

$$\begin{array}{rlrl} \log \operatorname{cotg} 45^\circ &= 10{\cdot}0000000000 & \log \operatorname{tg} 1^\circ &= 8{\cdot}2419214687 \\ \mathrm{E} \log \cos 1^\circ &= \underline{\ 0{\cdot}0000661502\ } & \log \cos B &= \underline{9{\cdot}8494519245} \\ \log \operatorname{tg} B &= 10{\cdot}0000661502 & \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c &= 8{\cdot}0913733932 \\ B = A &= 45^\circ 0' 15{\cdot}70879'' & \tfrac{1}{2} c &= 0^\circ 42' 25{\cdot}51979'' \\ & & c &= 1^\circ 24' 51{\cdot}03958'' \end{array}$$

Nach §. 20 der ersten Abtheilung und dem Vorstehenden ist nun:

$$E = \tfrac{1}{2} \frac{a b \sin C}{r^2} \varrho = \frac{a b \varrho}{2 r^2},$$

d. h.

$$E = \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \frac{\varrho}{2} = \frac{180.60.60.}{2\pi} \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = \frac{60.60.\pi}{360} = 10\pi = 31{\cdot}41593''$$

also hätte man $\frac{1}{3} E = 10{\cdot}47197''$ mithin ein Dreieck zu berechnen, für welches

$$a = \frac{\pi r}{180} = b,\ C' = 89^\circ 59' 49{\cdot}52802''.$$

Da nun $A' = B'$, so ist $A' = B' = 90^\circ - \tfrac{1}{2} C' = 45^\circ 0' 5{\cdot}23598''$; ferner (erste Abth. §. 21):

$$c = 2 a \sin \tfrac{1}{2} C' = \frac{r\pi}{90} \sin 44^\circ 59' 54{\cdot}76401''$$

$$\begin{array}{rl} \log \pi &= 0{\cdot}497\,1498\,726 \\ \log \sin \tfrac{1}{2} C' &= 9{\cdot}849\,4739\,774 \\ \mathrm{E} \log 90 &= \underline{8{\cdot}045\,7574\,905} \\ \log \frac{c}{r} &= 8{\cdot}392\,3813\,405 - 10 \end{array}$$

Also muss jetzt

$$A = A' + \tfrac{1}{3} E = 45^\circ 0' 15{\cdot}70795'' = B$$

seyn. Man sieht zunächst, dass A und B die obigen Werthe haben, wenigstens bis auf $0{\cdot}001''$. Was den obigen Werth von c an-

belangt, so wird er in Winkelmass (c'') leicht erhalten werden vermittelst der Proportion:

$$r\pi : 180.60.60 = c : c'',\ c'' = \frac{c}{r} . \frac{180.60.60}{\pi}.$$

$$\log \frac{c}{r} = 8{\cdot}392\,3813\,405$$
$$\log 180 = 2{\cdot}255\,2725\,051$$
$$\log 3600 = 3{\cdot}556\,3025\,008$$
$$\text{E} \log \pi = 9{\cdot}502\,8501\,273$$
$$\overline{3{\cdot}706\,8064\,737}$$
$$c'' = 5091{\cdot}03958'' = 1^0\,24'\,51{\cdot}03958'',$$

so dass, wie man sieht, beide Werthe vollkommen zusammenstimmen. Ein Grad beträgt auf der Erde ungefähr 15 Meilen; sind also die Seiten von Dreiecken auf der Erde von dieser Länge, so kann man ohne irgend ein Bedenken den Legendre'schen Satz anwenden.

§. 21.

Es gibt noch einige in der Praxis häufig vorkommende Fälle, in denen durch annähernde Rechnung in ziemlich einfacher Weise das gesuchte Resultat erhalten werden kann. Wir wollen von diesen jedoch nur die zwei folgenden besonders untersuchen.

1) Gesetzt die Seiten a, b (in dem Sinne des §. 1) eines sphärischen Dreiecks seyen nahezu $= 90^0$, so wird in den Formeln (2) die Grösse $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ nahezu $= 90^0 + \frac{1}{2} c$, $s - c$ also nahezu $90^0 - \frac{1}{2} c$; $s - a$ und $s - b$ nahezu $\frac{1}{2} c$ seyn, mithin $\sin s$, $\sin(s - c)$ $\sin(s - a)$, $\sin(s - b)$ nahezu $\cos \frac{1}{2} c$ und $\sin \frac{1}{2} c$. Die Formeln (2) werden nun den Winkel C allerdings immer geben, allein da auch sin a und sin b nahezu 1 sind, so wird man ungefähr $\sin \frac{1}{2} C = \sin \frac{1}{2} c$, also ungefähr $C = c$ haben. Eben desshalb lässt sich für diesen Fall eine Formel aufstellen, vermittelst der man C leicht aus a, b, c erhält.

Sey nämlich

$$a = 90^0 - \alpha,\ b = 90^0 - \beta,\ C = c + x,$$

wo nun x so klein sey, dass man $\text{arc}^2 x$ vernachlässigen könne. Alsdann ist:

$$\cos a = \sin \alpha,\ \cos b = \sin \beta,\ \sin a = \cos \alpha,\ \sin b = \cos \beta,$$

und da auch α und β nur klein sind:

$\cos a = \operatorname{arc}\alpha, \cos b = \operatorname{arc}\beta, \sin a = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{arc}^2\alpha, \sin b = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{arc}^2\beta,$
wo man also erst $\operatorname{arc}^3\alpha$, $\operatorname{arc}^3\beta$ nicht mehr beachtet. Nach §. 3 ist nun:

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

d. h. das $C = c + x$:

$$\cos c \cos x - \sin c \sin x = \frac{\cos c - \operatorname{arc}\alpha \operatorname{arc}\beta}{1 - \frac{1}{2}(\operatorname{arc}^2\alpha + \operatorname{arc}^2\beta)},$$

wenn man die über die zweite hinaus gehenden Potenzen von $\operatorname{arc}\alpha$, $\operatorname{arc}\beta$ vernachlässigt. Setzt man also $\cos x = 1$, $\sin x = \operatorname{arc} x$, so ist

$$\cos c - \sin c \operatorname{arc} x = \frac{\cos c - \operatorname{arc}\alpha \,.\, \operatorname{arc}\beta}{1 - \frac{1}{2}(\operatorname{arc}^2\alpha + \operatorname{arc}^2\beta)}$$
$$= \frac{[\cos c - \operatorname{arc}\alpha \,.\, \operatorname{arc}\beta][1 + \frac{1}{2}(\operatorname{arc}^2\alpha + \operatorname{arc}^2\beta)]}{[1 - \frac{1}{2}(\operatorname{arc}^2\alpha + \operatorname{arc}^2\beta)][1 + \frac{1}{2}(\operatorname{arc}^2\alpha + \operatorname{arc}^2\beta)]}$$
$$= \cos c - \operatorname{arc}\alpha \,.\, \operatorname{arc}\beta + \frac{1}{2}\cos c(\operatorname{arc}^2\alpha + \operatorname{arc}^2\beta),$$

welchen Werth man durch Division ebenfalls erhalten hätte. Daraus folgt offenbar

$$- \sin c \operatorname{arc} x = - \operatorname{arc}\alpha \operatorname{arc}\beta + \frac{1}{2}\cos c(\operatorname{arc}^2\alpha + \operatorname{arc}^2\beta)$$
$$= - \operatorname{arc}\alpha \,.\, \operatorname{arc}\beta(\cos^2\tfrac{1}{2}c + \sin^2\tfrac{1}{2}c) + \tfrac{1}{2}(\cos^2\tfrac{1}{2}c - \sin^2\tfrac{1}{2}c)(\operatorname{arc}^2\alpha + \operatorname{arc}^2\beta)$$
$$= -2\left(\frac{\operatorname{arc}\alpha + \operatorname{arc}\beta}{2}\right)^2 \sin^2\tfrac{1}{2}c + 2\left(\frac{\operatorname{arc}\alpha - \operatorname{arc}\beta}{2}\right)^2 \cos^2\tfrac{1}{2}c,$$

also da $\sin c = 2 \sin\frac{1}{2}c \cos\frac{1}{2}c$:

$$\operatorname{arc} x = \left(\frac{\operatorname{arc}\alpha + \operatorname{arc}\beta}{2}\right)^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c - \left(\frac{\operatorname{arc}\alpha - \operatorname{arc}\beta}{2}\right)^2 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}c.$$

Da hieraus folgt, dass $\operatorname{arc}^2 x$ schon die vierten Potenzen von $\operatorname{arc}\alpha, \ldots$ enthält, so ist dieser Werth von $\operatorname{arc} x$ genau genug. Werden α und β in Sekunden gegeben und bedeutet ϱ wie immer die Zahl $\frac{180 \,.\, 60 \,.\, 60}{\pi}$, so ist also in Sekunden $\left(\text{da } \operatorname{arc} x = \frac{x}{\varrho},\ \operatorname{arc}\alpha = \frac{\alpha}{\varrho},\ \operatorname{arc}\beta = \frac{\beta}{\varrho}\right)$:

$$C = c + x,\quad x = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c - \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}c. \qquad \text{(a)}$$

Setzt man umgekehrt

$$c = C + z$$

so ist klar, dass $z = -x$, und wenn man in der Formel (a) statt c setzt C, so wird man keinen merklichen Fehler begehen, indem die

neben tg $\frac{1}{2}$ c, cotg $\frac{1}{2}$ c stehenden Faktoren selbst klein sind. Also hat man:

$$c = C + z,\ z = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C - \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C. \quad \text{(b)}$$

Wären a, b etwas weniges grösser als 90°, so wären α und β negativ.

2) In einem sphärischen Dreiecke seyen zwei Seiten a und b, nebst dem von ihnen gebildeten Winkel C gegeben; die Seite a aber sey sehr klein im Verhältniss zur Seite b.

Angenommen man könne die vierte Potenz von arc a vernachlässigen, so hat man also (erste Abthlg. §. 16):

$$\cos a = 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc}^2 a,\ \sin a = \operatorname{arc} a - \tfrac{1}{6}\operatorname{arc}^3 a,$$

mithin nach §. 3:

$$\cos c = \cos b\,[1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc}^2 a] + \sin b \cos C\,[\operatorname{arc} a - \tfrac{1}{6}\operatorname{arc}^3 a]$$
$$= \cos b + \sin b \cos C \operatorname{arc} a - \tfrac{1}{2}\cos b \operatorname{arc}^2 a - \tfrac{1}{6}\sin b \cos C \operatorname{arc}^3 a.$$

Daraus folgt also, dass c und b nicht sehr verschieden seyn können; man setze also

$$c = b + x,$$

so ist

$$\cos(b + x) = \cos b + \sin b \cos C \operatorname{arc} a - \tfrac{1}{2}\cos b \operatorname{arc}^2 a -$$
$$\tfrac{1}{6}\sin b \cos C \operatorname{arc}^3 a, \quad \text{(n)}$$

d. h.

$$\cos b \cos x - \sin b \sin x = \cos b + \sin b \cos C \operatorname{arc} a - \tfrac{1}{2}\cos b \operatorname{arc}^2 a -$$
$$\tfrac{1}{6}\sin b \cos C \operatorname{arc}^3 a.$$

Würde man schon $\operatorname{arc}^2 a$ vernachlässigen, so musste man offenbar auch $\operatorname{arc}^2 x$ vernachlässigen; unter dieser Voraussetzung hat man dann:

$$\cos b - \sin b \operatorname{arc} x = \cos b + \sin b \cos C \operatorname{arc} a,$$
$$-\sin b \operatorname{arc} x = \sin b \cos C \operatorname{arc} a,\ -\operatorname{arc} x = \cos C \,.\, \operatorname{arc} a,\ x = -a \,.\, \cos C,$$

als ersten Näherungswerth von x. Einen genauern Werth von x erhält man dadurch, dass man setzt

$$\operatorname{arc} x = -\operatorname{arc} a \,.\, \cos C + \operatorname{arc} y,$$

wo aber arc y von der Art der Grössen $\operatorname{arc}^2 a$ ist. Vernachlässigt man nun noch $\operatorname{arc}^3 a$, so ist

$$\operatorname{arc}^2 x = \operatorname{arc}^2 a \cos^2 C,\ \operatorname{arc}^3 x = 0, \ldots$$

also jetzt $\cos x = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{arc}^2 x = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{arc}^2 a \cos^2 C$, $\sin x = \operatorname{arc} x$ $= -\operatorname{arc} a \cos C + \operatorname{arc} y$, mithin

$$\cos(b+x) = \cos b\,(1-\tfrac{1}{2}\operatorname{arc}^2 a\cos^2 C) - \sin b\,[-\operatorname{arc} a\cos C + \operatorname{arc} y]$$
$$= \cos b - \tfrac{1}{2}\cos b\cos^2 C\operatorname{arc}^2 a + \sin b\operatorname{arc} a\cos C - \sin b\operatorname{arc} y,$$

mithin, wenn man diesen Werth von $\cos(b+x)$ in die Gleichung (n) einsetzt:

$$\cos b - \tfrac{1}{2}\cos b\cos^2 C\operatorname{arc}^2 a + \sin b\operatorname{arc} a\cos C - \sin b\operatorname{arc} y = \cos b + \sin b\cos C\operatorname{arc} a - \tfrac{1}{2}\cos b\operatorname{arc}^2 a,$$

$$-\sin b\operatorname{arc} y = -\tfrac{1}{2}\cos b\operatorname{arc}^2 a + \tfrac{1}{2}\cos b\cos^2 C\operatorname{arc}^2 a = -\tfrac{1}{2}\cos b\sin^2 C\operatorname{arc}^2 a,$$

$$\operatorname{arc} y = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg} b\sin^2 C\operatorname{arc}^2 a,\quad y = \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{\varrho}\operatorname{cotg} b\sin^2 C.$$

Einen weiter genäherten Werth erhält man endlich, wenn man

$$\operatorname{arc} x = -\operatorname{arc} a\cos C + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg} b\sin^2 C\operatorname{arc}^2 a + \operatorname{arc} z$$

setzt, wo $\operatorname{arc} z$ von der Art der Grössen $\operatorname{arc}^3 a$ ist. Alsdann ist, wenn man $\operatorname{arc}^4 a$ vernachlässigt:

$$\operatorname{arc}^2 x = \operatorname{arc}^2 a\cos^2 C - \operatorname{cotg} b\sin^2 C\cos C\operatorname{arc}^3 a,\quad \operatorname{arc}^3 x = -\operatorname{arc}^3 a\cos^3 C,$$

also jetzt

$$\cos(b+x) = \cos b\,[1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc}^2 a\cos^2 C + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg} b\sin^2 C\cos C\operatorname{arc}^3 a]$$
$$- \sin b\,[-\operatorname{arc} a\cos C + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg} b\sin^2 C\operatorname{arc}^2 a + \operatorname{arc} z + \tfrac{1}{6}\operatorname{arc}^3 a\cos^3 C].$$

Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung (n) ein, so ist, wenn man nach den Potenzen von $\operatorname{arc} a$ ordnet:

$$\cos b + \sin b\cos C\operatorname{arc} a - \tfrac{1}{2}\cos b\cos^2 C\operatorname{arc}^2 a - \tfrac{1}{2}\cos b\sin^2 C\operatorname{arc}^2 a$$
$$+ \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg} b\cos b\sin^2 C\cos C\operatorname{arc}^3 a - \tfrac{1}{6}\sin b\cos^3 C\operatorname{arc}^3 a - \sin b\operatorname{arc} z$$
$$= \cos b + \sin b\cos C\operatorname{arc} a - \tfrac{1}{2}\cos b\operatorname{arc}^2 a - \tfrac{1}{6}\sin b\cos C\operatorname{arc}^3 a,$$

woraus:

$$-\sin b\operatorname{arc} z = -\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg} b\cos b\sin^2 C\cos C\operatorname{arc}^3 a - \tfrac{1}{6}\sin b\cos C(1-\cos^2 C)\operatorname{arc}^3 a,$$

$$\operatorname{arc} z = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 b\sin^2 C\cos C\operatorname{arc}^3 a + \tfrac{1}{6}\cos C\sin^2 C\operatorname{arc}^3 a,$$

d. h. da $\operatorname{arc} z = \frac{z}{\varrho}$, $\operatorname{arc} a = \frac{a}{\varrho}$:

$$z = \tfrac{1}{2}\sin^2 C\cos C\frac{a^3}{\varrho^2}(\operatorname{cotg}^2 b + \tfrac{1}{3}),$$

also mit grosser Genauigkeit:

$$c = b + x,\quad x = -a\cos C + \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{\varrho}\operatorname{cotg} b\sin^2 C + \tfrac{1}{2}\frac{a^3}{\varrho^2}\sin^2 C\cos C(\operatorname{cotg}^2 b + \tfrac{1}{3}),\quad (c)$$

worin a und x in Sekunden gegeben sind, $\varrho = \frac{180.60.60}{\pi}$ ist. ($\log \varrho = 5{\cdot}3144251332.$)

Könnte man $\frac{a^3}{\varrho^2}$ vernachlässigen, so hätte man einfacher:

$$x = -a\cos C + \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{\varrho}\cot g\, b \sin^2 C. \quad (c')$$

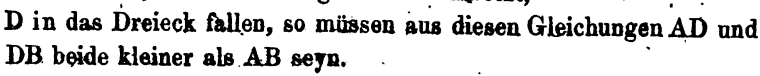
Fünfter Abschnitt.

Geometrische, praktische und astronomische Aufgaben.

§. 22.

Wir wollen in diesem Abschnitte eine Reihe von Aufgaben lösen, die wir, wie die Ueberschrift sagt, aus dem rein geometrischen Gebiete, dem der praktischen Feldmesskunst und dem der Astronomie entlehnen. Dabei gilt aber dieselbe Bemerkung, die dem entsprechenden sechsten Abschnitt der ersten Abtheilung vorgeschickt wurde.

1) Man soll von dem Eckpunkte C aus auf die Seite AB einen senkrechten Bogen CD ziehen. Sey D der Fusspunkt des Perpendikels CD, so hat man in den rechtwinkligen Dreiecken DAC und CDB (§. 8):



$\operatorname{tg} AD = \operatorname{tg} AC \cdot \cos A,\ \operatorname{tg} DB = \operatorname{tg} BC \cdot \cos B.$

Soll nun, wie unsere Figur es voraussetzt, D in das Dreieck fallen, so müssen aus diesen Gleichungen AD und DB beide kleiner als AB seyn.

Es lässt sich aber leicht zum Voraus entscheiden, ob CD in das Dreieck ACB fallen kann oder nicht. Die Seite DC ist nämlich entweder kleiner oder grösser als 90°; fällt nun CD in das Dreieck und ist die Seite kleiner als 90°, so müssen auch die Winkel A und B des sphärischen Dreiecks kleiner als 90° seyn (§. 8. Nr. 1); ist dagegen CD > 90°, so müssen auch A und B grösser als

90° seyn; wäre $CD = 90^\circ$, so wären auch A und $B = 90^\circ$, oder aber es fiele CD entweder mit AC zusammen, wenn bloss $A = 90^\circ$, oder mit CB, wenn bloss $B = 90^\circ$. Daraus folgt also jedenfalls, dass wenn die zwei Winkel A und B nicht beide kleiner, oder beide grösser als 90° sind, die Senkrechte CD keineswegs in das Dreieck fällt. Sind aber beide in dem angeführten Falle, so wird CD nothwendig in das Dreieck fallen. Denn wäre dann CE die Senkrechte, so müssten die Winkel CAE, CBE beide spitz, oder beide stumpf seyn, was nicht der Fall ist, wenn CAB und CBA beide spitz oder beide stumpf sind. Von einem Punkte C aus lassen sich, im Falle das Perpendikel nicht in das Dreieck fällt, aber im Allgemeinen zwei Perpendikel auf die Verlängerungen von AB ziehen, welche mit einander einen grössten Halbkreis bilden; davon liegt dasjenige von ihnen, das $< 90^\circ$, auf demjenigen Theile der Verlängerung von AB, der vom stumpfen Winkel des Dreiecks ausgeht, das andere auf dem andern Theile.

Die Länge des Perpendikels ergibt sich aus der Gleichung:

$$\sin CD = \sin AC \,.\, \sin A,$$

und CD ist spitz, wenn A und B es sind; stumpf, wenn A und B stumpf sind; in diesen beiden Fällen fällt CD in das Dreieck ABC. Sind A und B nicht gleicher Art, so kann man beide Werthe von CD, die aus obiger Gleichung folgen, beibehalten; das Perpendikel (die Perpendikel) fällt dann ausserhalb des Dreiecks.

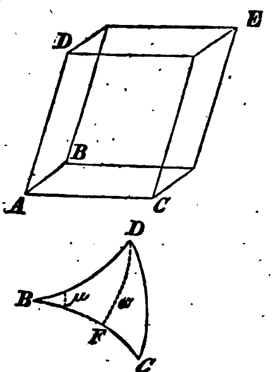
Anmerkung. Man wird leicht übersehen, dass die so eben gestellte und gelöste Aufgabe mit der zusammenfällt, von einem Punkte einer Kante einer dreiseitigen körperlichen Ecke auf die entgegenstehende Seitenfläche eine Senkrechte zu ziehen, oder auch durch eben diese Kante eine Ebene zu legen, welche senkrecht steht auf der entgegenstehenden Seitenfläche. Betrachtet man nämlich die Spitze der Ecke als Mittelpunkt einer Kugel, und sind A, B, C die drei Punkte auf der Oberfläche dieser Kugel, in der die Kanten dieselbe schneiden, so ist die durch CD gelegte Ebene eines grössten Kreises die gesuchte Ebene. Der gefundene Winkel CD ist dann die Neigung der durch C gehenden Kante gegen die entgegenstehende Seitenfläche.

Ist O der Kugelmittelpunkt und man zieht OA, OB, die rückwärts in OA', OB' verlängert werden, so ergibt sich aus den obigen Untersuchungen offenbar folgendes: der Fusspunkt der von einem Punkte der Kante OC auf die Ebene der zwei andern Kanten gefällten senkrechten Geraden fällt in den Winkel AOB, wenn die Flächenwinkel an OA und OB spitz sind (CD fällt innerhalb des Dreiecks und ist spitz); er fällt in den Winkel A'OB', wenn diese beiden Flächenwinkel stumpf sind

(CD fällt in das Dreieck und ist stumpf); er fällt in den Winkel BOA′, wenn der Flächenwinkel an OB stumpf, der an OA spitz ist (die spitze Senkrechte CE fällt ausserhalb des Dreiecks auf die Seite des stumpfen Winkels); endlich fällt er in den Winkel AOB′, wenn der Flächenwinkel an OA stumpf, der an OB spitz ist. Ist der Flächenwinkel an OA $= 90^0$, und der an OB $< 90^0$, so fällt der Fusspunkt in OA, ist er $> 90^0$, in OA′; ist der Flächenwinkel an OB $= 90^0$, so fällt der Fusspunkt in OB oder OB′, je nachdem der Flächenwinkel an OA $\gtrless 90^0$; sind endlich die beiden Flächenwinkel an OA und OB $= 90^0$, so fällt der Fusspunkt in O, d. h. die Kante OC steht senkrecht auf der Ebene der beiden andern Kanten.

Für den Fall, dass in unserer Figur $A = B = 90^0$, ist auch $AC = BC = 90^0$ (§. 8), also hätte man $\operatorname{tg} AC = \infty$, $\cos A = 0$, mithin $\operatorname{tg} AD = \infty \,.\, 0$, d. h. AD bleibt unbestimmt, wie natürlich, da in diesem Falle jeder von C aus auf AB gezogene Bogen (eines grössten Kreises) senkrecht auf AB steht, also der Fusspunkt desselben willkührlich angenommen werden kann.

2) In einem Parallelepiped AE kennt man die Längen dreier in einem Punkte zusammenstossender Kanten $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, so wie die Winkel, welche dieselben mit einander bilden, $CAB = \alpha$, $CAD = \beta$, $BAD = \gamma$. Man soll das Parallelepiped berechnen.



Da man in jeder der drei in A zusammenstossenden Seitenflächen, welche Parallelogramme sind, zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt, so sind diese Seitenflächen vollständig bekannt; dessgleichen also auch ihr Flächeninhalt und der Inhalt der Oberfläche des Parallelepipeds.

Die drei Kanten AC, AB, AD bilden eine dreiseitige körperliche Ecke, in der die Kantenwinkel gegeben sind; die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander sind also die Winkel eines sphärischen Dreiecks, dessen Seiten α, β, γ sind, und zwar stehen diese letztern den Neigungswinkeln an AD, AB, AC entgegen. Die Bestimmung derselben geschieht mithin nach §. 9.

Die Neigungswinkel der Kanten AC, AB, AD gegen die Ebenen ABD, CAD, BAC sind nichts anderes, als die nach Nr. 1 berechneten Perpendikel von den Eckpunkten des sphärischen Dreiecks auf die entgegenstehenden Seiten und zwar ist die Neigung von AD gegen BAC das auf die Seite α gefällte Perpendikel u. s. w.

Sey nun die ω die Neigung von AD gegen BAC, so ist die Höhe

des Parallelepipeds $= c \cdot \sin\omega$, und da der Inhalt der Grundfläche $= ab\sin\alpha$, so ist der Kubikinhalt des Parallelepipeds $= abc\sin\alpha\sin\omega$. Bezeichnet man den an AB liegenden Flächenwinkel mit μ, so ist nach Nr. 1:

$$\sin\omega = \sin\mu \cdot \sin\gamma,$$

also ist der Inhalt des Parallelepipeds:

$$abc\sin\alpha\sin\gamma\sin\mu = 2abc\sqrt{\sin s \cdot \sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)},$$

wobei $s = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$ ist (§. 4).

In derselben Weise verfährt man, wenn man den Inhalt eines dreiseitigen Prismas oder einer dreiseitigen Pyramide aus den drei zusammenstossenden Kanten und ihren Neigungswinkeln zu finden hat. Die Hälfte obiger Grösse gibt den Inhalt des Prismas; der 6. Theil den der Pyramide.

3) ABCD sey ein sphärisches Trapez, in welchem AC und BD senkrecht auf AB stehen (natürlich sind alle Seiten Bogen grösster Kugelkreise); man kennt die Längen von AB $= a$, AC $= b$, BD $= c$ und soll die Fläche des Trapezes ABDC berechnen.

Fig. 63.

Seyen A, B, C, D die vier Winkel des Vierecks, so sind also $A = B = 90^0$, $A + B = 180^0$. Man verlängere die Bögen AC, BD bis sie sich in F schneiden und sey F der Winkel an F in dem Dreiecke ABF. Da man die absoluten Längen von AB, AC, BD kennt, so kann man sie leicht in Winkelmass verwandeln. *

Wir wollen sie, der Kürze wegen, immer mit a, b, c bezeichnen. Die Fläche des Dreiecks ABF ist nach §. 16:

$$r^2 \operatorname{arc} E, \text{ wo } E = A + B + F - 180 = F,$$

da $A + B = 180^0$ ist; die des Dreiecks CDF ist:

$$r^2 \operatorname{arc} E', \text{ wo } E' = 180^0 - C + 180^0 - D + F - 180^0 = 180^0 - (C+D) + F,$$

indem die Winkel an C und D in CDF gleich $180^0 - C$, $180^0 - D$ sind. Daraus folgt

---

* Die diesen Bögen zugehörigen Mittelpunktswinkel sind $\frac{a}{r}\varrho$, $\frac{b}{r}\varrho$, $\frac{c}{r}\varrho$, wenn sie in Sekunden ausgedrückt werden, wo wieder $\varrho = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} = 206264{\cdot}8''$ ist.

$$\text{Trapez ABCD} = r^2 \operatorname{arc}(E - E') = r^2 \operatorname{arc}(C + D - 180^0).$$

Nun sind aber die Seiten AF, BF gleich 90^0 (§. 8. Nr. 2); also $CF = 90^0 - b$, $DF = 90^0 - c$, mithin (§. 6. (10)):

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}[180^0 - C + 180^0 - D] = \frac{\cos\frac{1}{2}(CF - DF)}{\cos\frac{1}{2}(CF + DF)} \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}F;$$

also da (§. 8. Nr. 2): $F = a$:

$$\operatorname{tg}[180^0 - \tfrac{1}{2}(C + D)] = \frac{\cos\frac{1}{2}(c - b)}{\cos\frac{1}{2}[180^0 - (b + c)]} \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a,$$

d. h.
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C + D) = -\frac{\cos\frac{1}{2}(c - b)}{\sin\frac{1}{2}(b + c)} \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a$$

oder

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(C + D - 180^0) = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C + D) = \frac{\cos\frac{1}{2}(c - b)}{\sin\frac{1}{2}(b + c)} \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a,$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C + D - 180^0) = \frac{\sin\frac{1}{2}(b + c)}{\cos\frac{1}{2}(c - b)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a,$$

d. h. man hat als Fläche des Trapezes:

$$r^2 \operatorname{arc}\alpha, \text{ wo } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}(b + c)}{\cos\frac{1}{2}(c - b)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a. \quad (22)$$

Gesetzt nun, es seyen b, c, a so klein, dass man die über die vierte hinausgehenden Potenzen von $\frac{a}{r}, \ldots$ vernachlässigen könne (§. 19), so ist (erste Abthlg. §. 16):

$$\sin\tfrac{1}{2}(b + c) = \frac{b + c}{2r} - \tfrac{1}{6}\left(\frac{b + c}{2r}\right)^3, \quad \cos\tfrac{1}{2}(c - b) = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{c - b}{2r}\right)^2,$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a = \frac{a}{2r} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a}{2r}\right)^{3*},$$

also

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b + c)}{\cos\frac{1}{2}(c - b)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a = \frac{\frac{b + c}{2r}\left[1 - \frac{1}{24}\frac{(b + c)^2}{r^2}\right]}{1 - \frac{1}{8}\frac{(c - b)^2}{r^2}} \left(1 + \frac{1}{12}\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{a}{2r}.$$

---

* Man hat allgemein $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{\beta}{r} - \frac{1}{6}\left(\frac{\beta}{r}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\beta}{r}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{r}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\beta}{r}\right)^4}$, woraus durch Division und Vernachlässigung von $\left(\frac{\beta}{r}\right)^6$ folgt:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\beta}{r} + \frac{1}{3}\left(\frac{\beta}{r}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{\beta}{r}\right)^5,$$

woraus dann der Ausdruck im Texte folgt.

$$= \frac{a(b+c)}{4r^2} \cdot \left[1 - \frac{1}{24}\frac{(b+c)^2}{r^2} + \frac{1}{8}\frac{(c-b)^2}{r^2}\right]\left(1 + \frac{1}{12}\frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$= \frac{a(b+c)}{4r^2}\left[1 - \frac{1}{24}\frac{(b+c)^2}{r^2} + \frac{1}{8}\frac{(c-b)^2}{r^2} + \frac{1}{12}\frac{a^2}{r^2}\right]$$

$$= \frac{a(b+c)}{4r^2}\left[1 + \frac{3c^2 - 6bc + 3b^2 + 2a^2 - b^2 - 2bc - c^2}{24r^2}\right]$$

$$= \frac{a(b+c)}{4r^2}\left[1 + \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 8bc}{24r^2}\right]$$

$$= \frac{a(b+c)}{4r^2}\left[1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4bc}{12r^2}\right].$$

Da aber α selbst ziemlich klein, so ist

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\alpha + \frac{1}{3}\operatorname{arc}^3\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\alpha + \frac{1}{24}\operatorname{arc}^3\alpha,$$

also

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc}\alpha + \frac{1}{24}\operatorname{arc}^3\alpha = \frac{a(b+c)}{4r^2}\left[1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4bc}{12r^2}\right].$$

Als genäherten Werth von $\frac{1}{2}\operatorname{arc}\alpha$ erhält man hieraus $\frac{a(b+c)}{4r^2}$, und da die dritte Potenz hievon schon r^6 im Nenner enthält, so wird man $\operatorname{arc}^3\alpha$ nicht mehr zu beachten haben. Also ist

$$\operatorname{arc}\alpha = \frac{a(b+c)}{2r^2}\left[1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4bc}{12r^2}\right],$$

d. h.

$$\text{Trapez ABCD} = \frac{a(b+c)}{2}\left[1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4bc}{12r^2}\right]. \quad (23)$$

Die Formel (23) hat denselben Grad der Genauigkeit, wie (21) in §. 19. Ist (23) nicht mehr genau genug, so gibt (22) natürlich grössere Schärfe. Man wird beachten, dass $\frac{a(b+c)}{2}$ die Fläche des Trapezes ist, wenn es geradezu als geradlinig angesehen wird; $\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4bc}{12r^2}$ bildet den Korrektionsfaktor dieser Rechnung.

Sey z. B. $a = 15869{\cdot}5$, $b = 7310{\cdot}3$, $c = 317{\cdot}9$ (Toisen) so ist $b + c = 7628{\cdot}2$; ferner sey $\log r = 6{\cdot}5141498$, dann

$$\frac{a^2}{12r^2} = 0{\cdot}000001966281$$

$$\frac{b^2}{12r^2} = 0{\cdot}000000417243$$

$\frac{c^2}{12r^2} = 0{\cdot}000000000789$ $\frac{a(b+c)}{2} = 60527859{\cdot}95,$

$\overline{0{\cdot}000002384313}$ Trapez $= 60527859{\cdot}95 . 1{\cdot}000002311735$

$\frac{4bc}{12r^2} = 0{\cdot}000000072578$ $= 60527999{\cdot}9$ (Quadrattoisen).

$\overline{0{\cdot}000002311735}$

$1 + \frac{a^2+b^2+c^2-4bc}{12r^2} = 1{\cdot}000002311735.$

4) Durch die drei Eckpunkte A, B, C eines sphärischen Dreiecks wird eine Ebene gelegt, welche die Kugel in einem Kreise schneidet; man soll den Halbmesser und Mittelpunkt desselben bestimmen.

Sey O der Kugelmittelpunkt, E der gesuchte Mittelpunkt, so ist EA = EB = EC der gesuchte Halbmesser, und zugleich der Halbmesser des um das ebene Dreieck ABC beschriebenen Kreises. Ferner ist Winkel EOA = EOB = EOC, und wenn r der Halbmesser der Kugel, so sind die Seiten des ebenen Dreiecks (erste Abthlg. §. 21) $= 2r\sin\frac{1}{2}a$, $2r\sin\frac{1}{2}b$, $2r\sin\frac{1}{2}c$; ist also F die Fläche dieses Dreiecks, so ist (erste Abthlg. §. 28):

$$EA = \frac{8r^3\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{4F}.$$

Die Gerade EO steht senkrecht auf der Ebene ABC und kann als Höhe der Pyramide ABCO angesehen werden, deren Inhalt also $= \frac{EO.F}{3}$ ist; da aber die Kanten OA, OB, OC gleich r sind, und AOB = c, BOC = a, AOC = b, so ist nach Nr. 2 dieselbe Grösse auch $= \frac{1}{3}r^3\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$, wo $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Also ist

$$EO = \frac{r^3}{F}\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)},$$

und

$$\operatorname{tg} AOE = \frac{AE}{OE} = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}},$$

aus welcher Formel AOE ($< 90^0$) sich ergibt. Dann hat man übrigens auch

$$EA = r\sin AOE,\ EO = r\cos AOE,$$

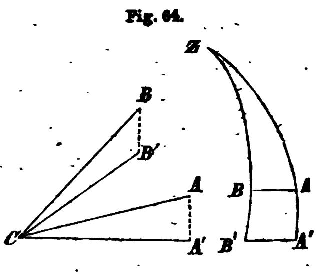
wodurch EA und EO bequemer gefunden werden.

Wollte man auch den Neigungswinkel der Ebene AOE gegen AOB haben, so hätte man bloss ein sphärisches Dreieck aufzulösen, dessen drei Seiten AOB (= c), AOE, BOE (= AOE) wären; der BOE entgegenstehende Winkel wäre sodann der gesuchte (§. 9).

§. 23.

1) Der Winkel BCA liegt nicht in der durch C gehenden Horizontalebene; man soll seine Projektion B′CA′ auf diese Ebene bestimmen, wenn man die Winkel BCB′, ACA′ kennt, welche seine Seiten mit derselben machen.

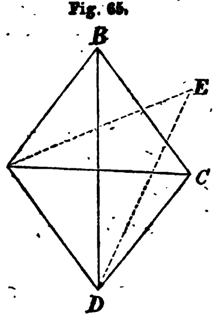
Fig. 64.



Denken wir uns in C eine Senkrechte auf den Horizont errichtet und betrachten dieselbe, so wie CA, CB (die Seiten des gemessenen Winkels) als Kanten einer dreiseitigen körperlichen Ecke; dessgleichen diese Senkrechte und die Projektionen CB′, CA′ als Kanten einer zweiten körperlichen Ecke, so werden die diesen Ecken entsprechenden sphärischen Dreiecke ZBA, ZB′A′ in Z denselben Winkel haben: da ferner ZB′ = ZA′ = 90°, so ist (§. 8. Nr. 5) der Winkel bei Z gleich B′CA′. Indem Dreiecke ZBA kennt man nun:
die Seite ZB = 90° — BCB′; ZA = 90° — ACA′ und BA = BCA, man kann also den Winkel Z (§. 9) berechnen, und erhält somit B′CA′.

Die Formel (a) des §. 21 wird hier in den meisten Fällen anwendbar seyn. Man übersieht leicht, dass, wie bereits in §. 21, für ZB oder ZA > 90° (wenn also B oder A unter der Horizontalebene lägen) dieselben Formeln gelten, wenn man α oder β negativ setzt, während natürlich unsere allgemeine Auflösung davon nicht berührt wird.

Fig. 65.



2) Die drei Punkte A, B, C liegen in einer Horizontalebene, D ist über diese Ebene erhaben. In D misst man die Winkel ADB, BDC, ADC, in A die Winkel DAC, BAD nebst der Seite AB; man soll die Entfernungen der vier Punkte gegen einander bestimmen.

In der dreiseitigen körperlichen Ecke, deren

Spitze D ist, kennt man die drei Kantenwinkel, findet also die drei Flächenwinkel (§. 9); in der dreiseitigen körperlichen Ecke, deren Spitze A ist, kennt man nun die zwei Kantenwinkel DAC, BAD und den an AD liegenden Neigungswinkel der Ebenen CAD, BAD, der in der vorigen Ecke dem Winkel BDC entgegen stund. Dieser Winkel wird von den bekannten Kantenwinkeln gebildet; die Auflösung dieser Ecke geschieht also nach §. 11. In dem Dreiecke DAB kennt man jetzt eine Seite AB und die zwei Winkel ADB, BAD., es wird also nach §. 24 der ersten Abtheilung berechnet; in CAD kennt man nunmehr AD, DAC, ADC, das Dreieck ist also bekannt; in BAC kennt man AB, AC, BAC, dasselbe ist also ebenfalls bekannt (erste Abthlg. §. 25); in BCD endlich kennt man alle drei Seiten. Die sämmtlichen vorkommenden Längen können mithin berechnet werden.

Man wird beachten, dass wir die Bedingung, A, B, C liegen in derselben Horizontalebene, weiter gar nicht beachtet haben; sie ist auch so weit überflüssig, und wird nur dann nothwendig, wenn man die horizontale Entfernung des Punktes D von A, B, C (die sogenannte geodätische Entfernung, vergl. erste Abthlg. §. 38) d. h. die Entfernung der Projektion des Punktes D auf die durch A, B, C gelegte Ebene von A, B, C kennen will.

Sey E die Projektion von D auf die Ebene ABC, so wird der Winkel DAE nach §. 22. Nr. 2 und 1 gefunden werden, woraus dann leicht $AE = AD \cos DAE$ folgt. Da man nun auch $DE = DA \sin DAE$ hat, so findet man in DBE, worin DE, DB und $DEB = 90^\circ$ bekannt sind, BE; eben so ergibt sich CE aus DEC.

3) Man soll eine Horizontalsonnenuhr konstruiren.

In dem Punkte A der Erdoberfläche, wo die Sonnenuhr konstruirt werden soll, errichte man einen Stab, der parallel sey der Weltaxe*,

---

* Das Himmelsgewölbe scheint sich jeden Tag um eine Axe zu drehen, die durch den Mittelpunkt der Erde geht; diese Axe fällt zusammen mit der kleinen Axe der Ellipse, um welche letztere sich drehen muss, um die mathematische Erdoberfläche zu erzeugen (erste Abthlg. §. 38). Diese Axe heisst die **Weltaxe**; sie trifft das Himmelsgewölbe in zwei Punkten, welche **Pole** heissen, von denen für uns nur der eine, der Nordpol, sichtbar ist. Die Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Erde gehend, auf der Weltaxe senkrecht steht, schneidet die Himmelskugel im **Aequator**.

der also mit einer durch A gehenden Horizontalebene einen Winkel mache, gleich der geographischen Breite des Ortes A (erste Abthlg. §. 38) oder gleich der Höhe* des Nordpols über dem Horizont.

---

* In §. 36. Nr. 4 der ersten Abtheilung wurde bereits die Bedeutung des Zeniths erörtert. Ist A ein Punkt der Erdoberfläche, und errichten wir in demselben eine Senkrechte auf diese Fläche (wie sie etwa durch die Richtung des Bleiloths angegeben wird), so wird dieselbe, bis an das Himmelsgewölbe verlängert, letzteres in demjenigen Punkte treffen, den man das Zenith von A nennt, so dass dasselbe also den senkrecht über A befindlichen Punkt des Himmels darstellt. Eine Ebene, welche durch A senkrecht auf die Richtung jener nach dem Zenith gezogenen Geraden gelegt wird, bildet den scheinbaren Horizont von A, der also Himmel und Erde zu scheiden scheint. Der wahre Horizont von A geht, mit dem scheinbaren parallel, durch den Mittelpunkt der Erde, den wir uns zugleich als Mittelpunkt der Himmelskugel denken müssen. Denken wir uns nun durch das Zenith von A und einen Stern S einen Bogen grössten Kreises am Himmelsgewölbe gezogen und verlängern ihn, bis er den (wahren) Horizont trifft, so heisst der Bogen zwischen Stern und Horizont (d. h. der von ihm umspannte Winkel am Mittelpunkt der Erde) die Höhe des Sterns. Diess ist die wahre (oder geozentrische) Höhe; messen kann man nur den Winkel, den die Linie AS mit dem scheinbaren Horizont AM macht, d. h. den Winkel SAM. Betrachten wir nun die Erde als eine Kugel, was genau genug ist, so wird sich aber der Winkel SCN aus dem Winkel SAM leicht berechnen lassen. Es ist nämlich

Fig. 86.

Z S A M C N

$$SAZ = SCZ + ASC,$$

d. h.

$$90^0 - SAM = 90^0 - SCN + ASC,$$

$$SCN = SAM + ASC.$$

Was ASC (die Parallaxe) anbelangt, so hat man

$$\sin ASC : \sin SAC = AC : CS,$$

$$\sin ASC = \frac{AC}{CS} \cdot \sin SAZ = \frac{AC}{CS} \cos SAM.$$

CS ist die Entfernung des Sterns vom Mittelpunkte der Erde, AC der Erdhalbmesser. Bei den Fixsternen ist nun immer CS ungeheuer gross im Verhältniss zu AC, so dass der Bruch $\frac{AC}{CS}$ verschwindend klein ist; dasselbe gilt also auch von sin ASC, also von ASC, d. h. man wird haben

$$SCN = SAM,$$

so dass mithin der wahre und scheinbare Horizont nicht unterschieden werden können, wenn es sich um Fixsterne handelt. Es kommt diess offenbar darauf zurück, die Erde selbst als einen Punkt zu betrachten, im Verhältniss zur unendlichen Entfernung der Fixsterne.

Bescheint nun die Sonne diesen Stab, so wirft er einen Schatten, welch letzterer auf einem getheilten, horizontal liegenden Kreis, dessen Mittelpunkt A ist, die betreffende Zeit anzeigt. Um den Kreis einzutheilen, bemerke man, dass die Zeit von einer Mitternacht zur andern in 24 gleiche Theile, Stunden getheilt, so dass die 12. Stunde auf Mittag, d. h. auf die Zeit fällt, in welcher die Sonne durch den Meridian von A geht (d. h. durch den Himmelskreis, der durch Pol und Zenith geht); nehmen wir nun an, die Sonne bewege sich am Himmel mit gleichförmiger Geschwindigkeit, der nämlich der Umwälzung des ganzen Himmelsgewölbes, so werden in jeder Stunde von ihr gleich grosse Bögen zurückgelegt werden. Verbindet man den Ort der Sonne in einem gewissen Augenblicke mit dem Nordpol durch einen Bogen grössten Kreises (des Stunden- oder Deklinationskreises), so heisst der Winkel, den dieser Bogen mit dem Meridian am Pole macht, der Stundenwinkel, der beiderseitig vom südlichen Theile des Meridians von West gegen Ost und von Ost gegen West gerechnet wird, und zwar jeweils bis 180°, welch letzterer Werth Mitternacht entspricht, während 0 der Stundenwinkel für Mittag ist. Da das Himmelsgewölbe sich gleichförmig dreht, so wird der Stundenwinkel der Zeit proportional zu- oder abnehmen, und zwar für jede Stunde um 15°. Für jeden Zeitmoment ist es somit sehr leicht, den Stundenwinkel zu erhalten; für die Zeit t Stunden vor oder nach Mittag ist er $15\,t^0$.

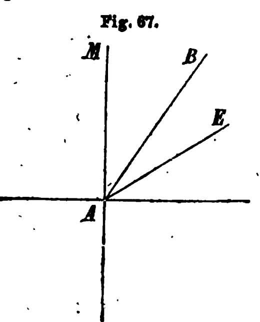


Fig. 67.

Sey nun der Stundenwinkel $= \varphi^0$ (also die Zeit $= \frac{\varphi}{15}$ vor oder nach Mittag), so wird der Stab AB einen Schatten AE werfen, welche beide Linien in derjenigen Ebene sich befinden, welche durch die Sonne und den Stab AB in A geht; ist AM die Richtung des Meridians auf der Erde, so werden die drei Linien AB, AM

Der Winkel SAZ ist also die Zenithdistanz des Sterns S für A (eigentlich ist es SCZ beide aber fallen zusammen); Zenithdistanz und Höhe betragen zusammen 90°. Die Höhe des Pols ist also der geographischen Breite, d. h. der Zenithdistanz des Aequators gleich.

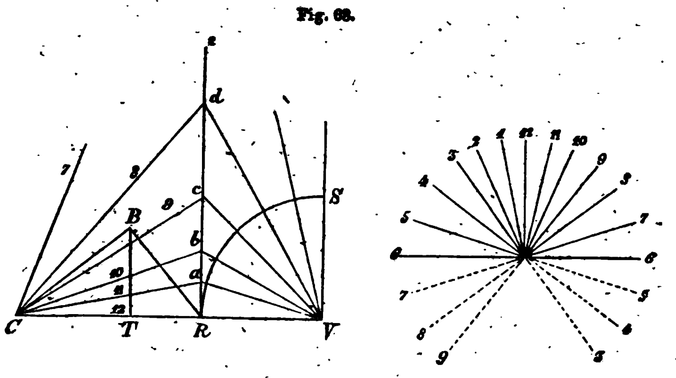
AE die Kanten einer körperlichen Ecke seyn, in der BAM = Polhöhe (= geographische Breite =) α; der Winkel der zwei Ebenen EBA, MAB ist nichts anderes als der Stundenwinkel φ, während der der Ebenen BMA, MAE gleich 90° ist. Man hat also (§. 8):

$$\operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{cotg} MAE . \sin \alpha, \ \operatorname{tg} MAE = \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha.$$

Hieraus folgt MAE, also kann man AE konstruiren, und wenn dann der Schatten auf AE fällt, so wird der Stundenwinkel der Sonne = φ^0, also die Zeit $\frac{\varphi}{15}$ seyn. Man zeichnet also, wenn man bloss ganze Stunden angeben will, auf der durch A gehenden Ebene eine Reihe gerader Linien, die mit AM Winkel machen, deren Tangenten sind: $\operatorname{tg} 15^0 \sin \alpha$, $\operatorname{tg} 30^0 \sin \alpha$, $\operatorname{tg} 45^0 \sin \alpha$, ... und wenn der Schatten des Stabs auf diese Linien fällt, so ist es 1, 2, 3, ... oder 11, 10, 9, ... Uhr.

Man kann diess Alles jedoch durch folgende Konstruktion erreichen, die wir noch angeben wollen, da der Gegenstand nicht ohne Interesse ist.

Fig. 68.



Sey CBT ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem BCT gleich der geographischen Breite des betreffenden Ortes ist; man verlängere CT ganz beliebig, ziehe BR auf CB senkrecht, bis sie CT in R trifft, ziehe Re senkrecht auf CR, und mache RV = BR; ziehe endlich mit VR um V einen Viertelkreis, den man in 6 gleiche Theile theilt, wenn man bloss Stunden auftragen will, in 12, wenn halbe Stunden u. s. w. Durch die Theilpunkte ziehe man Halbmesser, bis sie Re in a, b, c,... schneiden, endlich verbinde man C mit a, b, c, so werden, wenn CR die Richtung des Meridians angibt, Ca, Cb, Cc,..

die Stundenlinien für 1, 2,... oder 11, 10, 9.... Man erhält in dieser Weise die Eintheilung für 12—6 nach Mittag, und 6—12 vor Mittag, verlängert man aber die Stundenlinien für 5, 4,... nach Mittag rückwärts, so erhält man die für 5, 4,... vor Mittag, und eben so, wenn man die für 7, 8,... vor Mittag rückwärts verlängert, die für 7, 8,... nach Mittag.

Dass man bei dieser Konstruktion richtig verfahren ist, kann leicht bewiesen werden. Sey z. B. $RVc = \varphi$ (hier 45^0), $BCT = \alpha$, $CB = r$, so ist $BT = r \sin \alpha$, $TBR = \alpha$, $BR = RV = \frac{BT}{\cos \alpha} = r \operatorname{tg} \alpha$, also $Rc = RV \operatorname{tg} \varphi = r \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi$, $CR = \frac{CB}{\cos \alpha} = \frac{r}{\cos \alpha}$, also $\operatorname{tg} cCR = \frac{cR}{CR} = r \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi . \frac{\cos \alpha}{r} = \operatorname{tg} \varphi . \sin \alpha$, d. h. cCR ist der nach obiger Formel bestimmte Winkel für den Stundenwinkel φ.

Dass die Rückwärtsverlängerung ebenfalls richtig ist, kann man leicht einsehen. Für 5 Uhr nach Mittag macht die Schattenlinie mit CR einen Winkel, dessen Tangente $= \operatorname{tg} 75^0 \sin \alpha$; für 5 Uhr vor Mittag dagegen einen andern, dessen Tangente $= \operatorname{tg} 105^0 \sin \alpha = - \operatorname{tg} 75^0 \sin \alpha$; diese zwei Winkel betragen mithin zusammen 180^0.

Legt man jetzt CR in den Meridian (die Mittagslinie) und stellt dann das Dreieck CBT vertikal auf, so wird CB die Schatten werfende Kante seyn können.

Anmerkung. Hiezu bedarf es allerdings der Kenntniss der Richtung der Mittagslinie an der Stelle, in der die Sonnenuhr soll errichtet werden. In §. 25 werden wir eine Reihe astronomischer Aufgaben, betreffend die Bestimmung der geographischen Breite, lösen, aus denen dann auch sehr leicht die Richtung der Mittagslinie (Meridian) gefolgert werden kann. Da man aber nicht immer diese astronomischen Hülfsmittel anwenden kann oder will, so wird es nothwendig, wenigstens nahezu die Richtung der Mittagslinie leichter bestimmen zu können. Zu dem Ende errichte man in dem Punkte C, d. h. in dem Punkte, in welchem der Schatten werfende Stab soll errichtet werden, einen senkrechten Stab von beliebiger Länge, und beschreibe um C als Mittelpunkt eine Reihe Kreise auf der horizontalen Ebene. Man beobachte nun die Länge des Schattens des Stabes, was mittelst der Kreise leicht geschehen kann, vor und nach dem Mittage; der Moment, da der Stab den kürzesten Schatten wirft, ist als der wahre Mittag anzusehen und die Schattenlinie ist die Mittagslinie. Am besten wird man sie finden, wenn man gleiche Schattenlängen vor und nach Mittag sucht und den Winkel der entsprechenden Schattenlinien halbirt. Dabei ist freilich vorausgesetzt, dass die Sonne um Mittag (d. h. wenn sie durch den Meridian geht) ihren höchsten Stand am Him-

mel erreicht, was wahr wäre, wenn ihre Deklination im Laufe eines Tages sich nicht ändern würde. Für die Zeit um den 23. Juli oder 23. Dezember ist diess nahezu der Fall, so dass man diese Tage am sichersten zur obigen Bestimmung wählen wird. Da ferner der Endpunkt des Schattens nicht bequem beachtet werden kann, so wird man besser thun, am obern Ende des Stabes eine metallene Platte mit einer kleinen Oeffnung anzubringen und den Lichtpunkt, der hiedurch entsteht, als Endpunkt zu wählen.

§. 24.

1) Man soll die Länge des Tages für einen bestimmten Punkt der Erdoberfläche und für einen bestimmten Tag finden, d. h. berechnen, wie lange die Sonne an diesem Tage über dem Horizonte des fraglichen Ortes bleibt.

Ehe wir diese Aufgabe lösen, müssen wir noch einige Erklärungen vorausgehen lassen. Wir haben bereits mehrfach gesagt, dass das Himmelsgewölbe, an dem die Sonne sich befindet, sich gleichförmig um die Weltaxe dreht (zu drehen scheint, was übrigens hier gleichgiltig ist), so dass also auch die Sonne mit diesem Gewölbe sich drehen wird. Wäre die Sonne nun fest, so würde ihre Bewegung gleichförmig und parallel dem Aequator, d. h. in einer Ebene vor sich gehen, die senkrecht auf der Weltaxe steht. Die Sonne hat aber, neben dieser allgemeinen Umwälzung, eine eigene Bewegung am Himmel, die der Richtung der täglichen Bewegung entgegengesetzt ist, nämlich von West gegen Ost geht. In Folge dieser eigenen Bewegung durchläuft sie während eines Jahres am Himmel einen grössten Kreis, der unter einem Winkel von $23^0 27' 28''$ den Aequator in zwei Punkten durchschneidet, welche der Frühlings- und Herbstpunkt heissen. Die Bewegung der Sonne in ihrer eigenen Bahn geschieht übrigens nicht ganz gleichförmig. In Folge dieser Bewegung ändert die Sonne ihren Abstand vom Aequator fortwährend; welcher Abstand offenbar gemessen wird durch den Bogen eines grössten Kreis, welchen man durch Sonne und Pol, also senkrecht auf den Aequator legt; dieser Abstand d. h. das Stück zwischen Sonne und Aequator heisst die Deklination der Sonne (woher auch der Namen Deklinationskreis für jenen Kreis rührt). Da man die Bewegung der Sonne kennt, so kennt man also auch ihre Deklination für jeden Tag und weiss, um wie viel sie sich im Laufe eines Tages ändert. Diess, in Verbindung

noch mit der ungleichförmigen Bewegung der Sonne in ihrer Bahn, macht, dass die Zeit von einem Meridiandurchgang bis zum andern nicht immer dieselbe ist. Daraus folgt, dass die Tage, welche eben diesem Zeitintervalle gleich sind, ungleich lang wären, wenn sie bloss nach der Sonnenuhr (§. 23. Nr. 3) gemessen würden. Da man solche ungleich lange Tage für die Pendeluhren nicht brauchen kann, so hat man alle Tage als gleich lang angenommen, und dadurch eine **mittlere Zeit** erhalten, von der die eigentliche Sonnenzeit, wie die Sonnenuhr sie gibt, abweicht, so dass der Meridiandurchgang der Sonne bald vor, bald nach 12 Uhr Statt findet.

Die Sonne geht nun auf oder unter, wenn ihre Zenithdistanz $= 90^0$ ist, so dass also ihre Höhe $= 0$ ist. Kennt man den Stundenwinkel (§. 23. Nr. 3) der Sonne für den Augenblick ihres Aufgangs oder Niedergangs, so lässt sich daraus unmittelbar auf die betreffende Zeit, und also auf die Tageslänge schliessen.

Stelle nun S die Sonne vor, Z das Zenith, P den Nordpol also BZA den Meridian, AB den Horizont, so ist in dem Dreieck ZSP, ZP die Zenithdistanz des Pols $= 90^0 -$ der geographischen Breite, ZS die Zenithdistanz der Sonne, ZPS der Stundenwinkel, PS $= 90^0 -$ Deklination der Sonne.

Fig. 69.

Bezeichnet man also die Deklination der Sonne mit δ, mit b die geographische Breite, mit z die Zenithdistanz der Sonne, mit s den Stundenwinkel derselben, so hat man (§. 3).

$$\cos z = \cos(90^0 - b)\cos(90^0 - \delta) + \sin(90^0 - b)\sin(90^0 - \delta)\cos s,$$

wobei δ negativ wäre, wenn sich die Sonne südlich vom Aequator befände; d. h. man hat:

$$\cos z = \sin b \sin \delta + \cos b \cos \delta \cos s.$$

Allerdings geht die Sonne auf oder unter, wenn $z = 90^0$; allein die **Strahlenbrechung** macht, dass die Sonne immer etwas höher zu stehen scheint, als sie wirklich steht, so dass man sie also bereits sieht, ehe sie über den Horizont gelangt ist; diese Erhöhung beträgt alsdann etwa $33''$ (was wir mit ε bezeichnen wollen, so dass also die Zenithdistanz $= 90^0 + \varepsilon$ seyn wird, wenn die Sonne auf- oder untergeht). Was ferner die Deklination δ anbelangt, so kennt

man sie nur für den Mittag des betreffenden Ortes, d. h. für den Augenblick des Meridiandurchganges; sie ist also beim Auf- und Untergang davon verschieden. In der Zeit vom Aufgang bis Mittag, oder von letzterem bis Untergang wird man annehmen dürfen, die Deklination ändere sich gleichförmig und wir wollen annehmen, sie wachse, und zwar um n'' in 24 Stunden, oder wenn s um 360° wächst. Für den Augenblick des Aufgangs, dem der Stundenwinkel s entspricht, wird also die Deklination $\delta - \frac{n\,s}{360}$ betragen, wenn s in Graden gegeben ist; für den Augenblick des Untergangs, dem der Stundenwinkel s' entspreche, wird sie $\delta + \frac{n\,s'}{360}$ ausmachen. Bestimmt man also s und s' aus den Gleichungen

$$\cos(90^\circ + \varepsilon) = \sin b \sin\left(\delta - \frac{n\,s}{360}\right) + \cos b \cos\left(\delta - \frac{n\,s}{360}\right) \cos s,$$

$$\cos(90^\circ + \varepsilon) = \sin b \sin\left(\delta + \frac{n\,s'}{360}\right) + \cos b \cos\left(\delta + \frac{n\,s'}{360}\right) \cos s',$$

so wird man die Stundenwinkel für den Aufgang und Untergang der Sonne, und daraus dann die Tageslänge erhalten. Um s oder s' zu bestimmen, wird man zuerst $\frac{n\,s}{360}$ oder $\frac{n\,s'}{360}$ weglassen und daraus einen genäherten Werth für $s = s'$ erhalten, den man in $\frac{n\,s}{360}$ setzt, und dann s und s' genauer findet. Nähme die Deklination der Sonne ab, so wäre n negativ zu setzen.

Sey $b = 51^\circ 31' 47''$, $\delta = 15^\circ 4' 15''$, $n = 18' 2''$, $\varepsilon = 33''$. Man hat also zuerst näherungsweise

$$\cos s \left(= \cos s'\right) = -\frac{\sin\varepsilon + \sin\delta \sin b}{\cos b \cos\delta},$$

woraus $s = 110^\circ 47' 7''$; also $\frac{n\,s}{360} = 18'2'' \frac{110^\circ\, 47'\, 7''}{360 \,.\, 60 \,.\, 60} = 5' 30''$, mithin

$$\cos s = -\frac{\sin\varepsilon + \sin(\delta - 5' 30'') \sin b}{\cos b \cos(\delta - 5' 30'')},$$

woraus $$s = 110^\circ 39' 8''.$$

Ebenso $$\cos s' = -\frac{\sin\varepsilon + \sin(\delta + 5' 30'') \sin b}{\cos b \cos(\delta + 5' 30'')},$$

woraus $$s' = 110^\circ 55' 6''.$$

Verwandelt man diese Stundenwinkel in Zeit (15^0 auf die Stunde), so erhält man:

Aufgang der Sonne vor Mittag 7 Stunden 22 Min. 36 Sek.,
Untergang „ „ nach „ 7 „ 23 „ 40 „

Die Tageslänge also betrug 14 Stunden 46 Minuten 16 Sekunden. Die Zeit des Sonnenaufgangs wäre also 12—7 Stund. 22 Min. 36 Sek. = 4 Stund. 37 Min. 24 Sek.; allein es ist diess nicht mittlere Zeit, wie die Pendeluhren sie zeigen, sondern wahre Zeit, wie sie von den Sonnenuhren angegeben wird. Da an dem betreffenden Tage die mittlere Zeit um 3 Min. 3 Sek. hinter der wahren zurück war, so zeigte die Uhr bei Sonnenaufgang 4 Uhr 34 Min. 21 Sek., bei Sonnenuntergang 7 Uhr 20 Min. 37 Sek.

Die Summe $s + s'$, um die es sich handelt, wenn man nur die Tageslänge zu finden wünscht, kann übrigens einfacher erhalten werden. Da nämlich $\frac{ns}{360}$ immer klein ist, so wird man nahezu haben (erste Abthlg. §. 16):

$$\sin\left(\delta - \frac{ns}{360}\right) = \sin\delta - \cos\delta \operatorname{arc}\frac{ns}{360},$$

$$\cos\left(\delta - \frac{ns}{360}\right) = \cos\delta + \sin\delta \operatorname{arc}\frac{ns}{360},$$

$$\sin\left(\delta + \frac{ns}{360}\right) = \sin\delta + \cos\delta \operatorname{arc}\frac{ns}{360},$$

$$\cos\left(\delta + \frac{ns}{360}\right) = \cos\delta - \sin\delta \operatorname{arc}\frac{ns}{360}.$$

Mithin, wenn man $\operatorname{arc}^2\frac{ns}{360}$ vernachlässigt:

$$\cos s = -\frac{\sin\varepsilon + \sin\delta\sin b - \cos\delta\sin b \operatorname{arc}\frac{ns}{360}}{\cos b\cos\delta + \cos b\sin\delta \operatorname{arc}\frac{ns}{360}}$$

$$= -\left[\sin\varepsilon + \sin\delta\sin b - \cos\delta\sin b \operatorname{arc}\frac{ns}{360}\right]\frac{\cos b\cos\delta - \cos b\sin\delta \operatorname{arc}\frac{ns}{360}}{\cos^2 b\cos^2\delta}$$

$$= -\left[\frac{\sin\varepsilon + \sin\delta\sin b - \cos\delta\sin b \operatorname{arc}\frac{ns}{360}}{\cos b\cos\delta}\right]$$

$$+[\sin\varepsilon+\sin\delta\sin b]\frac{\cos b\sin\delta}{\cos^2 b\cos^2\delta}\operatorname{arc}\frac{ns}{360}$$

$$=-\frac{\sin\varepsilon+\sin\delta\sin b}{\cos b\cos\delta}+\frac{\sin\varepsilon+\sin\delta\sin b}{\cos b\cos\delta}.\operatorname{tg}\delta\operatorname{arc}\frac{ns}{360}+\operatorname{tg}b\operatorname{arc}\frac{ns}{360}.$$

Ist also

$$-\frac{\sin\varepsilon+\sin\delta\sin b}{\cos b\cos\delta}=\mu,$$

so ist

$$\cos s=\mu-(\mu\operatorname{tg}\delta-\operatorname{tg}b)\operatorname{arc}\frac{ns}{360}.$$

Eben so

$$\cos s'=\mu+(\mu\operatorname{tg}\delta-\operatorname{tg}b)\operatorname{arc}\frac{ns}{360},$$

woraus

$$\cos s+\cos s'=2\mu,\ \cos s.\cos s'=\mu^2,$$

wenn man immer $\operatorname{arc}^2\frac{ns}{360}$ vernachlässigt. Aber (erste Abthlg. §. 14):

$$\cos\frac{s+s'}{2}=\cos\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}s'-\sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}s'=\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\cos s)(1+\cos s')}$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\cos s)(1-\cos s')}$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\cos s+\cos s'+\cos s\cos s'}-\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\cos s-\cos s'+\cos s\cos s'}$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+2\mu+\mu^2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{1-2\mu+\mu^2}=\tfrac{1}{2}(1+\mu)-\tfrac{1}{2}(1-\mu)=\mu.$$

Bestimmt man also φ aus

$$\cos\varphi=\mu=-\frac{\sin\varepsilon+\sin\delta\sin b}{\cos b\cos\delta},$$

so ist

$$\frac{s+s'}{2}=\varphi,\ s+s'=2\varphi.$$

In unserm obigen Beispiele war $\varphi=110^\circ 47' 7''$, also $s+s'=221^\circ 34' 14''$, mithin Tageslänge $=\frac{221\text{ Stund. }34\text{ Min. }14\text{ Sek.}}{15}=$ 14 Stund. 46 Min. $16\frac{14}{15}$ Sek.

2) Man soll diejenigen Orte der Erde bestimmen, deren längster Tag 24 oder mehr Stunden beträgt.

Wir haben in der vorigen Aufgabe die Länge des Tages für einen bestimmten Ort und zu einer bestimmten Zeit zu finden gelehrt. Fällt nun (bei Orten auf der nördlichen Erdhälfte), und bei der grössten Deklination der Sonne, welche $23^\circ 27' 28''$ beträgt, die Summe $s+s'$ gleich 360° aus, so wird die Sonne am längsten Tage gerade 24 Stunden über dem Horizonte bleiben. Da dann $\varphi=180^\circ$,

$\cos\varphi = -1$, so ist $\mu = -1$, also wenn α die Schiefe der Sonnenbahn (23° 27′ 28″):

$$\frac{\sin\varepsilon + \sin\alpha\sin b}{\cos b\cos\alpha} = 1,$$

woraus dann b oder die geographische Breite zu suchen ist. Vernachlässigt man ε, d. h. die Refraktion, so hat man:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}b = 1,\ \operatorname{tg}b = \operatorname{cotg}\alpha,\ b = 90^\circ - \alpha,$$

d. h. diejenigen Orte, welche unter 66° 32′ 32″ Breite liegen, haben am längsten Tage (23. Juni) die Sonne 24 Stunden über dem Horizonte (Polarkreise).

Wird ε nicht vernachlässigt, so ist

$$\sin\varepsilon = \cos b\cos\alpha - \sin\alpha\sin b = \cos(b + \alpha),$$

d. h. $\quad b + \alpha = 90^\circ - \varepsilon,\ b = 90^\circ - (\alpha + \varepsilon).$

Für Orte, die noch mehr nördlich liegen, ist $b > 90^\circ - (\alpha + \varepsilon)$, also dann $\frac{\sin\varepsilon + \sin\alpha\sin b}{\cos b\cos\alpha} > 1$, d. h. $s + s' = 2\varphi$ kann nicht mehr bestimmt werden, oder mit andern Worten, zur Zeit unseres längsten Tages geht dort die Sonne gar nicht mehr unter.

3) Man soll für Orte, die nördlicher liegen als die, deren Breite $90^\circ - (\alpha + \varepsilon)$ beträgt, die Dauer des längsten Tages bestimmen.

Derselbe dauert von dem Augenblicke an, da die Sonne zum letzten Male aufgeht, bis zu dem, da sie das erste Mal wieder untergeht, d. h. von dem Augenblick an, da der Stundenwinkel s (in Nr. 1) $= 180^\circ$ ist, bis zu dem, da s′ wieder 180° wird. Man muss also haben:

$$\cos(90^\circ + \varepsilon) = \sin b\sin\left(\delta - \frac{n180}{360}\right) + \cos b\cos\left(\delta - \frac{n.180}{360}\right)\cos 180^\circ,$$

$$\cos(90^\circ + \varepsilon) = \sin b\left(\sin\delta' - \frac{n'180}{360}\right) + \cos b\cos\left(\delta' - \frac{n'180}{360}\right)\cos 180^\circ,$$

wenn δ, δ' die Deklinationen der Sonne bei den Meridiandurchgängen zu Anfang und Ende, n, n′ die Zu- und Abnahme der Deklination in 24 Stunden bedeuten (wo im Anfang die Deklination zu-, am Ende abnimmt). Vernachlässigt man übrigens diese Grössen, so hat man:

$$-\sin\varepsilon = \sin b\sin\delta - \cos b\cos\delta = -\cos(b + \delta),$$
$$b + \delta = 90^\circ - \varepsilon,\ \delta = 90^\circ - (b + \varepsilon),$$
$$-\sin\varepsilon = \sin b\sin\delta' - \cos b\cos\delta' = -\cos(b + \delta'),$$
$$b + \delta' = 90^\circ - \varepsilon,\ \delta' = 90^\circ - (b + \varepsilon),$$

d. h. die Sonne geht zum letzten Male auf, wenn ihre Deklination $= 90^0 - (b + \varepsilon)$, und geht unter, wenn dieselbe wieder so gross geworden ist. Die Zeit, die dazwischen verfliesst, ist die Dauer des längsten Tages.

4) Alles Gesagte bezieht sich auf den Mittelpunkt der Sonne. Da die Sonnenscheibe am Himmel eine Ausdehnung von ungefähr $32'$ hat, so wird es sich auf den nördlichen Rand beziehen, wenn man statt ε setzt $\varepsilon + 16'$ und auf den untern, wenn man für ε setzt $\varepsilon - 16'$. Denn soll der obere Rand der Sonne am Horizonte erscheinen, so ist es gerade dasselbe, als wenn man sich den Mittelpunkt durch die Refraktion um $16'$ erhoben denken würde und liesse den Mittelpunkt erscheinen u. s. w. Die Grössen δ und α beziehen sich immer nur auf den Mittelpunkt.

Will man also in Nr. 2 den Ort finden, für den zur Zeit des Sommersolstitiums (23. Juni) während 24 Stunden beständig wenigstens ein Theil der Sonne über dem Horizonte ist, so dass also um Mitternacht der obere Rand noch bemerkt wird, und er erst um folgende Mitternacht wieder untertaucht, so findet man

$$b = 90^0 - (\alpha + \varepsilon + 16').$$

Eben so wäre in Nr. 3 unter denselben Voraussetzungen $\delta = 90^0 - (b + \varepsilon + 16')$.

Will man für Orte, die einen längsten Tag $\gtrless 24$ Stunden haben, die Dauer der längsten Nacht bestimmen, so hat man die Zeit zu ermitteln[1], die verfliesst von dem Augenblicke, da der Stundenwinkel beim Aufgange der Sonne $= 0$ ist, bis zu dem, wo er es beim Untergange ist. Bezieht man Alles auf den obern Rand, so ist also

$$\cos(90^0 + \varepsilon + 16') = \sin b \sin \delta + \cos b \cos \delta = \cos(b - \delta),$$
$$b - \delta = 90^0 + \varepsilon + 16', \; \delta = -(90^0 + \varepsilon + 16' - b).$$

Wenn also die Deklination der Sonne $= -(90^0 + \varepsilon + 16' - b)$ (also südlich) geworden ist, erscheint zum letzten Male für Orte, deren Breite b ist, der obere Rand der Sonne am Horizonte, und sie haben Nacht, bis wieder die Deklination diese Grösse erlangt hat.

5) Ehe die Sonne aufgeht, oder nachdem sie untergegangen ist, erscheint, durch Zurückwerfung des Lichtes in der Luft, Helle, welche man Dämmerung zu nennen pflegt.

Die Erfahrung hat gelehrt, dass wenn (Morgens) in Folge der Dämmerung die kleinsten Sterne aufhören sichtbar zu seyn, die

Sonne noch ungefähr 18^0 unter dem Horizont sich befindet, während man ohne Licht noch Gedrucktes zu lesen vermag, wenn sie sich ungefähr $6\frac{1}{2}^0$ unter dem Horizont befindet. Um zu bestimmen, wie lange an einem bestimmten Orte die Dämmerung dauere, wird man, wie in Nr. 1 den Stundenwinkel s für den Fall bestimmen, dass die Zenithdistanz der Sonne 108^0 beträgt (oder $96\frac{1}{2}^0$ für den zweiten Fall), so wie s_2 für die Zenithdistanz 90^0 (wenn man die Refraktion hier ausser Acht lässt, da es bei diesen Rechnungen auf ausserordentliche Genauigkeit nicht ankommen kann); die Differenz $s_1 - s_2$, in Zeit verwandelt, gibt die Dauer der Dämmerung. Ist also δ die Deklination der Sonne, b die Breite des Ortes, so ist

$$\cos s_1 = \frac{\cos 108^0 - \sin\delta \sin b}{\cos\delta \cos b},\ \cos s_2 = -\frac{\sin\delta \sin b}{\cos\delta \cos b} = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} b,$$

wenn man die Aenderung in der Deklination unbeachtet lässt. Zieht man hieraus s_1, s_2, so ist $\frac{s_1 - s_2}{15}$ = Dauer der (Morgen- oder Abend-) Dämmerung.

Ist der Ort auf der Erde so gelegen, dass um Mitternacht die Zenithdistanz der Sonne nicht mehr als 108^0 beträgt, so tritt die immerwährende Dämmerung ein, indem alsdann Abend- und Morgendämmerung unmittelbar in einander übergehen. Will man für einen Ort der Erde den Tag bestimmen, an dem diess zuerst Statt findet, so hat man δ aus der Gleichung:

$$\cos 108^0 = \sin\delta \sin b + \cos\delta \cos b \cos 180^0 = -\cos(\delta + b)$$

zu bestimmen, d. h. man hat

$$108^0 = 180^0 - (\delta + b),\ \delta = 72^0 - b.$$

An dem Tage, an welchem die Deklination der Sonne $= 72^0 - b$ ist, wird also immerwährende Dämmerung eintreten, und jeden Tag sich wiederholen, bis die Deklination der Sonne wieder $72^0 - b$ geworden. (Die Deklination der Sonne ist nie grösser als $23^0 27' 28''$). — Wan wird nun auch leicht einsehen, in welcher Weise die hier noch etwa zu stellenden Aufgaben dieser Art zu lösen wären, so wie ganz in derselben Weise in Bezug auf Auf- und Untergang eines Sterns verfahren werden kann. Ist der Stern ein Fixstern, d. h. ändert er seinen Ort am Himmel nicht, so wird die Deklination desselben immer dieselbe bleiben; der Stundenwinkel, durch Divi-

sion mit 15 in Zeit verwandelt, wird aber dann **Sternzeit** angeben, d. h. eine Stunde wird der 24. Theil des Zeitraums seyn, innerhalb dessen der Sternenhimmel seine Umdrehung einmal vollendet. Diese Zeit ist verschieden von mittlerer Sonnenzeit (Nr. 1), und es sind 24 Stunden Sternzeit = 23 St. 56 M. 4·1 Sek. mittlere Sonnenzeit, und 24 Stunden mittlere Sonnenzeit = 24 St. 3 M. 56·6 Sek. Sternzeit.

6) Die Deklination der Sonne, die wir im Vorstehenden für jeden Tag als bekannt angenommen haben, wird aus den astronomischen Tafeln entnommen; diese letztern sind aber für einen gewissen Ort (z. B. Berlin oder Wien) berechnet, so dass sie für jeden Tag eines Jahres die Deklination der Sonne im Augenblick, da sie den Meridian jenes Ortes durchschreitet, angeben. Gesetzt aber man wolle für einen Ort, dessen Lage auf der Erde bekannt sey, die Deklination der Sonne für den Augenblick finden, da sie den Meridian des letztern Ortes passirt, und dazu etwa die für Berlin berechneten Tafeln („Berliner astronomisches Jahrbuch“) benützen, so muss man zuerst die Lage des neuen Ortes A in Bezug auf Berlin feststellen. Zu dem Ende bestimmt man den Winkel, den der Berliner Meridian und der des Ortes A (die beide sich im Pole durchschneiden) mit einander machen, welchen Winkel wir von 0 bis 180^0 östlich und von 0 bis 180^0 westlich zählen und die **geographische Länge** des Ortes A in Bezug auf Berlin nennen. Da die Sonne in 24 Stunden (Sonnenzeit) 360^0 der Länge durchläuft, so wird sie in jeder Stunde 15^0 durchlaufen, und wenn nun A östlich (westlich) von Berlin, und zwar um t^0, liegt, so wird die Sonne $\frac{t}{15}$ Stunden früher (später) durch seinen Meridian gehen, d. h. der Mittag von A wird $\frac{t}{15}$ Stunden früher (später) eintreten, als der von Berlin. Man kann also leicht berechnen, welche Zeit in Berlin es ist, wenn der Mittag in A eintritt, und da man die Aenderung der Sonne in 24 Stunden aus den Tafeln entnehmen kann, so wird sich nach §. 49 der ersten Abtheilung die Deklination der Sonne für den Mittag in A finden lassen.

Sey z. B. A $28^0 45'$ westliche Länge von Berlin, und man will die Deklination der Sonne für seinen Mittag am 13. August haben.

Die Berliner Tafeln geben: 13. August 14° 46′ 37·5″, 14. August 14° 28′ 17·0″ 15. August 14° 9′ 42·7″.

Da A 28° 45′ westlich von Berlin liegt, so tritt der Mittag um $\frac{28\text{ St. }45\text{ M.}}{15} = 1$ St. 55 M. später ein als in Berlin, d. h. in letzterer Stadt ist es alsdann 1 Uhr 55 M., für welche Zeit man die Deklination der Sonne zu suchen hat.

$$\begin{array}{lll} 13.\ \text{Aug.}\ 14^0 46' 37{\cdot}5'' & & \\ & -18' 20{\cdot}5'' & \\ 14.\ \text{Aug.}\ 14^0 28' 17{\cdot}0'' & & -13{\cdot}8''. \\ & -18' 34{\cdot}3'' & \\ 15.\ \text{Aug.}\ 14^0\ 9' 42{\cdot}7'' & & \end{array}$$

$y_1 = 14^0 46' 37{\cdot}5''$, $\varDelta y_1 = -18' 20{\cdot}5''$, $\varDelta^2 y_1 = -13{\cdot}8''$, $h = 2$

$x - x_1 = 1\frac{11}{12}$, $\frac{x - x_1}{h} = \alpha = \frac{23}{288}$,

mithin in der Formel (h) (§. 49 der ersten Abthlg.):

$$B = -18' 20{\cdot}5'' - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{23}{288} - 1\right) 13{\cdot}8'' = -18' 14{\cdot}2'',$$

$$\alpha B = -1' 27{\cdot}4'',\ y = 14^0 45' 10{\cdot}1'',$$

d. h. die gesuchte Deklination ist 14° 45′ 10·1″.

§. 25.

Im Vorstehenden haben wir die geographische Breite des Beobachtungsortes als bekannt vorausgesetzt. Wir wollen desshalb einige Methoden betrachten, nach denen man dieselbe auf astronomischem Wege bestimmen kann. Die meisten kommen auf Höhenmessungen von Fixsternen zurück, deren unveränderliche Lage am Himmel bekannt ist; die Deklinationen, überhaupt die Lage der Fixsterne am Himmel ist zwar selbst etwas veränderlich, in den astronomischen Jahrbüchern ist jedoch hierauf schon Rücksicht genommen. Bei Höhenmessungen muss die Strahlenbrechung (Refraktion), die den Stern erhöht, also die Zenithdistanz verkleinert, vorher abgezogen werden, ehe man die Rechnung beginnt.*

Die einfachste Bestimmungsweise der geographischen Breite ist allerdings die, dass man bei einem Sterne, der nicht untergeht,

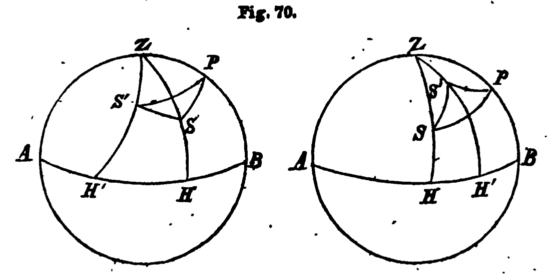
* Die besten Tafeln zur Berechnung der astronomischen Refraktion sind die von Bessel in „Tabulae Regiomontanae etc." S. 538 ff. gegebenen, die auch in „Sammlung von Hilfstafeln. Herausgegeben im Jahre 1822 von H. C. Schumacher. Neu herausgegeben und vermehrt von G. H. L. Warnstorff. Altona. 1845." S. 30 ff. abgedruckt und zum Gebrauch erläutert sind.

also nahe am Nordpole sich befindet, die Höhe (Zenithdistanz) misst, wenn er den Meridian passirt. Da diess in 24 Stunden zweimal geschieht, so erhält man zwei Höhen, und da beide Male der Stern gleich weit vom Pole absteht, so gibt die halbe Summe beider Höhen die Höhe des Pols, oder die geographische Breite.

Nicht immer kann oder will man aber diese Methode anwenden und man hat desshalb andere erfunden, von denen wir eine oder die andere näher betrachten wollen.

I. Ein Stern, dessen Deklination δ genau bekannt ist, wurde zu zwei verschiedenen Zeiten östlich vom Meridian beobachtet und seine Zenithdistanzen z, z′, so wie die Zwischenzeit t (nach Sternzeit) gemessen; man soll hieraus die geographische Breite φ des Beobachtungsortes ermitteln.

Fig. 70.



Seyen S, S′ die zwei Lagen des Sterns, AZB der Meridian des Beobachtungsortes, Z sein Zenith, P der Nordpol, AB der Horizont, so ist

$$ZS = z,\ ZS' = z',\ (SH = h,\ S'H' = h',\ \text{wenn h und h' die Höhen}),$$
$$PS = PS' = 90^0 - \delta,\ ZP = 90^0 - \varphi,$$

und ZPS der Stundenwinkel der ersten Beobachtung. Der Winkel SPS′ findet sich, wenn man t in Winkel verwandelt, d. h. 1 Stunde $= 15^0$ setzt. In dem Dreiecke PSS′ kennt man nun die Seiten PS = PS′ nebst SPS′ findet also SS′ nebst PSS′ (§. 11); in ZSS′ kennt man jetzt alle drei Seiten, kann also ZSS′ berechnen (§. 9); der Winkel ZSP ist = PSS′ — ZSS′ oder er ist = PSS′ + ZSS′. Welcher der beiden Fälle Statt finde, wird sich in der Praxis immer entscheiden lassen. In dem Dreiecke ZSP kennt man nun ZS, PS nebst ZSP, kann also die übrigen Stücke, namentlich $ZP = 90^0 - \varphi$ berechnen (§. 11).

Es wird leicht seyn, diese Auflösung auf die Fälle auszudehnen,

da beide Beobachtungen westlich vom Meridian, oder auf verschiedenen Seiten desselben gemacht wurden.

Es dürfte nicht ohne Interesse seyn, eine analytische Auflösung dieser Aufgabe hier beizufügen.

In den Dreiecken ZPS, ZPS' hat man, wenn ZPS = s, ZPS' = s':

$$\cos z = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos s,$$
$$\cos z' = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos s';$$

zugleich ist $s' = s - \tau$, wenn τ die in Winkel verwandelte Zeit t bedeutet, d. h. also man wird φ und s zu bestimmen haben aus:

$$\cos z = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos s,$$
$$\cos z' = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos(s - \tau).$$

Durch Subtraction und Addition folgt aus diesen Gleichungen (erste Abthlg. §. 14):

$$\sin\frac{z+z'}{2}\sin\frac{z-z'}{2} = \cos\delta \cos\varphi \sin(s - \tfrac{1}{2}\tau)\sin\tfrac{1}{2}\tau,$$

$$\cos\frac{z+z'}{2}\cos\frac{z-z'}{2} = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos(s-\tfrac{1}{2}\tau)\cos\tfrac{1}{2}\tau,$$

d. h. $\cos\varphi\sin(s - \tfrac{1}{2}\tau) = a, \ \cos\varphi\cos(s-\tfrac{1}{2}\tau) = b - c\sin\varphi,$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$a = \frac{\sin\frac{z+z'}{2}\sin\frac{z-z'}{2}}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}\tau}, \quad b = \frac{\cos\frac{z+z'}{2}\cos\frac{z-z'}{2}}{\cos\delta\cos\frac{1}{2}\tau}, \quad c = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos\frac{1}{2}\tau}.$$

Quadrirt man beide Gleichungen und addirt sie, so ist

$$\cos^2\varphi = a^2 + b^2 - 2bc\sin\varphi + c^2\sin^2\varphi,$$

d. h. weil $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$:

$$1 - (a^2 + b^2) = (1 + c^2)\sin^2\varphi - 2bc\sin\varphi,$$

woraus

$$\sin\varphi = \frac{bc}{1+c^2} \pm \sqrt{\frac{1-a^2-b^2}{1+c^2} + \frac{b^2c^2}{(1+c^2)^2}}$$
$$= \frac{bc \pm \sqrt{1 - a^2 - b^2 + c^2 - a^2c^2}}{1+c^2}.$$

Hieraus folgen zwei zwischen -90^0 und $+90^0$ liegende Werthe von φ, zwischen denen man dann zu wählen hat. Will man obige Formel zu logarithmischer Rechnung bequemer machen, so setze man:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos\frac{1}{2}\tau}, \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg}\frac{z+z'}{2}\operatorname{tg}\frac{z-z'}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\tau}{\cos\psi},$$

$$\cos\xi = \frac{\sin\frac{z+z'}{2}\sin\frac{z-z'}{2}}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}\tau\sin\mu},\ \operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}\xi}{\cos\mu},$$

und erhält

$$\sin\varphi = \frac{\sin\xi\sin(\psi\pm\omega)}{\sin\omega},$$

wobei ψ, μ, ξ, ω zwischen 0 und 180° gerechnet sind.

Man hat nämlich:

$$\operatorname{tg}\psi = c,\ \operatorname{tg}\mu = \frac{a}{b\cos\psi},\ \cos\xi = \frac{a}{\sin\mu},\ \operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}\xi}{\cos\mu},$$

also

$$\frac{1-a^2-b^2}{1+c^2} + \frac{b^2c^2}{(1+c^2)^2} = (1-a^2-b^2)\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi\cos^2\psi$$

$$= (1-a^2-b^2)\cos^2\psi + b^2\cos^2\psi\,(1-\cos^2\psi) =$$
$$\cos^2\psi(1-a^2-b^2\cos^2\psi),$$

$$a = b\cos\psi\operatorname{tg}\mu;\ a^2+b^2\cos^2\psi = b^2\cos^2\psi(1+\operatorname{tg}^2\mu) = \frac{b^2\cos^2\psi}{\cos^2\mu}$$

$$= \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\mu\cos^2\mu} = \frac{a^2}{\sin^2\mu} = \cos^2\xi,$$

$$1-a^2-b^2\cos^2\psi = 1-\cos^2\xi,\ \frac{1-a^2-b^2}{1+c^2} + \frac{b^2c^2}{(1+c^2)^2} = \cos^2\psi\sin^2\xi,$$

$$\sin\varphi = b\sin\psi\cos\psi \pm \cos\psi\sin\xi = \frac{a\sin\psi}{\operatorname{tg}\mu} \pm \cos\psi\sin\xi = \cos\xi\sin\psi\cos\mu$$
$$\pm\cos\psi\sin\xi = \cos\xi\,(\sin\psi\cos\mu \pm \cos\psi\operatorname{tg}\xi) = \cos\xi\,(\sin\psi\cos\mu$$
$$\pm\cos\psi\operatorname{tg}\omega\cos\mu) = \frac{\cos\xi\cos\mu}{\cos\omega}(\sin\psi\cos\omega \pm \cos\psi\sin\omega)$$
$$= \frac{\cos\xi\cos\mu}{\cos\omega}\sin(\psi\pm\omega) = \frac{\sin\xi}{\sin\omega}\sin(\psi\pm\omega).$$

Kennt man φ schon ziemlich nahe, so kann man einen mehr genäherten Werth auch dadurch erhalten, dass man aus der Gleichung

$$\sin(s-\tfrac{1}{2}\tau) = \frac{\sin\frac{z+z'}{2}\sin\frac{z-z'}{2}}{\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\tau},$$

in der man den genäherten Werth von φ benützt, einen näherungsweise richtigen Werth von s sucht, und dann mit $s-\tau$ für ZPS′ das Dreieck ZPS′ auflöst.

Hat man nun φ gefunden, so ergibt sich s sehr leicht.

Hat man die Höhen h, h′ gemessen, so ist

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{cotg}\frac{h+h'}{2}\operatorname{tg}\frac{h'-h}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\tau}{\cos\psi},\quad \cos\xi = \frac{\cos\frac{h+h'}{2}\sin\frac{h'-h}{2}}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}\tau\sin\mu}.$$

Ein Beispiel mag zur Erläuterung dienen. Die Angaben sind:

$$\delta = -2^\circ 14' 9'',\ h = 26^\circ 33' 21{\cdot}0'',\ h' = 36^\circ 41' 11{\cdot}8'',$$
$$t = 2\,\text{St.}\ 35\,\text{M.}\ 46{\cdot}5\,\text{Sek.}$$

Daraus

$$\tau = 38^\circ 56' 37{\cdot}5'',\ \tfrac{1}{2}\tau = 19^\circ 28' 18{\cdot}7'',\ \tfrac{1}{2}(h'+h) = 31^\circ 37' 16{\cdot}4'',$$
$$\tfrac{1}{2}(h'-h) = 5^\circ 3' 55{\cdot}4''.$$

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg}\delta &= 8{\cdot}5915373(-) \\ E\log\cos\tfrac{1}{2}\tau &= 0{\cdot}0255779 \\ \hline \log\operatorname{tg}\psi &= 8{\cdot}6171152(-) \\ \psi &= 177^\circ 37' 43{\cdot}3'', \\ \log\cos\psi &= 9{\cdot}9996280(-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\operatorname{cotg}\frac{h'+h}{2} &= 10{\cdot}2106204(-) \\ \log\operatorname{tg}\frac{h'-h}{2} &= 8{\cdot}9476237 \\ \log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\tau &= 10{\cdot}4515295(-) \\ E\log\cos\psi &= 0{\cdot}0003720(-) \\ \hline \log\operatorname{tg}\mu &= 9{\cdot}6101456(-), \\ \log\sin\mu &= 9{\cdot}5767832, \\ \log\cos\mu &= 9{\cdot}9666378(-). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\cos\frac{h'+h}{2} &= 9{\cdot}9302014 \\ \log\sin\frac{h'-h}{2} &= 8{\cdot}9459242 \\ E\log\cos\delta &= 0{\cdot}0003306 \\ E\log\sin\tfrac{1}{2}\tau &= 0{\cdot}4771074 \\ E\log\sin\mu &= 0{\cdot}4232167 \\ \hline \log\cos\xi &= 9{\cdot}7767803, \\ \log\sin\xi &= 9{\cdot}9038573, \\ \log\operatorname{tg}\xi &= 10{\cdot}1270769. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg}\xi &= 10{\cdot}1270769 \\ E\log\cos\mu &= 0{\cdot}0333621(-) \\ \hline \log\operatorname{tg}\omega &= 10{\cdot}1604390(-) \\ \omega &= 124^\circ 38' 58{\cdot}5'', \\ \psi+\omega &= 302^\circ 16' 41{\cdot}8'', \\ \psi-\omega &= 52^\circ 58' 44{\cdot}8'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\sin\xi &= 9{\cdot}9038573 \\ \log\sin(\psi-\omega) &= 9{\cdot}9022292 \\ E\log\sin\omega &= 0{\cdot}0847876 \\ \hline \log\sin\varphi &= 9{\cdot}8908741 \\ \varphi &= 51^\circ 3' 38{\cdot}1'' \end{aligned}$$

$$\log \sin \xi = 9{\cdot}9038573$$
$$\log \sin (\psi + \omega) = 9{\cdot}9270953\,(-)$$
$$E \log \sin \omega = 0{\cdot}0847876$$
$$\log \sin \varphi = 9{\cdot}9157402\,(-)$$
$$\varphi = -\, 55^{\circ}\, 27'\, 5''.\,*$$

Da der Beobachtungsort auf der nördlichen Erdhälfte lag, so gilt bloss der erste Werth von φ. Wir haben oben angenommen, beide Beobachtungen geschehen östlich vom Meridian. Es sind aber offenbar noch folgende Fälle denkbar:

1) Die erste Beobachtung geschieht östlich, die zweite westlich vom Meridian. Jetzt tritt an die Stelle von $s - \tau$ die Grösse $\tau - s$, da der zweite Stundenwinkel westlich ist; da aber $\cos (s - \tau) = \cos (\tau - s)$, so bleiben alle Gleichungen ungeändert

2) beide Beobachtungen sind westlich vom Meridian. Jetzt ist s ein westlicher Stundenwinkel und statt $s - \tau$ hat man $s + \tau$, so dass bloss $-\tau$ für τ zu setzen ist, man also hat:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \frac{1}{2} \tau},\quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{cotg} \frac{h + h'}{2} \operatorname{tg} \frac{h - h'}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \tau,}{\cos \psi}$$

$$\cos \xi = \frac{\cos \frac{h + h'}{2} \sin \frac{h - h'}{2}}{\cos \delta \sin \frac{1}{2} \tau \sin \mu},\quad \operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{tg} \xi}{\cos \mu},\quad \sin \varphi = \frac{\sin \xi \sin (\psi \pm \omega)}{\sin \omega}.$$

3) Die erste ist westlich. Die zweite wieder östlich. Jetzt ist s wieder ein westlicher Stundenwinkel und für $s - \tau$ kommt $360^{\circ} - (s + \tau)$; da aber $\cos [360^{\circ} - (s + \tau)] = \cos (s + \tau)$, so ist die Auflösung dieselbe, wie in Nr. 2.

Anmerkung. Es kann sich ereignen, dass für den Fall in Nr. 1: $h = h'$ wäre. Alsdann wäre $h' - h = 0$, also $\operatorname{tg} \mu = 0$, d. h. $\mu = 0$; aber da in der Formel für $\cos \xi$ im Zähler $\sin \frac{h' - h}{2}$ und im Nenner $\sin \mu$ Null sind, so könnte man in Verlegenheit kommen, welches hier der Werth von ξ sey. Man wird sich nun in folgender Weise helfen.

Allerdings ist $\mu = 0$; sodann folgt aber aus der Formel für $\operatorname{tg} \mu$:

---

* Man wird leicht bemerken, dass unsere Formeln auch noch gelten, wenn der Beobachtungsort auf der südlichen Erdhälfte sich befindet, in welchem Falle φ negativ wäre. Die Deklination muss natürlich dabei immer vom Nordpol aus gerechnet werden.

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(h' - h)}{\sin \mu} = \frac{\cos \psi \operatorname{tg} \frac{1}{2}(h' + h) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \tau \cos \frac{1}{2}(h' - h)}{\cos \mu},$$

also wenn man $\mu = 0$, $h' - h = 0$, setzt, so ist der Werth der ersten Seite $= \cos \psi \operatorname{tg} h \operatorname{tg} \frac{1}{2} \tau$, mithin ist

$$\cos \xi = \frac{\cos \frac{1}{2}(h + h)}{\cos \delta \sin \frac{1}{2} \tau} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(h - h)}{\sin \mu} = \frac{\cos h}{\cos \delta \sin \frac{1}{2} \tau} \cdot \cos \psi \operatorname{tg} h \operatorname{tg} \frac{1}{2} \tau = \frac{\cos \psi \sin h}{\cos \delta \cos \frac{1}{2} \tau},$$

und für $\mu = 0$: $\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \xi$, $\omega = \xi$. Mithin hat man in diesem Falle folgende Auflösung:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \frac{1}{2} \tau}, \quad \cos \xi = \frac{\cos \psi \sin h}{\cos \delta \cos \frac{1}{2} \tau}, \quad \sin \varphi = \sin (\psi \pm \xi).$$

(Uebrigens ist hier direkt $s = \frac{1}{2} \tau$, wodurch die Aufgabe auf §. 13 reduzirt ist).

Dasselbe gilt, wenn im Falle Nr. 3 $h' = h$ wäre.

II. Aus drei, auf der östlichen Seite des Meridians gemessenen Höhen h, h', h'' desselben Fixsterns, so wie den gemessenen Zwischenzeiten, die Breite des Beobachtungsortes (nebst Deklination des Sterns und Stundenwinkel der ersten Beobachtung) zu bestimmen.

Ist wieder φ die Breite des Beobachtungsortes, δ die (unbekannte) Deklination, s der (unbekannte) Stundenwinkel der ersten Beobachtung, τ, τ' die in Winkel verwandelte Zwischenzeit zwischen der ersten und zweiten, ersten und dritten Beobachtung, so hat man wie in I:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s,$$
$$\sin h' = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (s - \tau),$$
$$\sin h'' = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (s - \tau'),$$

Hieraus ergibt sich durch Subtraktion:

$$\cos \frac{h' + h}{2} \sin \frac{h' - h}{2} = \cos \varphi \cos \delta \sin (s - \tfrac{1}{2} \tau) \sin \tfrac{1}{2} \tau,$$

$$\cos \frac{h'' + h}{2} \sin \frac{h'' - h}{2} = \cos \varphi \cos \delta \sin (s - \tfrac{1}{2} \tau') \sin \tfrac{1}{2} \tau',$$

woraus durch Division:

$$\frac{\cos \frac{h' + h}{2} \sin \frac{h' - h}{2}}{\cos \frac{h'' + h}{2} \sin \frac{h'' - h}{2}} = \frac{\sin (s - \frac{1}{2} \tau) \sin \frac{1}{2} \tau}{\sin (s - \frac{1}{2} \tau') \sin \frac{1}{2} \tau'},$$

d. h.

$$\frac{\sin (s - \frac{1}{2} \tau)}{\sin (s - \frac{1}{2} \tau')} = \frac{\cos \frac{h' + h}{2} \sin \frac{h' - h}{2} \sin \frac{1}{2} \tau'}{\cos \frac{h'' + h}{2} \sin \frac{h'' - h}{2} \sin \frac{1}{2} \tau} = a,$$

also

$$\sin(s - \tfrac{1}{2}\tau) = a \sin(s - \tfrac{1}{2}\tau'),\ \sin s \cos \tfrac{1}{2}\tau - \cos s \sin \tfrac{1}{2}\tau = a \sin s \cos \tfrac{1}{2}\tau' - a \cos s \sin \tfrac{1}{2}\tau',$$

woraus, nachdem man mit cos s dividirt:

$$\operatorname{tg} s (\cos \tfrac{1}{2}\tau - a \cos \tfrac{1}{2}\tau') = \sin \tfrac{1}{2}\tau - a \sin \tfrac{1}{2}\tau',$$

$$\operatorname{tg} s = \frac{\sin \frac{1}{2}\tau - a \sin \frac{1}{2}\tau'}{\cos \frac{1}{2}\tau - a \cos \frac{1}{2}\tau'}.$$

Da s zwischen 0 und 180° liegt, so bestimmt diese Formel s ganz unzweideutig. Will man jedoch, behufs logarithmischer Rechnung, eine bequemere Formel haben, so hat man:

$$\frac{\sin(s - \frac{1}{2}\tau') + \sin(s - \frac{1}{2}\tau)}{\sin(s - \frac{1}{2}\tau') - \sin(s - \frac{1}{2}\tau)} = \frac{1+a}{1-a},$$

$$\frac{\sin[s - \frac{1}{4}(\tau' + \tau)] \cos \frac{1}{4}(\tau - \tau')}{\cos[s - \frac{1}{4}(\tau' + \tau)] \sin \frac{1}{4}(\tau - \tau')} = \frac{1+a}{1-a}.$$

Setzt man nun

$$a = \operatorname{tg}\psi = \frac{\cos \frac{1}{2}(h' + h) \sin \frac{1}{2}(h' - h) \sin \frac{1}{2}\tau'}{\cos \frac{1}{2}(h'' + h) \sin \frac{1}{2}(h'' - h) \sin \frac{1}{2}\tau},$$

also

$$\frac{1+a}{1-a} = \frac{1 + \operatorname{tg}\psi}{1 - \operatorname{tg}\psi} = \operatorname{tg}(\psi + 45^0),$$

so ist

$$\operatorname{tg}[s - \tfrac{1}{4}(\tau + \tau')] \operatorname{cotg} \tfrac{1}{4}(\tau - \tau') = \operatorname{tg}(\psi + 45^0),$$

$$\operatorname{tg}[s - \tfrac{1}{4}(\tau + \tau')] = -\operatorname{tg} \tfrac{1}{4}(\tau' - \tau) \operatorname{tg}(\psi + 45^0). \quad \text{(a)}$$

Da $s - \frac{1}{4}(\tau + \tau')$ zwischen 0 und 180° liegt, so bestimmt diese Gleichung $s - \frac{1}{4}(\tau + \tau')$, also auch s. Nunmehr ist

$$\cos\varphi \cos\delta = \frac{\cos \frac{h + h'}{2} \sin \frac{h' - h}{2}}{\sin(s - \frac{1}{2}\tau) \sin \frac{1}{2}\tau},$$

und ferner

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \left(1 - 2 \sin^2 \frac{s}{2}\right)$$

$$= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \left(2 \cos^2 \frac{s}{2} - 1\right).$$

d. h.

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta) - \frac{2 \cos \frac{h + h'}{2} \sin \frac{h' - h}{2}}{\sin(s - \frac{1}{2}\tau) \sin \frac{1}{2}\tau} \sin^2 \frac{s}{2},$$

$$= -\cos(\varphi+\delta) + \frac{2\cos\frac{h+h'}{2}\sin\frac{h'-h}{2}}{\sin(s-\frac{1}{2}\tau)\sin\frac{1}{2}\tau}\cos^2\frac{s}{2},$$

Hieraus folgt

$$\cos(\varphi-\delta) = \sin h + \frac{2\cos\frac{h+h'}{2}\sin\frac{h'-h}{2}\sin^2\frac{s}{2}}{\sin(s-\frac{1}{2}\tau)\sin\frac{1}{2}\tau},$$

$$\cos(\varphi+\delta) = -\sin h + \frac{2\cos\frac{h+h'}{2}\sin\frac{h'-h}{2}\cos^2\frac{s}{2}}{\sin(s-\frac{1}{2}\tau)\sin\frac{1}{2}\tau}.$$

Man bestimme nun ξ, ζ so dass

$$\operatorname{tg}\xi = \sin\frac{s}{2}\sqrt{\frac{2\cos\frac{h'+h}{2}\sin\frac{h'-h}{2}}{\sin h\sin(s-\frac{1}{2}\tau)\sin\frac{1}{2}\tau}}$$

$$= \sin\frac{s}{2}\sqrt{\frac{2\cos\frac{h''+h}{2}\sin\frac{h''-h}{2}}{\sin h\sin(s-\frac{1}{2}\tau')\sin\frac{1}{2}\tau'}},\quad \operatorname{tg}\zeta = \operatorname{cotg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\xi,$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} &\cos(\varphi-\delta) = \sin h + \sin h\operatorname{tg}^2\xi = \frac{\sin h}{\cos^2\xi},\\ &\cos(\varphi+\delta) = -\sin h + \sin h\operatorname{tg}^2\zeta = -\sin h(1-\operatorname{tg}^2\zeta)\\ &\qquad = -\frac{\sin h\cos 2\zeta}{\cos^2\zeta}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

Sind γ, γ' die zwischen 0 und 180° liegenden Werthe von $\varphi-\delta$, $\varphi+\delta$, die hieraus folgen, so hat man:

$$\left\{\begin{aligned}\varphi-\delta&=\gamma\\ \varphi+\delta&=\gamma',\end{aligned}\right.\quad \left\{\begin{aligned}\varphi-\delta&=\gamma\\ \varphi+\delta&=-\gamma',\end{aligned}\right.\quad \left\{\begin{aligned}\varphi-\delta&=-\gamma\\ \varphi+\delta&=\gamma',\end{aligned}\right.\quad \left\{\begin{aligned}\varphi-\delta&=-\gamma\\ \varphi+\delta&=-\gamma',\end{aligned}\right.$$

d. h.

$$\left\{\begin{aligned}\varphi&=\tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma')\\ \delta&=\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma),\end{aligned}\right.\quad \begin{aligned}\varphi&=\tfrac{1}{2}(\gamma-\gamma')\\ \delta&=-\tfrac{1}{2}(\gamma'+\gamma),\end{aligned}\quad \begin{aligned}\varphi&=\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma)\\ \delta&=\tfrac{1}{2}(\gamma'+\gamma),\end{aligned}\quad \begin{aligned}\varphi&=-\tfrac{1}{2}(\gamma'+\gamma)\\ \delta&=\tfrac{1}{2}(\gamma-\gamma').\end{aligned}$$

Da sich nun in der Wirklichkeit leicht wird entscheiden lassen, ob $\varphi = \pm\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')$, oder $= \pm\frac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$, so geben die (b) die genaue Lösung unserer Aufgabe.

Im Vorstehenden wurde vorausgesetzt, dass alle drei Beobachtungen östlich vom Meridian gemacht wurden. Es sind aber noch folgende Fälle möglich:

1) Die zwei ersten östlich, die dritte westlich. Für $s-\tau'$ hat

man nunmehr $\tau' - s$, so dass die Grundgleichungen dieselben bleiben. Dasselbe gilt für die Formeln (b). Was (a), so sey λ der zwischen 0 und 180° liegende Winkel für den

$$\operatorname{tg}\lambda = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\tau' - \tau)\operatorname{tg}(\psi + 45^0),$$

so ist (erste Abthlg. §. 10)

$$s - \tfrac{1}{2}(\tau + \tau') = \lambda + n.180^0,$$

wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist. Demnach

$$s = \lambda + \tfrac{1}{2}(\tau + \tau') + n.180^0,$$

und man hat die ganze Zahl n so zu wählen, dass s zwischen 0 und 180° fällt, was offenbar nur einen einzigen Werth für n gibt. (Wäre z. B. $\lambda = 135^0$, $\tfrac{1}{2}(\tau + \tau') = 76^0 30'$, so wäre $\lambda + \tfrac{1}{2}(\tau + \tau') = 211^0 30'$, also müsste $n = -1$ d. h. $s = 211^0 30' - 180^0 = 31^0 30'$ seyn.)

2) Die erste östlich, die zwei andern westlich. Für $s - \tau$, $s - \tau'$ sind zu setzen $\tau - s$, $\tau' - s$, so dass die Grundgleichungen dieselben bleiben. Für (a) gilt dasselbe wie so eben unter Nr. 1.

3) Alle drei westlich. Jetzt treten $s + \tau$, $s + \tau'$ an die Stelle von $s - \tau$, $s - \tau'$, so dass also $-\tau$, $-\tau'$ für τ, τ' zu setzen sind. Man hat demnach:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\cos\frac{h+h'}{2}\sin\frac{h-h'}{2}\sin\frac{1}{2}\tau'}{\cos\frac{h+h''}{2}\sin\frac{h-h''}{2}\sin\frac{1}{2}\tau},$$

$$\operatorname{tg}[s + \tfrac{1}{2}(\tau + \tau)] = \operatorname{tg}\frac{\tau' - \tau}{4}\operatorname{tg}(\psi + 45^0),$$

$$\operatorname{tg}\xi = \sin\frac{s}{2}\sqrt{\frac{2\cos\frac{h+h'}{2}\sin\frac{h-h'}{2}}{\sin h \sin(s + \frac{1}{2}\tau)\sin\frac{1}{2}\tau}}$$

$$= \sin\frac{s}{2}\sqrt{\frac{2\cos\frac{h+h''}{2}\sin\frac{h-h''}{2}}{\sin h \sin(s + \frac{1}{2}\tau')\sin\frac{1}{2}\tau'}}, \quad \operatorname{tg}\zeta = \operatorname{cotg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\xi.$$

Die (b) bleiben ungeändert.

4) Die zwei ersten westlich, die dritte östlich. In Nr. 3 tritt $360^0 - (s + \tau')$ an die Stelle von $s + \tau'$, so dass Alles bleibt, wie so eben. Der Werth von s wird in analoger Weise bestimmt, wie in Nr. 1.

5) Die erste westlich, die zwei andern östlich. Die Auflösung in Nr. 3 bleibt auch hier.

Anmerkung. Im Falle Nr. 1 könnte $h = h''$, oder $h' = h''$ seyn. Für $h = h''$ ist in obigen Formeln offenbar

$$\cos\varphi \cos\delta \sin(s - \tfrac{1}{2}\tau') \sin\tfrac{1}{2}\tau' = 0,$$

also da nicht $\cos\varphi$, $\cos\delta$, $\sin\frac{1}{2}\tau'$ Null sind, ist $\sin(s - \frac{1}{2}\tau') = 0$, d. h. $s = \frac{1}{2}\tau'$, so dass s ganz direkt bestimmt ist, und man der Formel (a) nicht weiter bedarf. Zur Bestimmung von $\operatorname{tg}\xi$ wählt man nun den ersten Werth. — Für $h' = h''$ hatte man $s = \frac{1}{2}(\tau + \tau')$, oder man könnte die Formeln des Textes geradezu anwenden.

Im Falle Nr. 2 könnte $h = h'$, oder $h = h''$ seyn. Für $h = h'$ wäre $s = \frac{1}{2}\tau$ und man würde zur Bestimmung von $\operatorname{tg}\xi$ den zweiten Werth wählen; für $h = h''$ wäre $s = \frac{1}{2}\tau'$ und für $\operatorname{tg}\xi$ hätte man den ersten Werth zu nehmen.

Für Nr. 4 könnte $h = h''$, oder $h' = h''$ seyn. Da jetzt für $h = h''$ (und $-\tau'$ statt τ'):

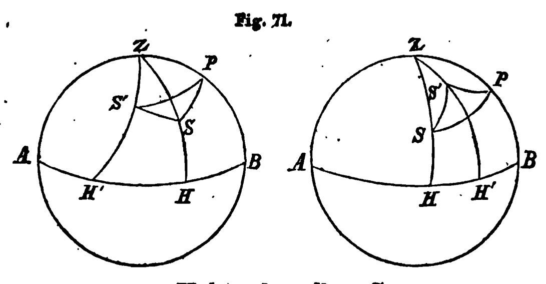
$$\varphi \cos\cos\delta \sin(s + \tfrac{1}{2}\tau') \sin\tfrac{1}{2}\tau' = 0,$$

so ist $\sin(s + \frac{1}{2}\tau') = 0$, also $s + \frac{1}{2}\tau' = 180^0$, mithin $s = 180^0 - \frac{1}{2}\tau'$. Uebrigens wäre jetzt auch $\psi = 90^0$, wodurch man dasselbe erhalten würde. Der Fall $h' = h''$ kann geradezu durch unsere Formeln erledigt werden; übrigens ist dann $s = 180^0 - \frac{\tau + \tau'}{2}$.

Für Nr. 5 könnte $h = h'$, oder $h = h''$ seyn. Wenn $h = h'$, so ist $s = 180^0 - \frac{1}{2}\tau$; wenn $h = h''$: $s = 180^0 - \frac{1}{2}\tau'$. Das Uebrige ist wie so eben.

III. Der Winkel am Zenith Z, den der Höhenkreis ZH und der Meridian AZB mit einander machen, heisst das **Azimuth** des Sterns S. Wir wollen dasselbe von Norden durch Osten nach Süden bis 180°, und von Norden durch Westen nach Süden ebenfalls bis 180° rechnen; alsdann ist der Winkel PZS in dem Dreiecke SZP das Azimuth von S. Das Azimuth wird offenbar vermittelst des Horizontalkreises eines Theodolithen gemessen, wenn man mit dem Höhenkreise die Höhe des Sterns beobachtet.

Fig. 71.



Aus zwei gemessenen Höhen desselben Sterns, dessen Deklination δ bekannt ist, so wie aus dem gemessenen Unterschiede der Azimuthe * des Sterns bei beiden Beobachtungen die Breite des Be-

* Der Unterschied der Azimuthe wird, wenn man mittelst eines Theodolithen, der einen Höhenkreis hat, beobachtet, auf dem horizontalen Kreise geradezu abge-

obachtungsortes (nebst dem Azimuthe der ersten Beobachtung) zu finden, wobei wir beide Beobachtungen auf der östlichen Seite des Meridians voraussetzen.

In Bezug auf die Richtung, nach welcher der Unterschied zweier Azimuthe gemessen wird, wollen wir immer annehmen, dass man von der ersten zur zweiten Beobachtung übergehe, indem man den Höhenkreis in der Richtung Nord-Ost-Süd-West dreht. Alsdann sey α das Azimuth von S, d. h. bei der ersten Beobachtung, a der so gemessene Unterschied, so ist das Azimuth von S′, d. h. der zweiten Beobachtung $= S'ZP$, entweder $= \alpha + a$ im ersten Falle, oder $\alpha + a - 360^0$ im zweiten, da für diesen Fall $SZS' = 360^0 - a$ und $S'ZP = SZP - SZS'$ ist.

Man hat nun in den Dreiecken ZPS, ZPS′:

$$\sin\delta = \sin h \sin\varphi + \cos h \cos\varphi \cos\alpha,$$
$$\sin\delta = \sin h' \sin\varphi + \cos h' \cos\varphi \cos(\alpha + a),$$

welche Formeln allgemein gelten, da $\cos(\alpha + a - 360^0) = \cos(\alpha + a)$ ist, und woraus φ und α zu bestimmen sind.

Vergleicht man diese Formeln mit den später in VIII aufgestellten, so wird man sich leicht überzeugen, dass folgendes Gleichungssystem unsere Aufgabe löse:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg} h'}{\cos a}, \quad \operatorname{tg}\xi = \frac{\cos\mu \operatorname{tg} a}{\sin(\mu - h)}, \quad \operatorname{tg}\eta = \frac{\operatorname{tg}\delta \cos h' \cos a \cos(\mu - h)}{\cos\mu},$$
$$\cos(\xi + \psi) = \frac{\sin\xi \sin(\delta - \eta)}{\cos\delta \cos\eta \cos h' \sin a}, \quad \operatorname{tg}\zeta = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos\psi},$$
$$\sin\varphi = \frac{\sin\delta \cos(\zeta - h)}{\sin\zeta},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\psi \cos\zeta}{\sin(\zeta - \delta)}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \cos\alpha \operatorname{cotg}(\zeta - h),$$

worin wegen der Winkel μ, ξ, η, ζ, ψ, φ dieselbe Bemerkung gilt, wie in VIII.

---

lesen. Die direkte Beobachtung eines Azimuthes setzt die Kenntniss der Meridiansrichtung auf der Erde voraus; umgekehrt aber wird auch die Kenntniss eines Azimuthes diese Meridiansrichtung geben. Nun werden wir in den folgenden Auflösungen jeweils das Azimuth bestimmen, oder doch leicht bestimmen können, so dass damit zugleich auch die Aufgabe gelöst ist, die Richtung des Meridians in dem Beobachtungsorte zu bestimmen. Kennt man diese einmal, so lassen sich dann leicht auch direkte Azimuthe messen, was einer weitern Erläuterung wohl nicht mehr bedarf.

Wir haben in unserer Ableitung beide Beobachtungen östlich vom Meridian vorausgesetzt. Wie in I ergeben sich aber noch folgende Fälle:

1) Die eine Beobachtung östlich, die zweite westlich vom Meridian. Jetzt ist das erste Azimuth (α) östlich, das zweite westlich; der Unterschied sey wieder a, gemessen, wie bereits angegeben. Das zweite Azimuth ist jetzt immer $360^\circ - (a + \alpha)$, wie man leicht sieht, da a + der Summe beider Azimuthe $= 360^\circ$ seyn muss. Die obigen Formeln bleiben also ungeändert. (Für $h = h'$ wäre $\alpha = 180^\circ - \frac{1}{2}a$, und man fände φ aus dem Dreieck ZPS).

2) Beide Beobachtungen sind westlich vom Meridian. Das erste Azimuth sey wieder α, a der wie bereits angegeben gemessene Unterschied, so ist das zweite $= \alpha - a$ oder $\alpha - a + 360^\circ$, so dass in obigen Formeln bloss $-a$ für a zu setzen ist.

3) Die erste Beobachtung westlich, die zweite wieder östlich vom Meridian. Die Azimuthe (erstes westlich, zweites östlich) sind α und $a - \alpha$; da aber $\cos(a - \alpha) = \cos(\alpha - a)$, gibt jetzt dieselbe Auflösung wie in Nr. 2, (für $h = h'$ wäre geradezu $\alpha = \frac{1}{2}a$, und man könnte φ leicht direkt finden).

Anmerkung. Wollte man die angegebene analytische Auflösung nicht benützen, so kann man eine rein trigonometrische an deren Stelle setzen. In dem Dreieck ZSS' kennt man $ZS = 90^\circ - h$, $ZS' = 90^\circ - h'$, $SZS' = a$, kann also dasselbe vollständig berechnen (§. 11), d. h. SS' nebst ZSS' finden. In PSS' kennt man jetzt $SP = S'P = 90^\circ - \delta$, SS', kann also (§. 9) den Winkel $PSS' = PS'S$ erhalten; alsdann ist $ZSP = PSS' \mp ZSS'$, woraus das Dreieck ZSP aufgelöst werden kann. Man sieht, dass eine doppelte Auflösung theoretisch möglich ist, wie diess auch in der analytischen Auflösung liegt. Man könnte diess übrigens wie in I ganz deutlich hervortreten lassen, indem man in ganz ähnlicher Weise $\sin\varphi$ bestimmen würde. Man fände so:

$$\sin\varphi = \frac{AB + CD \pm \sqrt{1 - (A^2 + C^2) + B^2 + D^2 - (BC - AD)^2}}{1 + B^2 + D^2},$$

wo

$$A = \frac{\sin\frac{1}{2}(h + h')\sin\frac{1}{2}(h - h')\sin\delta}{\cos h\cos h'\sin\frac{1}{2}a}, \quad B = \frac{\sin(h - h')}{2\cos h\cos h'\sin\frac{1}{2}a},$$

$$C = \frac{\cos\frac{1}{2}(h + h')\cos\frac{1}{2}(h - h')\sin\delta}{\cos h\cos h'\cos\frac{1}{2}a}, \quad D = \frac{\sin(h + h')}{2\cos h\cos h'\cos\frac{1}{2}a}.$$

IV. Aus drei auf der östlichen Seite des Meridians gemessenen Höhen desselben Sterns, so wie den gemessenen Unterschieden der Azimuthe soll die Breite des Beobachtungsortes (nebst Deklination des Sterns und erstem Azimuthe) berechnet werden.

Seyen h, h', h'' die drei beobachteten Höhen *, δ die Deklination des Sterns, α das erste Azimuth, und man habe die Azimuthaldifferenzen so gemessen, dass man von der ersten zur zweiten, und von der ersten zur dritten Lage in der Drehungsrichtung Ost-Süd-West-Nord fortgeschritten ist; dieselben seyen a, a', so hat man wie in III:

$$\sin\delta = \sin h \sin\varphi + \cos h \cos\varphi \cos\alpha,$$
$$\sin\delta = \sin h' \sin\varphi + \cos h' \cos\varphi \cos(\alpha + a),$$
$$\sin\delta = \sin h'' \sin\varphi + \cos h'' \cos\varphi \cos(\alpha + a'),$$

woraus φ, δ, α zu bestimmen sind (a und a' sind positiv, können aber von 0 bis 360° gehen). Durch Subtraktion folgt aus diesen Gleichungen:

$$0 = \sin\varphi(\sin h - \sin h') + \cos\varphi[\cos h \cos\alpha - \cos h' \cos(\alpha + a)],$$
$$0 = \sin\varphi(\sin h - \sin h'') + \cos\varphi[\cos h \cos\alpha - \cos h'' \cos(\alpha + a')].$$

Nun ist (erste Abthlg. §. 14):

$$\sin h - \sin h' = 2\cos\tfrac{1}{2}(h + h')\sin\tfrac{1}{2}(h - h'),$$
$$\sin h - \sin h'' = 2\cos\tfrac{1}{2}(h + h'')\sin\tfrac{1}{2}(h - h'');$$

$$\cos h \cos\alpha - \cos h' \cos(\alpha + a) = \tfrac{1}{2}(\cos h - \cos h')[\cos\alpha + \cos(\alpha + a)]$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\cos h + \cos h')[\cos\alpha - \cos(\alpha + a)]$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(h + h')\sin\tfrac{1}{2}(h' - h)\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}a)\cos\tfrac{1}{2}a +$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}(h + h')\cos\tfrac{1}{2}(h' - h)\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}a)\sin\tfrac{1}{2}a,$$

$$\cos h \cos\alpha - \cos h'' \cos(\alpha + a') = 2\sin\tfrac{1}{2}(h + h'')\sin\tfrac{1}{2}(h'' - h)$$
$$\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}a')\cos\tfrac{1}{2}a' + 2\cos\tfrac{1}{2}(h + h'')\cos\tfrac{1}{2}(h'' - h)\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}a')\sin\tfrac{1}{2}a',$$

folglich, indem man zugleich durch $\cos\varphi$ dividirt:

$$0 = \cos\tfrac{1}{2}(h + h')\sin\tfrac{1}{2}(h - h')\operatorname{tg}\varphi + \sin\tfrac{1}{2}(h + h')\sin\tfrac{1}{2}(h' - h)$$
$$\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}a)\cos\tfrac{1}{2}a + \cos\tfrac{1}{2}(h + h')\cos\tfrac{1}{2}(h' - h)\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}a)\sin\tfrac{1}{2}a,$$
$$0 = \cos\tfrac{1}{2}(h + h'')\sin\tfrac{1}{2}(h - h'')\operatorname{tg}\varphi + \sin\tfrac{1}{2}(h + h'')\sin\tfrac{1}{2}(h'' - h)$$
$$\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}a')\cos\tfrac{1}{2}a' + \cos\tfrac{1}{2}(h + h'')\cos\tfrac{1}{2}(h'' - h)\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}a')\sin\tfrac{1}{2}a',$$

woraus für $\operatorname{tg}\varphi$ zwei Werthe folgen. Setzt man

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h' - h)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h' + h),$$
$$\operatorname{tg}\psi' = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a' \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h'' - h)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h'' + h),$$

so hat man:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h + h')\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}a)\cos\tfrac{1}{2}a + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h' - h)\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}a)\sin\tfrac{1}{2}a$$

---

* Welche Höhen natürlich vorerst um die Strahlenbrechung zu corrigiren (erniedrigen) sind; dieselbe hängt übrigens, neben dem Zustande der Atmosphäre bloss von der Höhe ab.

$$=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h+h')\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}a)\cos\tfrac{1}{2}a+\operatorname{tg}\psi\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}a\sin(\alpha+\tfrac{1}{2}a)$$
$$=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}a\left[\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}a)+\sin(\alpha+\tfrac{1}{2}a)\operatorname{tg}\psi\right]$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}a\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}a-\psi)}{\cos\psi},$$

und eben so

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h+h'')\cos\tfrac{1}{2}a'\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}a'-\psi')}{\cos\psi'}.$$

Ganz ebenso erhielte man übrigens auch

$$\operatorname{tg}\varphi=\sin\tfrac{1}{2}a\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h'-h)\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}a)\operatorname{cotg}\psi+$$
$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h'-h)\sin(\alpha+\tfrac{1}{2}a)\sin\tfrac{1}{2}a$$
$$=\frac{\sin\tfrac{1}{2}a\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h'-h)\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}a-\psi)}{\sin\psi},$$
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\tfrac{1}{2}a'\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h''-h)\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}a'-\psi')}{\sin\psi'}.$$

Demnach:

$$\frac{\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}a-\psi)}{\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}a'-\psi')}=\frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h+h'')\cos\tfrac{1}{2}a'\cos\psi}{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}a\cos\psi'}$$
$$=\frac{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h''-h)\sin\tfrac{1}{2}a'\sin\psi}{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h'-h)\sin\tfrac{1}{2}a\sin\psi'}.$$

Setzt man die zweite Seite $=A$, so erhält man hieraus, indem man zu 1 addirt, oder von 1 subtrahirt, und die Resultate dividirt

$$\frac{\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}a-\psi)+\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}a'-\psi')}{\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}a'-\psi')-\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}a-\psi)}=\frac{1+A}{1-A},$$

d. h. (erste Abthlg. §. 14):

$$\frac{\cos[\alpha+\tfrac{1}{4}(a+a')-\tfrac{1}{2}(\psi+\psi')]\cos[\tfrac{1}{4}(a-a')+\tfrac{1}{2}(\psi'-\psi)]}{\sin[\alpha+\tfrac{1}{4}(a+a')-\tfrac{1}{2}(\psi+\psi')]\sin[\tfrac{1}{4}(a-a')+\tfrac{1}{2}(\psi'-\psi)]}=\frac{1+A}{1-A}.$$

Also wenn

$$\operatorname{tg}\xi=A,\ \frac{1+A}{1-A}=\operatorname{tg}(\xi+45^0)=\operatorname{cotg}(45^0-\xi):$$

$$\operatorname{cotg}[\alpha+\tfrac{1}{4}(a+a')-\tfrac{1}{2}(\psi+\psi')]\operatorname{cotg}[\tfrac{1}{4}(a-a')+\tfrac{1}{2}(\psi'-\psi)]$$
$$=\operatorname{tg}(\xi+45^0),$$
$$\operatorname{tg}[\alpha+\tfrac{1}{4}(a+a')-\tfrac{1}{2}(\psi+\psi')]=\operatorname{cotg}(\xi+45^0)\operatorname{cotg}[\tfrac{1}{4}(a-a')$$
$$+\tfrac{1}{2}(\psi'-\psi)].$$

Sey nun λ der zwischen 0 und 180° liegende Werth von $\alpha+\tfrac{1}{4}(a+a')-\tfrac{1}{2}(\psi+\psi')$, der hieraus folgt, so ist allgemein (§. 10 der ersten Abthlg.):

$$\alpha + \tfrac{1}{2}(a + a') - \tfrac{1}{2}(\psi + \psi') = \lambda + n.180^\circ,$$

wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist. Man hat also

$$\alpha = \lambda + n.180^\circ + \tfrac{1}{2}(\psi + \psi') - \tfrac{1}{2}(a + a'),$$

und da α zwischen 0 und 180° liegt, so hat n einen einzigen, immer leicht zu bestimmenden Werth. Kennt man nun α, so gibt tg φ den Werth von φ, und δ wird sodann aus ZPS gefunden.

Zur Auflösung der Aufgabe hat man also:

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h'-h)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h+h'),$$

$$\operatorname{tg}\psi' = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a' \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h''-h)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h+h''),$$

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h+h'')\cos\tfrac{1}{2}a'\cos\psi}{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}a\cos\psi'} = \frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h'-h)\sin\tfrac{1}{2}a'\sin\psi}{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h''-h)\sin\tfrac{1}{2}a\sin\psi'},$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{cotg}(\xi + 45^\circ)\operatorname{cotg}[\tfrac{1}{2}(a-a') + \tfrac{1}{2}(\psi'-\psi)],$$

$$\alpha = \lambda - \tfrac{1}{2}(a+a') + \tfrac{1}{2}(\psi+\psi') + n.180^\circ,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}a\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}a - \psi)}{\cos\psi}$$

$$= \frac{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h'-h)\sin\tfrac{1}{2}a\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}a - \psi)}{\sin\psi}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h+h'')\cos\tfrac{1}{2}a'\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}a' - \psi')}{\cos\psi'}$$

$$= \frac{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h''-h)\sin\tfrac{1}{2}a'\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}a' - \psi')}{\sin\psi'}.$$

Im Vorstehenden wurden alle drei Beobachtungen als östlich vom Meridian angestellt angenommen.

Wie in II hat man jedoch noch folgende Fälle zu betrachten:

1) Die zwei ersten östlich, die dritte westlich. Schreibt man wieder vor, dass man bei Messung der Azimuthaldifferenzen zwischen erster und zweiter, erster und dritter Beobachtung die Drehungsrichtung Ost-Süd-West-Nord einhalten müsse, so sey α das erste (östliche) Azimuth; alsdann ist $\alpha + a$ oder $\alpha + a - 360^\circ$ das zweite, $360^\circ - (\alpha + a')$ das dritte. Die obigen Gleichungen bleiben also ungeändert.

2) Die erste östlich, die zwei andern westlich. Das erste (östliche) Azimuth sey α, so sind die andern $360^\circ - (\alpha + a)$, $360^\circ - (\alpha + a')$ (beide westlich), also bleiben ebenfalls die obigen Gleichungen ungeändert. a, a' sind in demselben Sinne, wie oben, gerechnet.

3) Alle drei sind westlich. Die (westlichen) Azimuthe sind;

α für die erste Beobachtung; $\alpha - a$, oder $360^0 + \alpha - a$ für die zweite; $\alpha - a'$ oder $360^0 + \alpha - a'$ für die dritte. Also treten $-a$, $-a'$ an die Stelle von a, a', d. h. man hat:

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h-h')\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h+h'),$$

$$\operatorname{tg}\psi' = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a' \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h-h'')\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h+h''),$$

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(h+h'')\cos\frac{1}{2}a'\cos\psi}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(h+h')\cos\frac{1}{2}a\cos\psi'} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(h-h')\sin\frac{1}{2}a'\sin\psi}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(h-h'')\sin\frac{1}{2}a\sin\psi'},$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{cotg}(\xi+45^0)\operatorname{cotg}\left[\tfrac{1}{2}(a'-a)+\tfrac{1}{2}(\psi'-\psi)\right],$$

$$\alpha = \lambda + \tfrac{1}{2}(a+a') + \tfrac{1}{2}(\psi+\psi') + n.180^0,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(h+h')\cos\frac{1}{2}a\cos(\alpha-\frac{1}{2}a-\psi)}{\cos\psi}$$

$$= \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(h-h')\sin\frac{1}{2}a\cos(\alpha-\frac{1}{2}a-\psi)}{\sin\psi}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(h+h'')\cos\frac{1}{2}a'\cos(\alpha-\frac{1}{2}a'-\psi')}{\cos\psi'}$$

$$= \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(h-h'')\sin\frac{1}{2}a'\cos(\alpha-\frac{1}{2}a'-\psi')}{\sin\psi'}.$$

4) Die zwei ersten westlich, die dritte östlich. Die Azimuthe sind α; $\alpha - a$ oder $360^0 + \alpha - a$ das zweite; $a' - \alpha$ das dritte. Die Formeln in Nr. 3 bleiben also ungeändert.

5) Die erste westlich, die andern zwei östlich. Die Azimuthe sind α, $a - \alpha$, $a' - \alpha$, also bleiben wieder die Formeln in Nr. 3.

V. Zwei Sterne, deren Deklinationen bekannt sind (δ, δ') wurden auf der östlichen Seite des Meridians in gleicher Höhe (h) beobachtet und der Unterschied ihrer Azimuthe (a) gemessen. Man soll die geographische Breite des Beobachtungsortes (nebst erstem Azimuthe) daraus bestimmen.

Nehmen wir die Azimuthaldifferenzen immer wie in IV, so hat man (nach III):

$$\sin\delta = \sin h \sin\varphi + \cos h \cos\varphi \cos\alpha,$$

$$\sin\delta' = \sin h \sin\varphi + \cos h \cos\varphi \cos(\alpha + a).$$

Vergleicht man diess mit I, so ergibt sich als Auflösung:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg} h}{\cos\frac{1}{2}a}, \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\delta+\delta')\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta-\delta')\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a}{\cos\psi},$$

$$\cos\xi = \frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\cos h \sin\frac{1}{2}a \sin\mu},$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}\xi}{\cos\mu}, \quad \sin\varphi = \frac{\sin\xi\sin(\psi \pm \omega)}{\sin\omega}.$$

1) Geschieht die erste Beobachtung auf der östlichen, die zweite auf der westlichen Seite und ist α das erste (östliche) Azimuth, so ist das zweite (westliche) $360^0 - (\alpha + a)$, also bleibt obige Auflösung.

2) Sind beide Beobachtungen westlich, so sind die (westlichen) Azimuthe: α; $\alpha - a$ oder $360^0 + \alpha - a$, so dass $-a$ an die Stelle von a tritt.

3) Ist die erste westlich, die zweite östlich, so gilt dasselbe wie in Nr. 2.

VI. Drei Sterne, deren Lagen am Himmelsgewölbe bekannt sind, wurden in derselben, weiter nicht bekannten Höhe beobachtet, so wie die Zwischenzeiten ihrer Beobachtungen gemessen.

Da die Lagen der Sterne bekannt sind, so kennt man nicht nur ihre Deklinationen δ, δ', δ'', sondern auch die Winkel am Pol, welche ihre Deklinationskreise (Stundenkreise) mit einander machen. Gesetzt nun, die Deklinationskreise zweier Sterne machen mit einander den Winkel β, so wird, wenn s der Stundenwinkel des einen Sterns ist, der des andern zu gleicher Zeit $s + \beta$ seyn, wenn letzterer östlich vom ersten steht auf der östlichen Seite des Meridians; zu einer Zeit t später, wird er also $s + \beta \pm 15\,t$ seyn. Aus diesen Andeutungen wird man leicht entnehmen, wie man immer die Unterschiede der Stundenwinkel der drei Sterne für die drei Beobachtungen angeben kann; sie seyen τ, τ', so hat man jetzt:

$$\sin h = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos s,$$
$$\sin h = \sin\delta'\sin\varphi + \cos\delta'\cos\varphi\cos(s + \tau),$$
$$\sin h = \sin\delta''\sin\varphi + \cos\delta''\cos\varphi\cos(s + \tau').$$

Vergleicht man diess mit IV., so erhält man sofort:

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta),$$
$$\operatorname{tg}\psi' = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau'\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\delta'' - \delta)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\delta'' + \delta),$$
$$\operatorname{tg}\xi = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta + \delta'')\cos\frac{1}{2}\tau'\cos\psi}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta + \delta')\cos\frac{1}{2}\tau\cos\psi'} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta' - \delta)\sin\frac{1}{2}\tau'\sin\psi}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta'' - \delta)\sin\frac{1}{2}\tau\sin\psi'},$$
$$\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{cotg}(45^0 + \xi)\operatorname{cotg}\left[\tfrac{1}{4}(\tau - \tau') + \tfrac{1}{2}(\psi' - \psi)\right],$$
$$s = \lambda - \tfrac{1}{4}(\tau + \tau') + \tfrac{1}{2}(\psi + \psi') + n \,.\, 180^0,$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta + \delta')\cos\frac{1}{2}\tau\cos(s + \frac{1}{2}\tau - \psi)}{\cos\psi}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta + \delta'') \cos \frac{1}{2}\tau' \cos (s + \frac{1}{2}\tau' - \psi')}{\cos \psi'}$$
$$= \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \sin \frac{1}{2}\tau \cos (s + \frac{1}{2}\tau - \psi)}{\sin \psi}$$
$$= \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\delta'' - \delta) \sin \frac{1}{2}\tau' \cos (s + \frac{1}{2}\tau' - \psi')}{\sin \psi'}.$$

Als Zahlenbeispiel wollen wir das folgende (von Gauss in der monatlichen Correspondenz 18. Band, S. 289 gegebene) beifügen.

Die beobachteten Sterne waren: α Andromeda (östlich vom Meridian), α kleiner Bär, α Leyer; die Zeitunterschiede (Sternzeit): 14 Min. 4 Sek. $= 3^\circ 31'$, und 31 M. 55 S. $= 7^\circ 58' 45''$; der Winkel der Stundenkreise der zwei ersten Sterne ist $14^\circ 7' 50{\cdot}55''$ östlich, des ersten und letzten $82^\circ 1' 5{\cdot}55''$ westlich; die Deklinationen der drei Sterne sind: $28^\circ 2' 14{\cdot}8''$, $88^\circ 17' 5{\cdot}7''$, $38^\circ 37' 6{\cdot}6''$. Also: $\tau = +14^\circ 7' 50{\cdot}55'' - 3^\circ 31' = +10^\circ 36' 50{\cdot}55''$, $\tau' = -82^\circ 1' 5{\cdot}55''$
$- 7^\circ 58' 45'' = -89^\circ 59' 50{\cdot}55''$,
$\delta = 28^\circ 2' 14{\cdot}8''$, $\delta' = 88^\circ 17' 5{\cdot}7''$, $\delta'' = 38^\circ 37' 6{\cdot}6''$, woraus: $\frac{1}{2}(\delta' - \delta) = 30^\circ 7' 25{\cdot}45''$, $\frac{1}{2}(\delta' + \delta) = 58^\circ 9' 40{\cdot}25''$, $\frac{1}{2}(\delta'' - \delta) = 5^\circ 17' 25{\cdot}9''$, $\frac{1}{2}(\delta'' + \delta) = 33^\circ 19' 40{\cdot}7''$, $\frac{1}{2}\tau = 5^\circ 18' 28{\cdot}27''$, $\frac{1}{2}\tau' = -44^\circ 59' 55{\cdot}27''$.

$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\tau = 8{\cdot}9679725$ $\qquad$ $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\tau' = 9{\cdot}9999801(-)$
$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) = 10{\cdot}2363974$ $\qquad$ $\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\delta'' - \delta) = 11{\cdot}0333869$
$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\delta' + \delta) = 9{\cdot}7930670$ $\qquad$ $\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\delta'' + \delta) = 10{\cdot}1820539$
$\log \operatorname{tg} \psi = 8{\cdot}9974369$ $\qquad$ $\log \operatorname{tg} \psi' = 11{\cdot}2154209(-)$
$\psi = 5^\circ 40' 37{\cdot}95''$ $\qquad$ $\psi' = 93^\circ 29' 4{\cdot}93''$

$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta'' + \delta) = 9{\cdot}8179461$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(\tau - \tau') + \frac{1}{2}(\psi' - \psi)$
$\log \cos \frac{1}{2}\tau' = 9{\cdot}8494950$ $\qquad$ $= 69^\circ 3' 23{\cdot}76'' = \gamma$
$\log \cos \psi = 9{\cdot}9978645$ $\qquad$ $\log \operatorname{cotg}(45^\circ + \xi)$
$E \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta' + \delta) = 0{\cdot}7930670 - 1$ $\qquad$ $= 10{\cdot}1857383(-)$
$E \log \cos \frac{1}{2}\tau = 0{.}0018655$ $\qquad$ $\log \operatorname{cotg} \gamma = 9{\cdot}5828937$
$E \log \cos \psi' = 1{\cdot}2162246(-)$ $\qquad$ $\log \operatorname{tg} \lambda = 9{\cdot}7686320(-)$
$\log \operatorname{tg} \xi = 10{\cdot}6764627(-)$ $\qquad$ $\lambda = 149^\circ 35' 14{\cdot}71''$
$\xi = 101{\cdot}53' 41{\cdot}29''$ $\qquad$ $\lambda - \frac{1}{2}(\tau + \tau') + \frac{1}{2}(\psi + \psi')$
$45^\circ + \xi = 146^\circ 53' 41{\cdot}29''$ $\qquad$ $= 219^\circ 0' 51{\cdot}14''$,
$n = -1$,
$s = 39^\circ 0' 51{\cdot}14''$,
$s + \frac{1}{2}\tau - \psi = 38^\circ 38' 38{\cdot}46''$.

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) = 10.2069330$$
$$\log \cos \tfrac{1}{2}\tau = 9{\cdot}9981344$$
$$\log \cos (s + \tfrac{1}{2}\tau - \psi) = 9{\cdot}8926738$$
$$E \log \cos \psi = 0{\cdot}0021354$$
$$\log \operatorname{tg} \varphi = 10{\cdot}0998766$$
$$\varphi = 51^\circ 31' 51{\cdot}45''.$$

Anmerkung. Die hier angegebenen Sternörter sind die scheinbaren vom 27. Aug. 1808, als dem Tage der Beobachtung; sie ändern sich mit der Zeit nach bekannten Gesetzen, so dass zu verschiedenen Zeiten dieselben auch verschieden sind. Unsere Formeln verlangen natürlich die Kenntniss dieser scheinbaren Sternörter, welche letztere in dem „Berliner astronomischen Jahrbuch" für alle Tage des Jahres gegeben sind. Die Deklinationen sind dort geradezu angegeben; was die Winkel der Deklinationskreise anbelangt, so ist in den Tafeln die gerade Aufsteigung jedes Sternes angegeben, d. h. der Winkel, den der Deklinationskreis des Sterns und der des Frühlingspunktes (§. 24, Nr. 1) am Pole mit einander machen. Dieselbe wird von Westen gegen Osten von 0° bis 360° (gewöhnlich von 0^h = 0 Stunde bis 24^h) gezählt.

VII. Drei Sterne, deren Deklinationen (δ, δ', δ'') bekannt sind, wurden in gleicher, jedoch nicht weiter bekannter Höhe beobachtet, und die Unterschiede ihrer Azimuthe gemessen.*

Mit Beachtung des früher Gesagten wird man bei den vielen hier möglichen Fällen die Winkel a, a' (positiv oder negativ zu nehmen) angeben können, so dass

$\sin\delta = \sin h \sin\varphi + \cos h \cos\varphi \cos\alpha$, $\sin\delta' = \sin h \sin\varphi + \cos h \cos\varphi \cos(\alpha + a)$, $\sin\delta'' = \sin h \sin\varphi + \cos h \cos\varphi \cos(\alpha + a')$.

Daraus folgt wie in II:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta)\sin\frac{1}{2}a'}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta'')\sin\frac{1}{2}(\delta''-\delta)\sin\frac{1}{2}a}, \quad \operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a'-a)\operatorname{tg}(\psi+45^\circ), \quad \alpha = \lambda - \tfrac{1}{2}(a'+a) + n.180^\circ,$$

---

* Um diese Beobachtungen anzustellen, bedarf man eines Theodolithen, der einen Höhenkreis hat, welcher übrigens nicht einmal eingetheilt zu seyn braucht. Man stellt das Fernrohr auf einer gewissen Höhe fest, die eben der Höhe der drei Sterne entspricht und beobachtet sodann die Azimuthaldifferenzen.

Ist α ein östliches Azimuth, also der erste Stern, dessen Deklination δ ist, östlich vom Meridian beobachtet, so sind die im Texte angegebenen Formeln geradezu anwendbar, vorausgesetzt, dass man die Azimuthaldifferenzen in der in IV angegebenen Weise rechnet. Ist dagegen α ein westliches Azimuth, so hat man — a, — a' an die Stelle von a, a' zu setzen.

$$\operatorname{tg}\xi = \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\sin\delta\sin(\alpha+\frac{1}{2}a)\sin\frac{1}{2}a}},\ \operatorname{tg}\zeta = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\xi,$$

$$\cos(\varphi-h) = \frac{\sin\delta}{\cos^2\xi},\ \cos(\varphi+h) = -\frac{\cos 2\zeta}{\cos^2\zeta}\sin\delta;$$

ergeben sich hieraus γ, γ' für $\varphi - h$, $\varphi + h$, so ist $\varphi = \pm\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')$ oder $= \pm\frac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$.

VIII. Zwei Sterne, deren Lagen am Himmelsgewölbe bekannt sind, wurden zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen Höhen über dem Horizonte beobachtet. Man soll hieraus die Breite des Beobachtungsortes finden.

Seyen δ, δ' die bekannten Deklinationen; h, h' die ebenfalls bekannten Höhen der beiden Sterne; s der Stundenwinkel des ersten Sterns bei der Beobachtung, so wird man aus der bekannten Lage beider Sterne und der Zwischenzeit der Beobachtungen die Grösse τ finden können, so dass $s+\tau$ der Stundenwinkel bei der zweiten Beobachtung ist. Man hat nun:

$$\left.\begin{aligned}\sin h &= \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos s,\\ \sin h' &= \sin\delta'\sin\varphi + \cos\delta'\cos\varphi\cos(s+\tau),\end{aligned}\right\}\ (a)$$

aus welchen Gleichungen φ und s gesucht werden.

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$\sin^2 h = \sin^2\delta\sin^2\varphi + 2\sin\delta\cos\delta\sin\varphi\cos\varphi\cos s + \cos^2\delta\cos^2\varphi\cos^2 s$, und hieraus:

$$1-\cos^2 h = (1-\cos^2\delta)\sin^2\varphi + 2\sin\delta\cos\delta\sin\varphi\cos\varphi\cos s + \cos^2\varphi\cos^2 s(1-\sin^2\delta),$$

d. h.

$$1-\cos^2 h = \sin^2\varphi - \cos^2\delta\sin^2\varphi + 2\sin\delta\cos\delta\sin\varphi\cos\varphi\cos s + \cos^2\varphi\cos^2 s - \cos^2\varphi\cos^2 s\sin^2\delta,$$

$$1-\cos^2 h = \sin^2\varphi - \cos^2\delta\sin^2\varphi + 2\sin\delta\cos\delta\sin\varphi\cos\varphi\cos s + \cos^2\varphi(1-\sin^2 s) - \cos^2\varphi\cos^2 s\sin^2\delta,$$

woraus leicht:

$$\cos^2 h = \cos^2\delta\sin^2\varphi - 2\sin\delta\cos\delta\sin\varphi\cos\varphi\cos s + \cos^2\varphi\cos^2 s\sin^2\delta + \cos^2\varphi\sin^2 s$$
$$= (\cos\delta\sin\varphi - \cos\varphi\sin\delta\cos s)^2 + (\cos\varphi\sin s)^2,$$

oder

$$\left(\frac{\cos\delta\sin\varphi - \cos\varphi\sin\delta\cos s}{\cos h}\right)^2 + \left(\frac{\cos\varphi\sin s}{\cos h}\right)^2 = 1.$$

Hieraus schliesst man, dass ein Winkel ψ möglich ist, so dass

$$\frac{\cos\delta\sin\varphi - \cos\varphi\sin\delta\cos s}{\cos h} = \cos\psi, \quad \frac{\cos\varphi\sin s}{\cos h} = \sin\psi. \qquad \text{(b)}$$

Die beiden ersten Gleichungen in (a) und (b) sind nun:

$$\sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos s\cos\varphi = \sin h,$$
$$\cos\delta\sin\varphi - \cos\varphi\cos s\sin\delta = \cos\psi\cos h;$$

zieht man aus denselben die Grössen $\sin\varphi$ und $\cos\varphi\cos s$, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi &= \sin h\sin\delta + \cos\psi\cos h\cos\delta,\\ \cos\varphi\cos s &= \sin h\cos\delta - \cos\psi\cos h\sin\delta.\end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

Die zweite Gleichung (a) ist

$$\sin h' = \sin\delta'\sin\varphi + \cos\delta'\cos\tau\cos\varphi\cos s - \cos\delta'\sin\tau\cos\varphi\sin s,$$

also wenn man beachtet, dass nach (b) $\cos\varphi\sin s = \cos h\sin\psi$, und aus (c) die Werthe von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi\cos s$ einsetzt:

$$\sin h' = \sin h\sin\delta\sin\delta' + \cos\psi\cos h\cos\delta\sin\delta' + \sin h\cos\delta\cos\delta'\cos\tau$$
$$-\cos\psi\cos h\sin\delta\cos\delta'\cos\tau - \cos\delta'\sin\tau\cos h\sin\psi,$$

d. h.

$$\sin h' - \sin h\sin\delta\sin\delta' - \sin h\cos\delta\cos\delta'\cos\tau =$$
$$\cos\psi\cos h(\cos\delta\sin\delta' - \cos\delta'\sin\delta\cos\tau) - \cos\delta'\sin\tau\cos h\sin\psi.$$

Man bestimme nun den Winkel ξ so dass

$$\operatorname{cotg}\xi = \frac{\cos\delta\sin\delta' - \cos\delta'\sin\delta\cos\tau}{\cos\delta'\sin\tau},$$

so erhält man:

$$\frac{\sin h' - \sin h\sin\delta\sin\delta' - \sin h\cos\delta\cos\delta'\cos\tau}{\cos h} = \frac{\cos\delta'\sin\tau\cos(\xi+\psi)}{\sin\xi},$$

oder

$$\cos(\xi+\psi) = \frac{\sin\xi}{\cos h}\,\frac{(\sin h' - \sin h\sin\delta\sin\delta' - \sin h\cos\delta\cos\delta'\cos\tau)}{\cos\delta'\sin\tau}, \quad \text{(d)}$$

woraus, bei bekanntem ξ, nunmehr ψ erhalten wird.

Aus der zweiten (b) und der zweiten (c) folgt nun:

$$\operatorname{tg} s = \frac{\cos h\sin\psi}{\sin h\cos\delta - \cos h\sin\delta\cos\psi}, \quad \text{(e)}$$

und dann folgt φ aus (c), wozu man s nicht nöthig hat, oder aus der zweiten (b) und der ersten (c):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin s(\sin h\sin\delta + \cos h\cos\delta\cos\psi)}{\cos h\sin\psi}. \quad \text{(f)}$$

Will man die Rechnung etwas bequemer einrichten, so bestimme man einen Winkel μ so dass

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg}\delta'}{\cos\tau}, \quad \sin\delta' = \cos\delta'\cos\tau\operatorname{tg}\mu,$$

so ist

$$\operatorname{cotg}\xi = \frac{\cos\delta\cos\delta'\cos\tau\operatorname{tg}\mu - \cos\delta'\sin\delta\cos\tau}{\cos\delta'\sin\tau}$$

$$= \operatorname{cotg}\tau(\cos\delta\operatorname{tg}\mu - \sin\delta) = \frac{\operatorname{cotg}\tau\sin(\mu-\delta)}{\cos\mu}.$$

Macht man ferner

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{\operatorname{tg}\mathrm{h}}{\cos\psi}, \quad \sin\mathrm{h} = \cos\mathrm{h}\cos\psi\operatorname{tg}\zeta,$$

so ist

$$\sin\mathrm{h}\cos\delta - \cos\mathrm{h}\sin\delta\cos\psi = \cos\delta\cos\mathrm{h}\cos\psi\operatorname{tg}\zeta - \cos\mathrm{h}\sin\delta\cos\psi$$

$$= \frac{\cos\mathrm{h}\cos\psi\sin(\zeta-\delta)}{\cos\zeta},$$

$$\operatorname{tg}\mathrm{s} = \frac{\operatorname{tg}\psi\cos\zeta}{\sin(\zeta-\delta)},$$

und

$$\sin\mathrm{h}\sin\delta + \cos\mathrm{h}\cos\delta\cos\psi = \cos\mathrm{h}\cos\psi\operatorname{tg}\zeta\sin\delta + \cos\mathrm{h}\cos\delta\cos\psi$$

$$= \frac{\cos\mathrm{h}\cos\psi\cos(\zeta-\delta)}{\cos\zeta},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\mathrm{s}\cos(\zeta-\delta)\operatorname{cotg}\psi}{\cos\zeta};$$

oder da $\operatorname{cotg}\psi = \dfrac{\cos\zeta\operatorname{cotg}\mathrm{s}}{\sin(\zeta-\delta)}$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}(\zeta-\delta)\cos\mathrm{s}.$$

Uebrigens ist auch

$$\sin\varphi = \cos\mathrm{h}\cos\psi\operatorname{tg}\zeta\sin\delta + \cos\psi\cos\mathrm{h}\cos\delta = \frac{\cos\mathrm{h}\cos\psi\cos(\zeta-\delta)}{\cos\zeta}$$

$$= \frac{\sin\mathrm{h}\cos(\zeta-\delta)}{\sin\zeta},$$

da man $\cos\mathrm{h}\cos\psi = \sin\mathrm{h}\operatorname{cotg}\zeta$ hat.

Eben so ist

$$\sin\mathrm{h}\sin\delta\sin\delta' + \sin\mathrm{h}\cos\delta\cos\delta'\cos\tau = \sin\mathrm{h}[\sin\delta\cos\delta'\cos\tau\operatorname{tg}\mu$$
$$+ \cos\delta\cos\delta'\cos\tau]$$

$$= \frac{\sin\mathrm{h}\cos\delta'\cos\tau\cos(\mu-\delta)}{\cos\mu},$$

also

$$\cos(\xi+\psi) = \left[\sin\mathrm{h}' - \frac{\sin\mathrm{h}\cos\delta'\cos\tau\cos(\mu-\delta)}{\cos\mu}\right]\frac{\sin\xi}{\cos\mathrm{h}\cos\delta'\sin\tau}$$

und wenn man endlich

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{\sin h \cos\delta' \cos\tau \cos(\mu - \delta)}{\cos h' \cos\mu}$$

setzt, so ist

$$\cos(\xi + \psi) = \frac{\sin\xi}{\cos h}\left[\frac{\sin h' - \cos h' \operatorname{tg}\eta}{\cos\delta' \sin\tau}\right] = \frac{\sin\xi \sin(h' - \eta)}{\cos h \cos\eta \cos\delta' \sin\tau}.$$

Zur Auflösung unserer Aufgabe hat man also:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg}\delta'}{\cos\tau},\ \operatorname{tg}\xi = \frac{\cos\mu \operatorname{tg}\tau}{\sin(\mu - \delta)},\ \operatorname{tg}\eta = \frac{\sin h \cos\delta' \cos\tau \cos(\mu - \delta)}{\cos h' \cos\mu},$$

$$\cos(\xi + \psi) = \frac{\sin\xi \sin(h' - \eta)}{\cos h \cos\eta \cos\delta' \sin\tau},\ \operatorname{tg}\zeta = \frac{\operatorname{tg} h}{\cos\psi},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin h \cos(\zeta - \delta)}{\sin\zeta},$$

und wenn man s will:

$$\operatorname{tg} s = \frac{\operatorname{tg}\psi \cos\zeta}{\sin(\zeta - \delta)},\ \operatorname{tg}\varphi = \cos s \operatorname{cotg}(\zeta - \delta).$$

Die Winkel μ, ξ, η, ζ sind zwischen 0 und 180° zu wählen; was $\xi + \psi$ anbelangt, so gibt es zunächst einen zwischen 0 und 180° liegenden Werth ω für $\xi + \psi$, aber $\xi + \psi = -\omega$ wäre eben so zulässig, so dass ψ doppelwerthig erscheint, eben so also auch ζ und φ. Welcher der beiden Werthe von φ zu wählen ist, lehrt die Ansicht der Aufgabe.

Als Beispiel wählen wir das folgende: Am 19. Sept. 1850 wurden beobachtet: Arcturus in 16° 40′ 33·5″, Athair in 49° 6′ 3·7″ Höhe; der Zeitunterschied betrug 19 M. 18·36 Sek. (= 4° 49′ 35·4″). Die Deklinationen sind 20° 4′ 23·6″ und 8° 26′ 0·0″; Arcturus war westlich vom Meridian und der Winkel beider Stundenkreise 83° 39′ 13·7″ östlich.

Hier ist also $h = 16^\circ 40' 33{\cdot}5''$, $h' = 49^\circ 6' 3{\cdot}7''$, $\delta = 20^\circ 4' 23{\cdot}6''$, $\delta' = 8^\circ 26'$, $\tau = -83^\circ 39' 13{\cdot}7'' + 4^\circ 49' 35{\cdot}4'' = -78^\circ 49' 38{\cdot}3''$.

$\log \operatorname{tg}\delta' = 9{\cdot}1710289$	$\log\cos\mu = 9{\cdot}8999221$
$E \log\cos\tau = 0{\cdot}7127205$	$\log\operatorname{tg}\tau = 10{\cdot}7044107\ (-)$
$\log\operatorname{tg}\mu = 9{\cdot}8837494$	$E \log\sin(\mu - \delta) = 0{\cdot}5255206$
$\mu = 37^\circ 25' 17{\cdot}7''$	$\log\operatorname{tg}\xi = 11{\cdot}1298534\ (-)$
$\mu - \delta = 17^\circ 20' 54{\cdot}1''$	$\xi = 94^\circ 14' 27{\cdot}9''$

$$\begin{aligned} \log\sin h &= 9{\cdot}4578196 \\ \log\cos\delta' &= 9{\cdot}9952785 \\ \log\cos\tau &= 9{\cdot}2872795 \\ \log\cos(\mu-\delta) &= 9{\cdot}9797802 \\ E\log\cos h' &= 0{\cdot}1839395 \\ E\log\cos\mu &= 0{\cdot}1000779 \\ \hline \log tg\,\eta &= 9{\cdot}0041752 \\ \eta &= 5^0\,45'\,50{\cdot}6'' \\ h'-\eta &= 43^0\,20'\,13{\cdot}1'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\sin\xi &= 9{\cdot}9988091 \\ \log\sin(h'-\eta) &= 9{\cdot}8364925 \\ E\log\cos h &= 0{\cdot}0186604 \\ E\log\cos\eta &= 0{\cdot}0022013 \\ E\log\cos\delta' &= 0{\cdot}0047214 \\ E\log\sin\tau &= 0{\cdot}0083098\,(-) \\ \hline \log\cos(\xi+\psi) &= 9{\cdot}8691945\,(-) \\ \xi+\psi &= 137^0\,43'\,34{\cdot}1'' \\ \xi &= 94\;\;14\;\;27{\cdot}9 \\ \hline \psi &= 43\;\;29\;\;6{\cdot}2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log tg\,h &= 9{\cdot}4764799 \\ E\log\cos\psi &= 0{\cdot}1393302 \\ \hline \log tg\,\zeta &= 9{\cdot}6158101 \\ \zeta &= 22^0\,26'\,2{\cdot}8'' \\ \zeta-\delta &= 2^0\,21'\,39{\cdot}2'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\sin h &= 9{\cdot}4578196 \\ \log\cos(\zeta-\delta) &= 9{\cdot}9996312 \\ E\log\sin\zeta &= 8{\cdot}4183679 \\ \hline \log\sin\varphi &= 9{\cdot}8758187 \\ \varphi &= 48^0\,42'\,14{\cdot}0'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log tg\,\psi &= 9{\cdot}9770232 \\ \log\cos\zeta &= 9{\cdot}9658219 \\ E\log\sin(\zeta-\delta) &= 1{\cdot}3851699 \\ \hline \log tg\,s &= 11{\cdot}3280150 \\ s &= 87^0\,18'\,35{\cdot}2'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\cos s &= 8{\cdot}6715059 \\ \log cotg(\zeta-\delta) &= 11{\cdot}3848013 \\ \hline \log tg\,\varphi &= 10{\cdot}0563072 \\ \varphi &= 48^0\,42'\,14{\cdot}0''. \end{aligned}$$

Anmerkung. Mit demselben Rechte hätte man auch $\xi+\psi = -137^0\,43'\,34{\cdot}1''$ setzen dürfen und dann gefunden $\psi = -231^0\,58'\,2{\cdot}0''$, $\zeta = 154^0\,4'\,14{\cdot}6''$, $\zeta-\delta = 133^0\,59'\,51{\cdot}0''$, $\varphi = -27^0\,7'\,12{\cdot}1''$.

IX. Zwei Sterne, deren Deklinationen bekannt sind, wurden in verschiedenen Höhen h und h' über dem Horizonte beobachtet, so wie der Unterschied ihrer Azimuthe gemessen. Man soll die Breite des Beobachtungsortes bestimmen.

Man hat hier

$$\sin\delta = \sin h\sin\varphi + \cos h\cos\varphi\cos\alpha$$
$$\sin\delta' = \sin h'\sin\varphi + \cos h'\cos\varphi\cos(\alpha+a),$$

worin a bekannt ist (vergl. Nr. III), und woraus φ und α zu ermitteln sind. Vergleicht man mit VIII, so erhält man unmittelbar folgende Lösung:

$$tg\,\mu = \frac{tg\,h'}{\cos a},\quad tg\,\xi = \frac{\cos\mu\,tg\,a}{\sin(\mu-h)},\quad tg\,\eta = \frac{\sin\delta\cos h'\cos a\cos(\mu-h)}{\cos\delta'\cos\mu},$$

$$\cos(\xi+\psi)=\frac{\sin\xi\sin(\delta'-\eta)}{\cos\delta\cos\eta\cos h'\sin a},\ \operatorname{tg}\zeta=\frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos\psi},$$

$$\sin\varphi=\frac{\sin\delta\cos(\zeta-h)}{\sin\zeta},$$

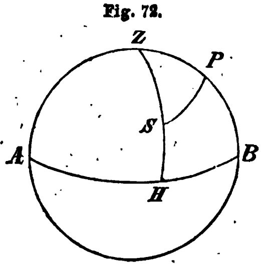
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\psi\cos\zeta}{\sin(\zeta-h)},\ \operatorname{tg}\varphi=\cos\alpha\operatorname{cotg}(\zeta-h).$$

In Bezug auf die Winkel gilt dieselbe Bemerkung wie zu VIII.

X. Man beobachtet an einer nach Sternzeit gehenden Uhr die Zeitpunkte, in denen derselbe Stern, dessen Lage am Himmelsgewölbe bekannt ist, durch denselben Höhenkreis, und zwar zuerst auf der östlichen, dann auf der westlichen Seite des Meridians, geht. Man soll hieraus die Breite des Beobachtungsortes ermitteln.

Da man die Lage des Sterns S am Himmelsgewölbe kennt, so kennt man mithin seine Deklination δ, so wie seine gerade Aufsteigung. Daraus ergibt sich der Stundenwinkel s der ersten und s' der zweiten Beobachtung.* Man kennt also in dem Dreiecke ZSP: den Winkel ZPS = s, PS = 90° — δ, und sucht ZP = 90° — φ, wobei wir das (östliche) Azimuth SZP mit α bezeichnen wollen. Ist α' das (westliche) Azimuth für die zweite Beobachtung, so ist offenbar $\alpha+\alpha'=180^\circ$, und man hat (§. 5 Formel 5):

Fig. 72.



$$\operatorname{cotg}(90^\circ-\delta)\sin(90^\circ-\varphi)=\cos(90^\circ-\varphi)\cos s+\sin s\operatorname{cotg}\alpha,$$

d. h.

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\delta\cos\varphi-\sin\varphi\cos s}{\sin s},$$

$$\operatorname{cotg}\alpha'=\frac{\operatorname{tg}\delta\cos\varphi-\sin\varphi\cos s'}{\sin s'},$$

* Sey z. B. die gerade Aufsteigung des Sterns 197° 25′ 30″, die Sternzeiten der Beobachtungen: 9^h 5′ 12″ und 16^h 17′ 38″ (die Sternuhren von 0 bis 24^h gerechnet). Da die Uhr 0^h zeigt, wenn der Frühlingspunkt durch den Meridian geht, so ist derselbe bei der ersten Beobachtung also bereits vor 9^h 5′ 12″ durch den Meridian gegangen, d. h. er befindet sich 136° 18′ (= 9^h 5′ 12″.15) westlich von demselben. Der Stern S steht aber 197° 25′ 30″ östlich vom Frühlingspunkt, mithin befindet er sich noch 61° 7′ 30″ östlich vom Meridian, d. h. s = 61° 7′ 30″. Bei der zweiten Beobachtung war der Frühlingspunkt bereits vor 16^h 17′ 38″ durch den Meridian gegangen, er befand sich also 244° 24′ 30″ westlich, d. h. eigentlich wieder 115° 35′ 30″ östlich vom Meridian. Der Stern S befand sich mithin 244° 24′ 30″ — 197° 25′ 30″ = 46° 59′ westlich vom Meridian, oder s′ = 46° 59′.

und da $\cotg \alpha' = -\cotg \alpha$:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta\cos\varphi - \sin\varphi\cos s'}{\sin s'} = -\frac{\operatorname{tg}\delta\cos\varphi - \sin\varphi\cos s}{\sin s},$$

oder, wie leicht ersichtlich:

$$\operatorname{tg}\delta\sin s - \operatorname{tg}\varphi\cos s'\sin s = -\operatorname{tg}\delta\sin s' + \operatorname{tg}\varphi\cos s\sin s',$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\delta(\sin s + \sin s')}{\cos s\sin s' + \cos s'\sin s} = \frac{\operatorname{tg}\delta(\sin s' + \sin s)}{\sin(s' + s)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(s'+s)\,.\cos\frac{1}{2}(s'-s)}{2\sin\frac{1}{2}(s'+s)\cos\frac{1}{2}(s'+s)}\operatorname{tg}\delta,$$

mithin

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\frac{1}{2}(s'-s)\operatorname{tg}\delta}{\cos\frac{1}{2}(s'+s)},$$

woraus φ gefunden wird.

Wir haben hiemit die wichtigsten Methoden zur Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes angegeben. Von denselben verlangen: I und VIII eine genaue astronomische Uhr, ein Sternverzeichniss und einen genauen Höhenkreis; II eine Uhr und einen Höhenkreis; III, V und IX ein Sternverzeichniss, einen Höhenkreis und einen Azimuthalkreis (Theodolith mit Höhenkreis); IV einen Höhenkreis und Azimuthalkreis; VI und X eine Uhr und ein Sternverzeichniss; VII ein Sternverzeichniss und einen Azimuthalkreis. Je nachdem man also über das eine oder das andere dieser Hülfsmittel verfügen kann, wird man die eine oder andere dieser Methoden wählen. Für Geodäten, die in der Regel gute Theodolithen besitzen, und ein Sternverzeichniss sich leicht verschaffen können, empfiehlt sich vorzugsweise VII; daneben dann III, IV, V, IX.

Zur Bestimmung der Lage des Beobachtungsortes ist übrigens noch die Ermittlung der geographischen Länge (§. 24. Nr. 6) in Bezug auf einen bestimmten Ort nothwendig. Dieselbe kommt durchweg auf die Ermittlung des Zeitunterschieds zurück. Kennt man ein Ereigniss, das zu derselben Zeit für die Orte A und B eintritt (eine Mondsfinsterniss, Pulversignale u. s. w.), und bestimmt in A und B nach den dort regulirten Uhren die Zeitpunkte der Erscheinung, so kennt man den Zeitunterschied, woraus die geographische Länge dann geschlossen wird. Signale an Drähten elektrischer Telegraphen dienen offenbar zu demselben Zwecke; eine nach Berliner Zeit (z. B.) gehende Uhr und die Beobachtung des Mittags

an einem Orte B nach dieser Uhr gibt ebenfalls den Zeitunterschied zwischen B und Berlin u. s. f.

Anmerkung. Bei Beobachtungen auf dem Meere, bei denen man nicht die Erhebung eines Gestirns über den Horizont des Beobachtungsortes messen kann, tritt neben der Korrektion wegen der Refraktion noch die wegen der Depression des Meereshorizontes hinzu, deren Bestimmung sich in der Anmerkung zu Nr. 1 in §. 41 der ersten Abtheilung befindet.

Sechster Abschnitt.

Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf Geodäsie.

§. 26.

Wie in §. 43 der ersten Abtheilung angegeben worden, überzieht man bei grössern Vermessungen den zu vermessenden Landstrich mit einem Dreiecksnetze, dessen Winkel gemessen werden nebst einer Seite (Basis) des Netzes, woraus dann die übrigen Seiten zu berechnen sind.

Die höhere Mathematik lehrt nun, dass man eine zwischen zwei Parallelkreisen (Schnitten des Erdellipsoids parallel mit dem Aequator) liegende (schmale) Erdzone, deren mittlere geographische Breite β ist, ansehen kann, als Theil einer Kugelfläche, deren Halbmesser r durch die Formel

$$r = \frac{b}{1 - e^2 \sin^2 \beta}$$

gefunden wird, wo b die halbe Erdaxe und $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, wenn a der Halbmesser des Aequators ist. *

---

* Der Beweis dieses Satzes kann ein doppelter seyn. Einmal nämlich beweist man in der Theorie der Abwickelung krummer Oberflächen, dass in so ferne $\frac{b}{1 - e^2 \sin^2 \beta}$ konstant ist (d. h. so lange diese Grösse ihren Werth nicht bedeutend ändert), man die Ellipsoidfläche abwickeln kann auf eine Kugelfläche, deren Halbmesser die angegebene Grösse hat. (Man vergl. eine Abhandlung des Verfassers im Grunert'schen Archiv Theil XIX, S. 306—392, §§. 17, 18). Man kann aber

Zur bequemern Berechnung von r hat man die Formeln:

$$\cos\varphi = \frac{b}{a},\ \sin\theta = \sin\varphi \sin\beta,\ r = \frac{b}{\cos^2\theta}.$$

Wählt man den Meter zur Masseinheit, so ist
log a = 6·8046434637, log b = 6·8031892839, log cos φ = 9·9985458202, log sin φ = 8·9122052079.

Berechnet man hiemit r, so hat man:

für 0°	geographischer	Breite, log r	= 6·8031893,
„ 10°	„	„ ,	= 6·8032766,
„ 20°	„	„ ,	= 6·8035285,
„ 30°	„	„ ,	= 6·8039145,
„ 35°	„	„ ,	= 6·8041439,
„ 40°	„	„ ,	= 6·8043886,
„ 45°	„	„ ,	= 6·8046410,
„ 46°	„	„ ,	= 6·8046918,
„ 47°	„	„ ,	= 6·8047424,
„ 48°	„	„ ,	= 6·8047930,
„ 49°	„	„ ,	= 6·8048434,

---

dasselbe Resultat auch aus der Theorie der Abbildung krummer Oberflächen auf einander folgern. In der eben angeführten Abhandlung §. 21 findet sich für r (das dort A heisst) allerdings eine andere Form angegeben, nämlich $\frac{a\cos\beta\cos\zeta}{\cos B\cos\theta}$; es lässt sich aber leicht zeigen, dass diese Form mit der obigen zusammenfällt. Man hat nämlich $\cos^2\theta = 1 - e^2\sin^2\beta$, und wenn $e = \sin\varphi$:

$$\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\beta} = \frac{1-e^2}{1-e^2+e^2\cos^2\beta} = \frac{1}{1+tg^2\varphi\cos^2\beta} = \frac{1+tg^2\varphi\cos^4\beta}{1+tg^2\varphi\cos^2\beta(\sin^2\beta+\cos^2\beta)}.$$

$$\frac{1}{1+tg^2\varphi\cos^4\beta} = \frac{1+tg^2\zeta}{1+tg^2\zeta+tg^2\zeta\, tg^2\beta}\cdot\frac{1}{1+tg^2\zeta} = \frac{1}{1+\sin^2\zeta\, tg^2\beta}\cos^2\zeta$$

$$= \frac{1}{1+tg^2\eta}\cos^2\zeta = \cos^2\eta\cos^2\zeta,$$

also da $\cos\eta$, $\cos\zeta$ positiv sind:

$$\sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\beta}} = \cos\eta\cos\zeta = \frac{\cos\beta}{\cos B}\cos\zeta,\ \frac{\cos\beta\cos\zeta}{\cos B\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\beta},$$

$$\frac{a\cos\beta\cos\zeta}{\cos B\cos\theta} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\beta} = \frac{b}{1-e^2\sin^2\beta},$$

was den Satz beweist. Die Theorie selbst rührt von Gauss her (vergl. dessen „Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie"); die eben nachgewiesene Uebereinstimmung der Resultate zweier Theorien ist jedoch nicht ohne Interesse.

für 50° geographischer Breite, log r = 6·8048936,
„ 51° „ „ , = 6·8049434,
„ 52° „ „ , = 6·8049928,
„ 53° „ „ , = 6·8050418,
„ 54° „ „ , = 6·8050906,
„ 55° „ „ , = 6·8051386,
„ 60° „ „ , = 6·8053687.

Bei der Berechnung der einzelnen Dreiecke, selbst der allergrössten, wird man nun den in §. 19 bewiesenen Legendre'schen Satz immer anwenden, dieselben also berechnen wir ebene Dreiecke deren Seiten eben so lang sind als die Seiten (Bögen) der geodätischen Dreiecke und deren Winkel gleich sind den um den dritten Theil des sphärischen Exzesses verminderten Winkeln der letztern. Die Berechnung des sphärischen Exzesses geschieht nach den in §. 20 aufgestellten Normen, wobei wir nochmals bemerken, dass der in der dortigen Nr. 4 betrachtete Fall, da man alle Winkel und eine Seite des geodätischen Dreiecks kennt, gerade der meist vorkommende ist; man gleicht zuerst, wie dort angegeben, die Winkel auf 180° aus und berechnet das Dreieck alsdann wie ein ebenes, das die drei so erhaltenen Winkel und die gegebene Seite hat; die gefundenen beiden andern Seiten sind die Seiten des Dreiecks*. Will man dann den sphärischen Exzess noch kennen, so wird man ihn, wie dort angegeben, berechnen können. Man bedarf des Werthes desselben bei der endgiltigen Ausgleichung der gemessenen Winkel im ganzen Dreiecksnetz, deren Darstellung jedoch hier nicht gegeben werden kann, da sie in ein anderes Gebiet gehört.

Der Werth des Kugelhalbmessers ist übrigens hier nur bei Berechnung des sphärischen Exzesses nothwendig, und da dabei fünfstellige Logarithmen immer genügen, so sieht man aus obigen

* Sind A, B, C die Werthe der drei Winkel, wie sie durch Messung gefunden worden, E der sphärische Exzess, so sollte $A+B+C=180^0+E$ sein; ist nun $A+B+C=180^0+\alpha$, so ist $E-\alpha$ die Summe der Beobachtungsfehler in den drei Winkeln. Da man, wenigstens für die hier ins Auge zu fassenden Zwecke scharf genug, annehmen muss, dass die drei Winkel gleich scharf beobachtet wurden, so wird in jedem der Fehler $\frac{1}{3}(E-\alpha)$ begangen worden sein, d. h. ihre wahren Werthe sollen $A+\frac{1}{3}(E-\alpha)$, $B+\frac{1}{3}(E-\alpha)$, $C+\frac{1}{3}(E-\alpha)$ sein; zieht man dann von jedem $\frac{1}{3}E$ ab, um die Winkel des ebenen Dreiecks zu erhalten, so hat man $A-\frac{1}{3}\alpha$, $B-\frac{1}{3}\alpha$, $C-\frac{1}{3}\alpha$, wie in §. 20 angegeben.

Werthen von r leicht, dass man r für eine bedeutende Ausdehnung des Netzes in die Breite ungeändert lassen kann. Würde allerdings das Netz sich über gar zu viele Breitengrade ausdehnen, so müsste man verschiedene Werthe von r benützen; allein in diesem Falle trennt man gewöhnlich das ganze Netz in einige einzelne ab, die man für sich berechnet, da ohnehin bei gar zu grossen Netzen die Ausgleichungsrechnung äussert beschwerlich wäre.

Wir haben bereits in §. 20 an einem speziellen Beispiele gezeigt, dass der Legendre'sche Satz selbst bei sehr grossen Seiten die Rechnung mit aller nur wünschbaren Schärfe führen lehrt; es möchte jedoch nicht ohne Interesse seyn, sich die Frage zu stellen, wie gross die Seiten seyn dürfen, damit der Fehler im Winkel nicht 0·001 Sekunde betrage, d. h. damit, wenn man gemäss den Formeln (20) in §. 19 zuerst die ebenen Winkel A', B', C' berechnet und dann die sphärischen daraus schliesst, der Fehler nicht 0·001 Sek. betrage. Nach den Formeln (18) des §. 19 muss also

$$\frac{F}{3r^2}\varrho\frac{7b^2+7c^2+a^2}{120r^4} \overline{\overline{<}}\, 0{\cdot}001$$

seyn. Macht man hier $a=b=c$, was offenbar den grösstmöglichen Werth liefert, so ist

$$F=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \text{ also } \frac{15a^4\sqrt{3}\varrho}{1440r^4} \overline{\overline{<}}\, 0{\cdot}001.$$

Setzt man diese Grösse geradezu $=0{\cdot}001$, so ist

$$\left(\frac{a}{r}\right)^4=\frac{1440\,.\,0{\cdot}001}{15\varrho\sqrt{3}}=\frac{1{\cdot}44}{15\varrho\sqrt{3}},\ \frac{a}{r}=\sqrt[4]{\frac{1{\cdot}44}{15\varrho\sqrt{3}}},$$

$$\frac{r}{a}=\sqrt[4]{\frac{15\varrho\sqrt{3}}{1{\cdot}44}}.$$

Nun ist

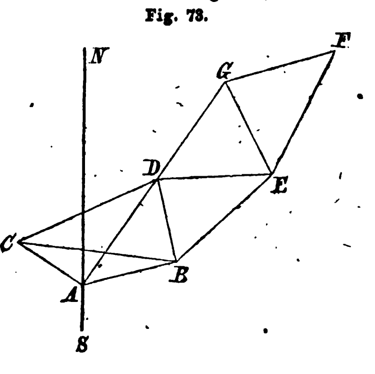
$$\begin{aligned} \log 15 &= 1{\cdot}17609\\ \log \varrho &= 5{\cdot}31442\\ \log\sqrt{3} &= 0{\cdot}23856\\ \text{E}\log 1{\cdot}44 &= 9{\cdot}84164\\ \hline &\ \ \ 6{\cdot}57071\\ \log\frac{r}{a} &= 1{\cdot}64268\\ \frac{r}{a} &= 43{\cdot}92 \end{aligned}$$

d. h. $\frac{a}{r}$ ist kleiner als $\frac{1}{43\cdot9}$, oder es dürfen die Seiten ungefähr $=\frac{1}{44}$ des Halbmessers sein, bis der Fehler 0·001 Sekunde in den Winkeln beträgt.

Da bei 45° Breite $\log r = 6\cdot80464$, so ist alsdann $\log a = 5\cdot16196$, $a = 145200$ Meter, was einer Länge von über 16 Meilen gleichkommt. Es stimmt diess auch zusammen mit dem in §. 20 Gefundenen.

Sollen nun in einem geodätischen Dreiecksnetze, in dem eine Seite gemessen wurde, und in welchem in jedem einzelnen Dreiecke zwei Winkel oder alle drei gemessen worden (letzteres in der Regel), die Seiten berechnet werden, so wird man zunächst in dem Dreiecke, in dem die gemessene Seite liegt, nach §. 20 Nro. 3 oder 4 die übrigen Stücke finden; in dem nächsten Dreiecke, in dem man nun bereits eine Seite kennt, eben so die übrigen Theile erhalten u. s. w. Der sphärische Excess findet sich in jedem Dreiecke entweder nach §. 20 Nro. 3 schon vor der Berechnung der Seiten, oder nach dem oben Angeführten, wenn nämlich die sämmtlichen drei Winkel gemessen wurden, auch nachträglich, wenn man diess vorzieht. Eine solche Berechnung des Dreiecksnetzes aus den durch Messung erhaltenen Winkeln ist jedoch, wie bereits angeführt, immer nur eine vorläufige, die zur Bestimmung des sphärischen Excesses dient; ist derselbe für jedes Dreieck bekannt, so muss dann vermittelst der Ausgleichungsrechnung eine Ausgleichung der Winkel des ganzen Netzes Statt finden und die alsdann erhaltenen Winkel sind als die wahren sphärischen Winkel anzusehen, mit denen die definitive Berechnung der Seiten, nach dem Satze des §. 19, durchzuführen ist. Der sphärische Excess jedes Dreiecks, der dazu nothwendig ist, bleibt derselbe, wie er bereits bekannt war.

Fig. 73.



Die Berechnung eines kleinen Netzes mag als Beispiel vollkommen genügen. In demselben ist, wenn die Maasse in Toisen angegeben sind, $\log AB = 4\cdot1949091$, dann in dem Dreiecke:

ABC : $A = 76^\circ 5' 31{\cdot}926''$, $B = 48^\circ 30' 9{\cdot}629''$, $C = 55^\circ 24' 19{\cdot}269''$,
BCD : $B = 50^\circ 59' 56{\cdot}261''$, $C = 78^\circ 9' 40{\cdot}220''$, $D = 50^\circ 50' 25{\cdot}039''$,
ABD : $A = 49^\circ 40' 59{\cdot}912''$, $B = 99^\circ 30' 5{\cdot}890''$, $D = 30^\circ 48' 56{\cdot}562''$,
BDE : $B = 65^\circ 53' 6{\cdot}152''$, $D = 73^\circ 31' 26{\cdot}514''$, $E = 40^\circ 35' 34{\cdot}067''$,
DEG : $D = 52^\circ 49' 30{\cdot}981''$, $E = 60^\circ 33' 3{\cdot}421''$, $G =$
EFG : $E = 51^\circ 21' 6{\cdot}323''$, $F = 72^\circ 35' 12{\cdot}945''$, $G =$

Bezeichnen wir immer die Fläche des betreffenden ebenen Dreiecks mit $\varDelta$, den sphärischen Excess mit ε, setzen $\log r = 6{\cdot}5152218$ (die geographische Breite ungefähr 53°, und die Maasse Toisen, wobei von dem oben angegebenen Werthe des $\log r$ abgezogen werden muss $0{\cdot}2898200$), so hat man:

Dreieck ABC:

$A = 76^\circ\ 5'\ 31{\cdot}926''$	$A' = 76^\circ\ 5'\ 31{\cdot}651''$	$\log AB = 4{\cdot}1949091$
$B = 48\ \ 30\ \ 9{\cdot}629$	$B' = 48\ \ 30\ \ 9{\cdot}355$	$\log \sin B' = 9{\cdot}8744735$
$C = 55\ \ 24\ \ 19{\cdot}269$	$C' = 55^\circ\ 24\ \ 18{\cdot}994$	$E \log \sin C' = 0{\cdot}0845005$
$180\ \ 0\ \ 0{\cdot}824$	$180\ \ 0\ \ 0$	$\log AC = 4{\cdot}1538831$

$$\frac{0{\cdot}824}{3} = 0{\cdot}274$$

$$\begin{aligned} \log AB &= 4{\cdot}1949091 \\ \log \sin A' &= 9{\cdot}9870776 \\ E \log \sin C' &= 0{\cdot}0845005 \\ \log BC &= 4{\cdot}2664872 \end{aligned}$$

$\log AB = 4{\cdot}194909$	$\log \varDelta = 8{\cdot}03484$
$\log AC = 4{\cdot}153883$	$\log \varrho = 5{\cdot}31442$
$\log \sin A' = 9{\cdot}987077$	$E \log r^2 = 6{\cdot}96955 - 10$
$E \log 2 = 9{\cdot}698970$	$\log \varepsilon = 0{\cdot}31881$
$\log \varDelta = 8{\cdot}034839$	$\varepsilon = 2{\cdot}084''$.

Dreieck BCD.

$B = 50^\circ 59' 56{\cdot}261''$	$B' = 50^\circ 59' 55{\cdot}754''$	$\log BC = 4{\cdot}2664872$
$C = 78\ \ 9\ \ 40{\cdot}220$	$C' = 78\ \ 9\ \ 39{\cdot}714$	$\log \sin C' = 9{\cdot}9906620$
$D = 50\ \ 50\ \ 25{\cdot}039$	$D' = 50\ \ 50\ \ 24{\cdot}532$	$E \log \sin D' = 0{\cdot}1104814$
$180\ \ 0\ \ 1{\cdot}520$	$180\ \ 0\ \ 0$	$\log BD = 4{\cdot}3676306$

$$\frac{1.520}{3} = 0{\cdot}506$$

$$\begin{aligned} \log BC &= 4{\cdot}2664872 \\ \log \sin B' &= 9{\cdot}8904954 \\ E \log \sin D' &= 0{\cdot}1104814 \\ \log CD &= 4{\cdot}2674640 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log BC &= 4{\cdot}266487 & \log \Delta &= 8{\cdot}22358 \\ \log BD &= 4{\cdot}367631 & \log \varrho &= 5{\cdot}31442 \\ \log\sin B' &= 9{\cdot}890495 & E\log r^2 &= 6{\cdot}96955 - 10 \\ E\log 2 &= 9{\cdot}698970 & \log \varepsilon &= 0{\cdot}50755 \\ \log \Delta &= 8{\cdot}223583 & \varepsilon &= 3{\cdot}218''. \end{aligned}$$

Dreieck ABD.

$A = 49°40'59{\cdot}912''$	$A' = 49°40'59{\cdot}124''$	$\log AB = 4{\cdot}1949091$
$B = 99\ \ 30\ \ \ 5{\cdot}890$	$B' = 99\ \ 30\ \ \ 5{\cdot}102$	$\log\sin A' = 9{\cdot}8822269$
$D = 30\ \ 48\ \ 56{\cdot}562$	$D' = 30\ \ 48\ \ 55{\cdot}774$	$E\log\sin D' = 0{\cdot}2904965$
$180\ \ 0\ \ 2{\cdot}364$	$180\ \ 0\ \ 0$	$\log BD = 4{\cdot}3676325$

$$\frac{2{\cdot}364}{3} = 0{\cdot}788$$

$$\begin{aligned} \log AB &= 4{\cdot}1949091 \\ \log\sin B' &= 9{\cdot}9940009 \\ E\log\sin D' &= 0{\cdot}2904965 \\ \log AD &= 4{\cdot}4794065 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log AB &= 4{\cdot}194909 & \log \Delta &= 8{\cdot}25551 \\ \log BD &= 4{\cdot}367632 & \log \varrho &= 5{\cdot}31442 \\ \log\sin B' &= 9{\cdot}994001 & E\log r^2 &= 6{\cdot}96955 - 10 \\ E\log 2 &= 9{\cdot}698970 & \log \varepsilon &= 0{\cdot}53948 \\ \log \Delta &= 8{\cdot}255512 & \varepsilon &= 3{\cdot}463''. \end{aligned}$$

Dreieck BDE.

$B = 65°53'\ 6{\cdot}152''$	$B' = 65°53'\ 3{\cdot}908''$	$\log BD = 4{\cdot}3676325$
$D = 73\ \ 31\ 26{\cdot}514$	$D' = 73\ \ 31\ 24{\cdot}269$	$\log\sin D' = 9{\cdot}9817895$
$E = 40\ \ 35\ 34{\cdot}067$	$E' = 40\ \ 35\ 31{\cdot}823$	$E\log\sin E' = 0{\cdot}1866389$
$180\ \ 0\ \ 6{\cdot}733$	$180\ \ 0\ \ 0$	$\log BE = 4{\cdot}5360609$

$$\frac{6{\cdot}733}{3} = 2{\cdot}244$$

$$\begin{aligned} \log BD &= 4{\cdot}3676325 \\ \log\sin B' &= 9{\cdot}9603391 \\ E\log\sin E' &= 0{\cdot}1866389 \\ \log DE &= 4{\cdot}5146105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log BD &= 4{\cdot}367632 & \log \Delta &= 8{\cdot}56300 \\ \log BE &= 4{\cdot}536061 & \log \varrho &= 5{\cdot}31442 \\ \log\sin B' &= 9{\cdot}960339 & E\log r^2 &= 6{\cdot}96955 - 10 \\ E\log 2 &= 9{\cdot}698970 & \log \varepsilon &= 0{\cdot}84697 \\ \log \Delta &= 8{\cdot}563002 & \varepsilon &= 7{\cdot}030''. \end{aligned}$$

Dreieck DEG.

$$D = 52^\circ 49' 30{\cdot}981''$$
$$E = 60\ 33\ \ 3{\cdot}421$$
$$113\ 22\ 34{\cdot}402$$

$$\log DE^2 = 9{\cdot}02922$$
$$\log\sin D = 9{\cdot}90134$$
$$\log\sin E = 9{\cdot}93991$$
$$\log\varrho = 5{\cdot}31442$$
$$E\log 2 = 9{\cdot}69897$$
$$E\log r^2 = 6{\cdot}96955 - 10$$
$$E\log\sin(D+E) = 0{\cdot}03718$$
$$\log\varepsilon = 0{\cdot}89059$$
$$\varepsilon = 7{\cdot}773''$$
$$\frac{\varepsilon}{3} = 2{\cdot}591$$

$$D' = 52^\circ 49' 28{\cdot}390''$$
$$E' = 60\ 33\ \ 0{\cdot}830$$
$$113\ 22\ 29{\cdot}220$$
$$G' = 66\ 37\ 30{\cdot}780$$
$$G = 66\ 37\ 33{\cdot}371$$

$$\log DE = 4{\cdot}5146105$$
$$\log\sin E' = 9{\cdot}9399120$$
$$E\log\sin G' = 0{\cdot}0371907$$
$$\log DG = 4{\cdot}4917132$$
$$\log DE = 4{\cdot}5146105$$
$$\log\sin D' = 9{\cdot}9013432$$
$$E\log\sin G' = 0{\cdot}0371907$$
$$\log EG = 4{\cdot}4531444$$

Dreieck EFG.

$$E = 51^\circ 21'\ 6{\cdot}323''$$
$$F = 72\ 35\ 12{\cdot}945$$
$$123\ 56\ 19{\cdot}268$$

$$\log EG^2 = 8{\cdot}90629$$
$$\log\sin E = 9{\cdot}89265$$
$$\log\sin(E+F) = 9{\cdot}91889$$
$$\log\varrho = 5{\cdot}31442$$
$$E\log\sin F = 0{\cdot}02038$$
$$E\log r^2 = 6{\cdot}96955 - 10$$
$$E\log 2 = 9{\cdot}69897$$
$$\log\varepsilon = 0{\cdot}72115$$
$$\varepsilon = 5{\cdot}262''$$
$$\frac{\varepsilon}{3} = 1{\cdot}754$$

$$E' = 51^\circ 21'\ 4{\cdot}569''$$
$$F' = 72\ 35\ 11{\cdot}191$$
$$123\ 56\ 15{\cdot}760$$
$$G' = 56\ \ 3\ 44{\cdot}240$$
$$G = 56\ \ 3\ 45{\cdot}994$$

$$\log EG = 4{\cdot}4531444$$
$$\log\sin E' = 9{\cdot}8926452$$
$$E\log\sin F' = 0{\cdot}0203744$$
$$\log FG = 4{\cdot}3661640$$

$$\begin{aligned} \log EG &= 4{\cdot}4531444 \\ \log \sin G' &= 9{\cdot}9188923 \\ E \log \sin F' &= 0{\cdot}0203744 \\ \hline \log EF &= 4{\cdot}3924111. \end{aligned}$$

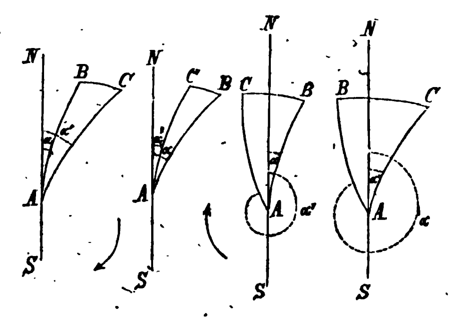
§. 27.

Hat man die Seiten und Winkel eines Dreiecksnetzes endgiltig berechnet, so werden in der Regel die Koordinaten der Eckpunkte des Netzes zu berechnen sein. Dieselben sind entweder Polarkoordinaten oder rechtwinklige Koordinaten. Stellt NS den durch A gehenden Meridian vor, ist B ein Eckpunkt des Netzes, AB die von B nach A gezogene kürzeste Linie, so bilden die Länge AB, nebst dem Winkel NAB, den dieselbe mit dem Meridian NS macht, die Polarkoordinaten von B. Die Entfernung AB ist immer positiv; der Winkel NAB soll von der nördlichen Seite AN des durch A gehenden Meridians durch Osten, Süden, Westen, von 0 bis 360° gerechnet werden; er pflegt auch das **Azimuth von AB in A** genannt zu werden (vgl. §. 25 III.).

Fig. 74.

Fällt man von B auf NS die senkrechte kürzeste Linie BC, so pflegen AC und BC die rechtwinkligen Koordinaten von B genannt zu werden; dabei ist BC positiv, wenn B auf der östlichen, negativ, wenn B auf der westlichen Seite des Meridians SN liegt; AC ist positiv oder negativ, je nachdem C nördlich oder südlich von A liegt. A pflegt zuweilen auch der Pol der Koordinaten oder der Anfangspunkt derselben genannt zu werden. (Vgl. meine „ebene Polygonometrie“ §. 3). Nach der in §. 26 schon angeführten Theorie kann man alle diese Grössen als auf einer Kugel vom (allerdings veränderlichen) Halbmesser r liegend ansehen, also die Linien AB, BC, AC als Bögen grösster Kugelkreise betrachten.

Fig. 75.



Wir wollen nun zunächst die Polarkoordinaten zu be-

rechnen lehren. Die hier zu lösende Aufgabe ist die aus den bekannten Polarkoordinaten $AB = S$, $NAB = \alpha$ des Punktes B die des Punktes $C : AC = S'$, $NAC = \alpha'$ zu finden, wenn man $BC = s$ nebst dem Winkel $ABC = \beta$ kennt, wobei wir den Winkel $BCA = \beta'$ nennen wollen, und natürlich voraussetzen, dass β und β' unter 180^0 seien.

Sey ε der sphärische Excess des Dreiecks BAC, der Winkel BAC dieses Dreiecks $= \mu$, so hat man (§. 20 Nro. 2, erste Abthlg. §. 23):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \tfrac{1}{2}\frac{S.s.\sin\beta}{r^2}\varrho, \\ S'\sin\tfrac{1}{2}(\beta'-\mu) &= (S-s)\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\tfrac{1}{3}\varepsilon), \\ S'\cos\tfrac{1}{2}(\beta'-\mu) &= (S+s)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\tfrac{1}{3}\varepsilon), \\ \beta+\beta'+\mu &= 180^0+\varepsilon. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta'-\mu) = \frac{S-s}{S+s}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\beta-\tfrac{1}{3}\varepsilon),$$

und da $\frac{1}{2}(\beta'-\mu)$ seinem Werthe nach nicht über 90^0 sein kann, so folgt hieraus $\frac{1}{2}(\beta'-\mu)$ ganz unzweideutig (wäre die zweite Seite negativ, so läge $\frac{1}{2}(\beta'-\mu)$ zwischen 0 und -90^0), und da auch $\frac{1}{2}(\beta'+\mu) = 90^0 - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\varepsilon$, so kennt man β', μ; S' findet sich dann aus einer der obigen Gleichungen sehr leicht. Nun ist aber, wenn $\alpha'-\alpha$ unter 180^0 ist (positiv oder negativ):

$$\mu = \alpha'-\alpha \text{ oder } = \alpha-\alpha';$$

ist $\alpha'-\alpha$ über 180^0 (positiv oder negativ), so hat man

$$\mu = 360^0+\alpha-\alpha' \text{ oder } = 360^0+\alpha'-\alpha.$$

Welcher der vier Fälle Statt findet, ist in der Praxis immer unschwer zu entscheiden. Dazu dienen folgende Regeln:

1) Stellt man sich in B und dreht sich in dem Sinne Nord — Ost — Süd — West von der Seite AB gegen BC, so wird, wenn der so durchlaufene Winkel grösser als 180^0 ist, seyn

$$\mu = \alpha'-\alpha, \text{ oder } \mu = \alpha'-\alpha+360^0,$$

also

$$\alpha' = \alpha+\mu, \text{ oder } \alpha' = \alpha+\mu-360^0,$$

wobei der erste Fall gilt, wenn $\alpha+\mu < 360^0$, der zweite, wenn $\alpha+\mu > 360^0$.

2) Stellt man sich in B und dreht sich in derselben Richtung,

so ist, wenn der also durchlaufene Winkel ABC kleiner als 180° ist:

$$\mu = \alpha - \alpha', \text{ oder } \mu = \alpha - \alpha' + 360^\circ,$$

d. h.

$$\alpha' = \alpha - \mu, \text{ oder } \alpha' = \alpha - \mu + 360^\circ,$$

wobei die erste Formel gilt, wenn $\alpha - \mu$ positiv, die zweite, wenn $\alpha - \mu$ negativ ausfällt.

Damit jedoch die ganze angegebene Rechnungsweise zulässig sei, dürfen die Längen S, S′ nicht gar zu gross ausfallen. Auch eine Rechnung nach den eigentlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie wäre dann nicht mehr zulässig, da der Kugelhalbmesser nicht derselbe bleibt, wenn die Seiten gar zu gross werden. Doch dürfen sie sicherlich eine Länge von über 30 Meilen erreichen, ohne dass unsere Rechnung einen merklichen Fehler geben wird. In anderm Falle müsste man sich damit helfen, dass man bei gar zu ausgedehntem Netze mehrere Punkte A (Anfangspunkte, Pole) wählte.

Sollen nun nach obigen Formeln die Polarkoordinaten der Eckpunkte berechnet werden, so wird man, wenn die Punkte des Netzes durch 1, 2, ... bezeichnet werden, die Seite A 1 als Seite des Dreiecksnetzes, so wie den Winkel 1 AN durch direkte Messung kennen, und von den bekannten Polarkoordinaten des Punktes 1 nebst dem aus dem Netze ebenfalls bekannten Winkel A 1 2 und der Seite 1 2 die Polarkoordinaten von 2 nebst dem Winkel A 2 1 berechnen. Aus den an 2 liegenden Winkeln des Netzes, so wie dem Winkel A 2 1 findet man dann leicht den Winkel A 2 3 in dem Dreiecke A 2 3, und kann dann die Polarkoordinaten des Punktes 3 berechnen u. s. w.

Fig. 76.

Ein, wenigstens angedeutetes Beispiel mag die Sache erläutern. Seyen B, C, D, E, F fünf auf einander folgende Punkte des Netzes; S_1, S_2, ..., S_5 ihre Entfernungen von A; α_1, α_2, ..., α_5 die Azimuthe dieser Entfernungen in A; zugleich ist aus der Messung bekannt:

$$\log AB = 3{\cdot}8923854, \quad \log BC = 4{\cdot}0551842,$$

$\log CD = 4{\cdot}2399134$, $\log DC = 4{\cdot}3784931$,
$\log EF = 4{\cdot}4329387$, $NAB = 57^\circ 52' 46{\cdot}78''$,
$ABC = 165^\circ 9' 11{\cdot}31''$, $BCD = 75^\circ 36' 38{\cdot}10''$,
$CDE = 76^\circ 27' 35{\cdot}10''$, $DEF = 123^\circ 3' 9{\cdot}89''$,
$\log r = 6{\cdot}51527$, $\log \varrho = 5{\cdot}31442$.

Dreieck ABC.

$AB = S_1$, $AC = S_2$, $BC = s_1$, $ABC = \beta_1$, $ACB = \beta_1'$, $BAC = \mu$,
$NAB = \alpha_1$.

$$\varepsilon = \frac{S_1\, s_1 \sin\beta_1}{2\,r^2}\varrho,\quad S_2 \sin\tfrac{1}{2}(\beta_1' - \mu) = (S_1 - s_1)\cos\tfrac{1}{2}(\beta_1 - \tfrac{1}{3}\varepsilon),$$
$$S_2 \cos\tfrac{1}{2}(\beta_1' - \mu) = (S_1 + s_1)\sin\tfrac{1}{2}(\beta_1 - \tfrac{1}{3}\varepsilon).$$

Daraus folgt

$\beta_1' = 6^\circ 2' 26{\cdot}45''$, $\mu = 8^\circ 48' 22{\cdot}46''$, $\log S_2 = 4{\cdot}2788699$,
$\mu = \alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_2 = \alpha_1 + \mu = 66^\circ 41' 9{\cdot}24''$.

Dreieck ACD.

$AC = S_2$, $AD = S_3$, $CD = s_2$, $ACD = \beta_1' + BCD = 81^\circ 39' 4{\cdot}55''$
$= \beta_2$, $ADC = \beta_2'$, $CAD = \mu$.

$$\varepsilon = \frac{S_2 \,.\, s_2 \,.\, \sin\beta_2}{2\,r^2}\varrho,\quad S_3 \sin\tfrac{1}{2}(\beta_2' - \mu) = (S_2 - s_2)\cos\tfrac{1}{2}(\beta_2 - \tfrac{1}{3}\varepsilon),$$
$$S_3 \cos\tfrac{1}{2}(\beta'_2 - \mu) = (S_2 + s_2)\sin\tfrac{1}{2}(\beta_2 - \tfrac{1}{3}\varepsilon),$$

woraus

$\beta_2' = 52^\circ 8' 40{\cdot}34''$, $\mu = 46^\circ 12' 18{\cdot}26''$, $\log S_3 = 4{\cdot}3768585$.
$\mu = \alpha_2 - \alpha_3$, also $\alpha_3 = \alpha_2 - \mu = 20^\circ 28' 50{\cdot}98''$.

Dreieck ADE.

$AD = S_3$, $AE = S_4$, $DE = s_3$, $ADE = \beta_3 = CDE - \beta_2' =$
$24^\circ 18' 54{\cdot}76''$, $AED = \beta_3'$, $DAE = \mu$.

$$\varepsilon = \frac{S_3 \,.\, s_3 \,.\, \sin\beta_3}{2\,r^2}\varrho,\quad S_4 \sin\tfrac{1}{2}(\beta_3' - \mu) = (S_3 - s_3)\cos\tfrac{1}{2}(\beta_3 - \tfrac{1}{3}\varepsilon),$$
$$S_4 \cos\tfrac{1}{2}(\beta_3' - \mu) = (S_3 + s_3)\sin\tfrac{1}{2}(\beta_3 - \tfrac{1}{3}\varepsilon),$$

woraus

$\beta_3' = 77^\circ 20' 31{\cdot}96$, $\mu = 78^\circ 20' 35{\cdot}54''$, $\log S_4 = 4{\cdot}0021809$.
$\mu = \alpha_3 - \alpha_4 + 360^\circ$, $\alpha_4 = \alpha_3 - \mu + 360^\circ = 360^\circ - 57^\circ 51' 44{\cdot}56''$
$= 302^\circ 8' 15{\cdot}44''$.

Dreieck AEF.

$AE = S_4$, $AF = S_5$, $EF = s_4$, $AEF = \beta_4 = DFF - \beta_3' =$
$45^\circ 42' 37{\cdot}93''$, $AFE = \beta_4'$, $EAF = \mu$.

$$\varepsilon = \frac{S_4 \,.\, s_4 \,.\, \sin\beta_4}{2r^2}\,\varrho, \quad S_5 \sin\tfrac{1}{2}(\beta_4' - \mu) = (S_4 - s_4)\cos\tfrac{1}{2}(\beta_4 - \tfrac{1}{3}\varepsilon),$$

$$S_5 \cos\tfrac{1}{2}(\beta_4' - \mu) = (S_4 + s_4)\sin\tfrac{1}{2}(\beta_4 - \tfrac{1}{3}\varepsilon),$$

woraus

$$\beta_4' = 19^0 42' 41{\cdot}75'', \quad \mu = 114^0 34' 42{\cdot}23'', \quad \log S_5 = 4{\cdot}3289897.$$

$$\mu = \alpha_4 - \alpha_5, \quad \alpha_4 - \mu = 187^0 33' 33{\cdot}31'' = \alpha_5.$$

§. 28.

Wenden wir uns nun zur Berechnung rechtwinkliger Koordinaten, so haben wir wieder dieselbe Aufgabe zu lösen, nämlich aus den bekannten Koordinaten des Punktes B die des Punktes C zu finden, wenn man BC nebst dem Winkel DBC kennt.

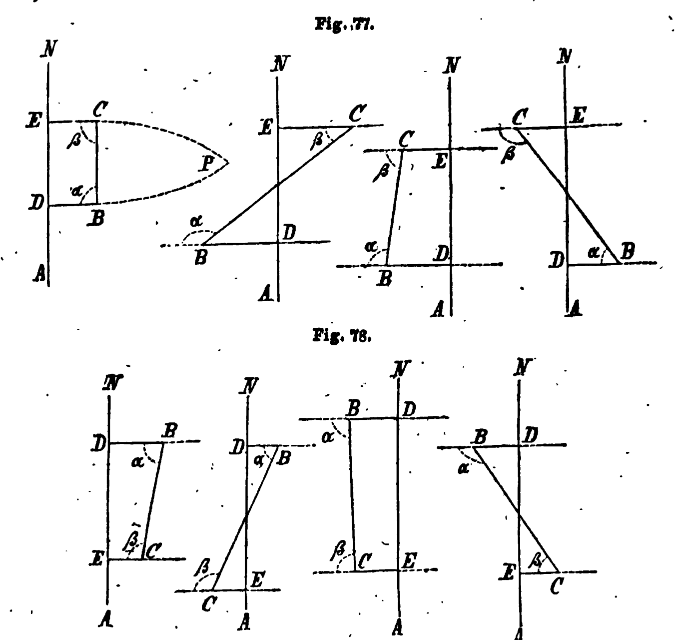


Fig. 77.

Fig. 78.

Seien also die Koordinaten von B: AD = M, BD = P (wo die Buchstaben M und P an Meridian und Perpendikel auf denselben erinnern mögen), die von C: AE = M + ΔM, EC = P + ΔP, wo also ΔM, ΔP die Aenderungen der Koordinaten sind, wenn man von B zu C übergeht. Die Linie DE ist = ± ΔM, je nachdem AE > oder < AD ist. Die Länge von CB sey s, ferner der Winkel, den

BC mit BD macht, und zwar nach der Westseite von BC gerechnet, sey α; der den BC in C mit CE macht, ebenfalls nach der Westseite gerechnet, sey β; den erstern setzen wir als bekannt voraus.

Denken wir uns die Bögen grösster Kreise BD, CE nach der Ostseite des Meridians AN hin verlängert, bis sie sich in P schneiden (was in der Figur nur im ersten Falle geschehen ist, in den andern angedeutet wurde), so erhält man ein sphärisches Dreieck, dessen Bögen PD, PE, DE sind. Da PD und PE auf DE senkrecht stehen, so ist der Winkel P derselbe, wie der Mittelpunktswinkel, der zu DE gehört (§. 8 Nro. 2), und die zu PE, PD gehörenden Mittelpunktswinkel sind 90^0. Betrachten wir nun das sphärische Dreieck PBC, so sind dessen drei Winkel P, $180-\alpha$, $180-\beta$; sind p, p′, m, σ die den Bogen BD, EC, DE, BC zugehörigen Mittelpunktswinkel, wo p, p′ positiv oder negativ seyn sollen, je nachdem BD, CE es sind, so sind die Seiten des Dreiecks: 90^0-p, $90^0-p'$, σ und der Winkel $P=m$. Bekannt sind darin: 90^0-p, σ als Seiten, $180^0-\alpha$ als Winkel; gesucht $90^0-p'$ als Seite, m, $180^0-\beta$ als Winkel. Da jedoch hier die Seiten nicht mehr in dem Falle des §. 19 sind, so wird man auch nicht mehr nach den dortigen Formeln verfahren können.

Man hat nun (§. 3):

$$\cos(90^0-p')=\cos(90^0-p)\cos\sigma+\sin(90^0-p)\sin\sigma\cos(180^0-\alpha)$$

d. h.

$$\sin p'=\sin p\cos\sigma-\cos p\sin\sigma\cos\alpha.$$

Die Bogen BD, EC, BC werden immer so beschaffen seyn, dass man füglich $\left(\frac{BD}{r}\right)^4$, ... vernachlässigen kann (§. 19); alsdann ist aber (erste Abth. §. 16), wenn r den Halbmesser der Kugel bedeutet:

$$\sin p=\frac{P}{r}-\frac{1}{6}\left(\frac{P}{r}\right)^3,\ \cos p=1-\frac{1}{2}\left(\frac{P}{r}\right)^2,\ \sin\sigma=\frac{s}{r}-\frac{1}{6}\left(\frac{s}{r}\right)^3,$$

$$\cos\sigma=1-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2,$$

$$\sin p'=\frac{P+\Delta P}{r}-\frac{1}{6}\left(\frac{P+\Delta P}{r}\right)^3,$$

mithin ist die obige Gleichung:

$$\frac{P+\varDelta P}{r}-\tfrac{1}{6}\left(\frac{P+\varDelta P}{r}\right)^3=\frac{P}{r}\left[1-\tfrac{1}{6}\left(\frac{P}{r}\right)^2\right]\left[1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2\right]$$
$$-\left[1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{P}{r}\right)^2\right]\frac{s}{r}\left[1-\tfrac{1}{6}\left(\frac{s}{r}\right)^2\right]\cos\alpha,$$

d. h.

$$P+\varDelta P-\tfrac{1}{6}\frac{(P+\varDelta P)^3}{r^2}=P\left(1-\tfrac{1}{6}\frac{P^2}{r^2}\right)\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{s^2}{r^2}\right)$$
$$-s\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{P^2}{r^2}\right)\left(1-\tfrac{1}{6}\frac{s^2}{r^2}\right)\cos\alpha,$$

oder wenn man jetzt die durch r^4 dividirten Grössen weglässt:

$$P+\varDelta P-\tfrac{1}{6}\frac{(P+\varDelta P)^3}{r^2}=P-\tfrac{1}{6}\frac{P^3}{r^2}-\tfrac{1}{2}\frac{Ps^2}{r^2}-s\cos\alpha+\tfrac{1}{2}\frac{P^2 s\cos\alpha}{r^2}$$
$$+\tfrac{1}{6}\frac{s^3\cos\alpha}{r^2},$$

$$\varDelta P=-s\cos\alpha+\tfrac{1}{6}\frac{(P+\varDelta P)^3-P^3}{r^2}+\tfrac{1}{6}\frac{s^3\cos\alpha}{r^2}+\tfrac{1}{2}\frac{Ps(P\cos\alpha-s)}{r^2}$$
$$=-s\cos\alpha+\tfrac{1}{6}.\frac{3P^2\varDelta P+3P\varDelta P^2+\varDelta P^3}{r^2}+\tfrac{1}{6}\frac{s^3\cos\alpha}{r^2}$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{P.s.(P\cos\alpha-s)}{r^2}$$

d. h.

$$\varDelta P=-s.\cos\alpha+\tfrac{1}{2}\frac{P^2(\varDelta P+s.\cos\alpha)}{r^2}+\tfrac{1}{2}\frac{P(\varDelta P^2-s^2)}{r^2}$$
$$+\tfrac{1}{6}\frac{\varDelta P^3+s^3\cos\alpha}{r^2}. \quad \text{(a)}$$

Hieraus folgt als erster Näherungswerth von $\varDelta P$: $-s\cos\alpha$, und setzt man diesen für $\varDelta P$ auf der zweiten Seite, was gestattet ist, da $\varDelta P=-s\cos\alpha$ bis auf Glieder mit r^2 im Nenner genau ist, so hat man:

$$\varDelta P=-s.\cos\alpha-\tfrac{1}{2}\frac{Ps^2.\sin^2\alpha}{r^2}+\tfrac{1}{6}\frac{s^3\cos\alpha\sin^2\alpha}{r^2},$$

d. h.

$$\varDelta P=-s.\cos\alpha.-\tfrac{1}{2}(P-\tfrac{1}{3}s\cos\alpha)\frac{s^2.\sin^2\alpha}{r^2}, \quad \text{(b)}$$

welche Formel immer eine genügende Näherung geben wird.

Um $\varDelta M$ zu erhalten, bemerken wir, dass in demselben sphärischen Dreieck der Winkel an P die Grösse $\varDelta M$ (m) misst; nun ist (§. 11):

$$\cotg m = \frac{\cotg \sigma \sin(90^0 - p) - \cos(90^0 - p)\cos(180^0 - \alpha)}{\sin(180^0 - \alpha)},$$

$\sin\alpha \cotg m = \cotg\sigma \cos p + \sin p \cos\alpha,$

oder

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg} m} = \frac{1}{\operatorname{tg}\sigma}\cos p + \sin p \cos\alpha = \frac{\cos p + \sin p \cos\alpha \operatorname{tg}\sigma}{\operatorname{tg}\sigma}$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\operatorname{tg} m = \frac{\operatorname{tg}\sigma . \sin\alpha}{\cos p + \sin p \cos\alpha \operatorname{tg}\sigma}.$$

Nun ist, wenn wir DE kurzweg mit $\varDelta M$ bezeichnen, also auf das Zeichen nicht achten, und wieder Alles weglassen, was r^4 im Nenner hat:

$$\operatorname{tg} m = \frac{\varDelta M}{r} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\varDelta M}{r}\right)^3, \quad \operatorname{tg}\sigma = \frac{s}{r} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{s}{r}\right)^3, \quad \cos p = 1 - \frac{P^2}{2r^2},$$

$$\sin p = \frac{P}{r} - \tfrac{1}{6}\frac{P^3}{r^3}, *$$

also

$$\frac{\varDelta M}{r} + \tfrac{1}{3}\frac{\varDelta M^3}{r^3} = \frac{\frac{s}{r}\left(1 + \tfrac{1}{3}\frac{s^2}{r^2}\right)\sin\alpha}{1 - \tfrac{1}{2}\frac{P^2}{r^2} + \frac{P}{r}.\frac{s}{r}\left(1 - \tfrac{1}{6}\frac{P^2}{r^2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{3}\frac{s^2}{r^3}\right)\cos\alpha}$$

d. h.

$$\varDelta M + \tfrac{1}{3}\frac{\varDelta M^3}{r^2} = s . \sin\alpha . \frac{1 + \tfrac{1}{3}\frac{s^2}{r^2}}{1 - \tfrac{1}{2}\frac{P^2}{r^2} + \frac{P . s}{r^2}\cos\alpha}$$

$$= s . \sin\alpha . \left(1 + \tfrac{1}{3}\frac{s^2}{r^2} + \tfrac{1}{2}\frac{P^2}{r^2} - \frac{P . s}{r^2}\cos\alpha\right),$$

d. h.

$$\varDelta M = s . \sin\alpha + \tfrac{1}{3}\frac{s^3}{r^2}\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\frac{P^2 . s . \sin\alpha}{r^2} - \frac{P . s^2 . \cos\alpha \sin\alpha}{r^2} - \tfrac{1}{3}\frac{\varDelta M^3}{r^2},$$

---

* Man hat

$$\operatorname{tg} m = \frac{\sin m}{\cos m} = \frac{\frac{\varDelta M}{r} - \tfrac{1}{6}\frac{\varDelta M^3}{r^3}}{1 - \tfrac{1}{2}\frac{\varDelta M^2}{r^2}} = \frac{\varDelta M}{r} + \tfrac{1}{3}\frac{\varDelta M^3}{r^3},$$

wie durch Division unmittelbar erhalten wird.

woraus als genäherter Werth von $\varDelta M$ sich ergibt:

$$\varDelta M = s . \sin\alpha$$

und wenn man diess für $\varDelta M$ auf die zweite Seite setzt, so erhält man:

$$\varDelta M = s . \sin\alpha + \tfrac{1}{2}\frac{P^2 . s . \sin\alpha}{r^2} - \frac{P . s^2 \cos\alpha . \sin\alpha}{r^2} + \tfrac{1}{3}\frac{s^3 . \sin\alpha\cos^2\alpha}{r^2}$$

$$= s . \sin\alpha + \frac{P . s . \sin\alpha}{r^2}[\tfrac{1}{2}P - s\cos\alpha] + \tfrac{1}{3} . \frac{(s . \cos\alpha)^2 . s . \sin\alpha}{r^2}, \quad \text{(c)}$$

welche Formel für die Berechnung bequem ist, da $s . \sin\alpha$, $s . \cos\alpha$ ohnehin berechnet werden müssen. Zur Berechnung des Winkels β hat man in demselben Dreiecke (§. 4):

$$\sin(180^0 - \alpha) : \sin(180^0 - \beta) = \sin(90^0 - p') : \sin(90^0 - p),$$

d. h.

$$\sin\alpha : \sin\beta = \cos p' : \cos p, \quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha . \cos p}{\cos p'}.$$

Nun sind $\cos p$, $\cos p'$ von 1 nicht sehr verschieden, also ist nahe $\sin\beta = \sin\alpha$, d. h. entweder $\beta = \alpha$ oder $\beta + \alpha = 180^0$; man sieht leicht, dass Letzteres das Richtige ist, und setze desshalb:

$$\beta = 180^0 - \alpha + \varDelta\alpha, \quad \sin\beta = \sin(\alpha - \varDelta\alpha),$$

so ist

$$\sin(\alpha - \varDelta\alpha) = \frac{\sin\alpha . \left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{P^2}{r^2}\right)}{1 - \tfrac{1}{2}\frac{(P + \varDelta P)^2}{r^2}} = \sin\alpha\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{P^2}{r^2} + \tfrac{1}{2}\frac{(P + \varDelta P)^2}{r^2}\right]$$

$$= \sin\alpha\left[1 + \frac{P\varDelta P + \tfrac{1}{2}\varDelta P^2}{r^2}\right],$$

d. h.

$$\frac{\sin\alpha\cos\varDelta\alpha - \cos\alpha\sin\varDelta\alpha}{\sin\alpha} = 1 + \frac{P\varDelta P + \tfrac{1}{2}\varDelta P^2}{r^2},$$

$$\cos\varDelta\alpha - \operatorname{cotg}\alpha . \sin\varDelta\alpha = 1 + \frac{P\varDelta P + \tfrac{1}{2}\varDelta P^2}{r^2}.$$

Hieraus folgt, wie natürlich, dass $\varDelta\alpha$ sehr klein ist; setzt man also (erste Abth. §. 19):

$$\cos\varDelta\alpha = 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc}^2\varDelta\alpha, \quad \sin\varDelta\alpha = \operatorname{arc}\varDelta\alpha - \ldots,$$

so hat man

$$-\operatorname{cotg}\alpha . \operatorname{arc}\varDelta\alpha - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc}^2\varDelta\alpha - \ldots = \frac{P\varDelta P + \tfrac{1}{2}\varDelta P^2}{r^2},$$

woraus folgt, dass $\operatorname{arc}\varDelta\alpha$ von der Art derjenigen Grössen ist, die r^2 im Nenner haben, so dass $\operatorname{arc}^2\varDelta\alpha, \ldots,$ vernachlässigt werden muss, man mithin hat:

$$-\cot g\,\alpha\,.\,\mathrm{arc}\,\Delta\alpha = \frac{P\Delta P + \frac{1}{2}\Delta P^2}{r^2},\ \mathrm{arc}\,\Delta\alpha = -\frac{(P+\frac{1}{2}\Delta P)\Delta P\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha}{r^2},$$

wo für ΔP bloss sein angenäherter Werth $-s\,.\cos\alpha$ zu setzen ist, woraus man nun erhält:

$$\mathrm{arc}\,\Delta\alpha = \frac{(P-\frac{1}{2}s\,.\cos\alpha)\,s\,.\sin\alpha}{r^2},$$

und wenn $\Delta\alpha$ in Sekunden gesucht wird:

$$\Delta\alpha = \frac{(P-\frac{1}{2}.s\,.\cos\alpha)\,s\,.\sin\alpha}{r^2}\varrho. \quad \text{(d)}$$

Stellt man die Formeln (b), (c), (d) zusammen, so hat man zu berechnen:

$$\left.\begin{array}{l} s\,.\cos\alpha = A,\quad s\,.\sin\alpha = B, \\ \Delta P = -A - \frac{1}{2}(P-\frac{1}{3}A)\,.\frac{B^2}{r^2},\quad \Delta M = B + \frac{P\,.B}{r^2}(\frac{1}{2}P - A) \\ +\frac{1}{3}\frac{A^2\,.B}{r^2},\quad \Delta\alpha = \frac{(P-\frac{1}{2}A)B}{r^2}\varrho,\quad \beta = 180^0 - \alpha + \Delta\alpha. \end{array}\right\} (25)$$

Die Grösse ΔP erhält von selbst das richtige Vorzeichen, so dass die Entfernung des Punktes C vom Meridian (Ordinate) $= P + \Delta P$ ist; ob aber AE (Abszisse von C) $= M + \Delta M$ oder $= M - \Delta M$ ist, muss besonders entschieden werden.

Was den Winkel β anbelangt, so wird er dazu dienen, für die nächstfolgende Seite des Dreiecksnetzes den Winkel α zu bestimmen, in einer Weise, die analog der in §. 27 ist. Ein Beispiel mag genügen:

$s = 25588{\cdot}16$ hess. Klafter, $P = -5674{\cdot}48$, $M = 16053{\cdot}95$, $\alpha = 150^0\,8'\,17{\cdot}027''$, geographische Breite $49^0\,30'$.

Da ein hessisches Klafter $= 2{\cdot}5$ mètres, so ist $\log r = 6{\cdot}80487 - \log 2{\cdot}5 = 6{\cdot}40693$.

$\log s = 4{\cdot}4080390$	$\log s = 4{\cdot}4080390$
$\log\cos\alpha = 9{\cdot}9381332\,(-)$	$\log\sin\alpha = 9{\cdot}6971524$
$\log A = 4{\cdot}3461722\,(-)$	$\log B = 4{\cdot}1051914$
$A = -22190{\cdot}76$	$B = 12740{\cdot}64$

$P - \frac{1}{3}A = 1722{\cdot}44$, $\frac{1}{2}P - A = 19353{\cdot}52$, $P - \frac{1}{2}A = 5420{\cdot}90$

$\log(P-\frac{1}{3}A) = 3{\cdot}23613$	$\log P = 3{\cdot}75392\,(-)$
$\log B^2 = 8{\cdot}21038$	$\log B = 4{\cdot}10519$
$E\log 2 = 9{\cdot}69896$	$\log(\frac{1}{2}P - A) = 4{\cdot}28676$
$E\log r^2 = 7{\cdot}18614 - 10$	$E\log r^2 = 7{\cdot}18614 - 10$
$8{\cdot}33161 - 10$	$9{\cdot}33201 - 10\,(-)$
Zahl $= 0{\cdot}0214$	Zahl $= -0{\cdot}2148$

$$\log A^2 = 8{\cdot}69224$$
$$\log B = 4{\cdot}10519$$
$$E \log 3 = 9{\cdot}52287$$
$$E \log r^2 = 7{\cdot}18614 - 10$$
$$\overline{ 9{\cdot}50654 - 10}$$
$$\text{Zahl} = 0{\cdot}321$$

$\varDelta P = 22190{\cdot}76 - 0{\cdot}02 = 22190{\cdot}74$, $\varDelta M = 12740{\cdot}64 - 0{\cdot}215 + 0{\cdot}321 = 12740{\cdot}75$ *

$$\log B = 4{\cdot}10519$$
$$\log (P - \tfrac{1}{2} A) = 3{\cdot}73407$$
$$\log \varrho = 5{\cdot}31442$$
$$E \log r^2 = 7{\cdot}18614 - 10$$
$$\log \varDelta\alpha = 0{\cdot}33982$$
$$\varDelta\alpha = 2{\cdot}187''$$

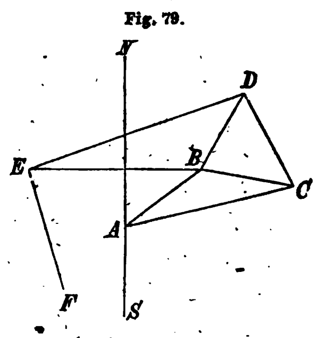
$\beta = 180^0 - 150^0 8' 17{\cdot}027'' + 2{\cdot}187'' = 29^0 51' 45{\cdot}160''$

$P + \varDelta P = 16516{\cdot}26$, $M + \varDelta M = 28794{\cdot}70$.

Will man die Koordinaten der auf einander folgenden Eckpunkte eines Netzes (etwa des in §. 27 schon betrachteten) berechnen, so wird man von A ausgehen müssen und dort zuerst haben:

$P = 0$, $M = 0$, $\alpha = 90^0 + BAN$, wenn AB östlich von SN, oder $\alpha = 90^0 - BAN$, wenn AB westlich von SN liegt; alsdann findet man die Koordinaten von B; aus dem Winkel β, den man gefunden, bestimmt sich für BC dann leicht α u. s. w.

Fig. 79.



Wir bemerken schliesslich noch, dass, wenn das zu berechnende Dreiecksnetz sich durch mehrere Grade der Breite erstrecken sollte, man in den Formeln (25) den Werth von r

---

* Dieses Beispiel ist nach den Angaben Fischer's (höhere Geodäsie III. S. 131) aus der Grossh. hessischen Vermessung gewählt; die obigen Resultate weichen von den hessischen jedoch bedeutend ab; letztere sind $\varDelta P = 22205{\cdot}78$, $\varDelta M = 12714{\cdot}49$. Es rührt dieser keineswegs unbeträchtliche Unterschied von der durch keine Theorie zu rechtfertigenden eigenthümlichen dortigen Annahme von Krümmungshalbmessern her, wornach die drei Seiten eines und desselben sphärischen Dreiecks im Grunde auf dreierlei Kugeln liegen. Wie man alsdann noch sphärische Trigonometrie anwenden kann, ist unbegreiflich. Die oben gegebenen Resultate sind unzweifelhaft richtig.

sich ändern lassen kann, gemäss den in §. 26 gegebenen Regeln, dass aber dann auch die erhaltenen Resultate alle mögliche Schärfe haben, so dass sie gerade so erhalten werden, als wenn man sie nach andern direkten, auf das Erdellipsoid als solches sich beziehenden Formeln ermittelt hätte. Die absolute Länge der Koordinaten P ist dabei gleichgiltig, nur muss sie natürlich immer so sein, dass unsere Annahme (die Vernachlässigung der durch r^4 dividirten Grössen) nicht verletzt wird.

Ausser den Koordinaten werden aus dem Dreiecksnetze auch die geographischen Lagen (Breite und Länge) der einzelnen Dreieckspunkte berechnet; auch diese Rechnung kommt, wenn man will, auf eine Anwendung der sphärischen Trigonometrie zurück, kann jedoch etwas schärfer durch Formeln geführt werden, deren Entwicklung nicht hieher gehören kann. Selbst aber, wenn man die sphärische Trigonometrie anwenden will, muss man eine Anzahl theoretischer Sätze zuvor nachweisen, deren blosse Anführung hier doch wohl zu viel Fremdes, nicht Erwiesenes einführen würde. Da ohnehin der Gegenstand recht eigentlich dem Gebiete der höhern Geodäsie angehört, so müssen wir dorthin verweisen. *

Siebenter Abschnitt.

Ueber den Einfluss fehlerhafter Daten auf die durch Rechnung daraus erhaltenen Grössen.

§. 29.

Im neunten Abschnitt der ersten Abtheilung haben wir für ebene Dreiecke bereits den Einfluss von fehlerhaften Messungen auf die daraus durch Rechnung abgeleiteten Resultate untersucht; dasselbe

* Man vergleiche: „Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie“ von Gauss, erste und zweite Abhandlung. Göttingen, 1844, 1847; sodann eine wichtige Abhandlung Bessels in den „astronomischen Nachrichten“ von Schumacher 1826, die man auch in Grunerts „ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie“ (Leipzig 1837) S. 293 ff. findet.

soll nun hier für sphärische Dreiecke geschehen. Im Grunde ist die hier und in dem so eben angeführten Abschnitte der ersten Abtheilung gelöste Aufgabe die, die (kleinen) Aenderungen zu bestimmen, welche die Resultate erleiden, wenn die Daten (gegebenen Grössen) solche Aenderungen erleiden, und es können eben desshalb die hier erhaltenen Formeln bei allen Aufgaben dieser Art angewendet werden. Der hier einzuhaltende Gang soll derselbe sein, wie im betreffenden Abschnitt der ersten Abtheilung. Wir gehen hiebei von den Grundformeln (1) aus, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

aus denen alle übrigen Formeln abgeleitet sind. Man zieht aus ihnen, indem man wie in §. 45 der ersten Abtheilung verfährt, also

$$\cos(a + \Delta a) = \cos a - \sin a \,.\, \operatorname{arc} \Delta a,$$
$$\sin(a + \Delta a) = \sin a + \cos a \,.\, \operatorname{arc} \Delta a, \text{ u. s. w.}$$

setzt, ferner die Produkte $\operatorname{arc} \Delta b \,.\, \operatorname{arc} \Delta c$ u. s. w. vernachlässigt:

$$\begin{aligned} \cos a - \sin a \operatorname{arc} \Delta a = {} & \cos b \,.\, \cos c - \cos b \sin c \operatorname{arc} \Delta c - \\ & \cos c \,.\, \sin b \operatorname{arc} \Delta b + \sin b \sin c \cos A - \sin b \sin c \sin A \operatorname{arc} \Delta A \\ & + \cos b \sin c \cos A \operatorname{arc} \Delta b + \sin b \cos c \cos A \operatorname{arc} \Delta c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos b - \sin b \operatorname{arc} \Delta b = {} & \cos a \cos c - \cos a \sin c \operatorname{arc} \Delta c - \\ & \cos c \sin a \operatorname{arc} \Delta a + \sin a \sin c \cos B - \sin a \sin c \sin B \operatorname{arc} \Delta B \\ & + \cos a \sin c \cos B \operatorname{arc} \Delta a + \sin a \cos c \cos B \operatorname{arc} \Delta c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos c - \sin c \operatorname{arc} \Delta c = {} & \cos a \cos b - \sin a \cos b \operatorname{arc} \Delta a - \\ & \cos a \sin b \operatorname{arc} \Delta b + \sin a \sin b \cos C - \sin a \sin b \sin C \operatorname{arc} \Delta C \\ & + \cos a \sin b \cos C \operatorname{arc} \Delta a + \sin a \cos b \cos C \operatorname{arc} \Delta b, \end{aligned}$$

d. h. wenn man die Gleichungen (a) beachtet, und, was hier gestattet ist, statt $\operatorname{arc} \Delta a$ setzt Δa u. s. w., indem ja beiderseitig bloss Grössen dieser Art vorkommen:

$$\begin{aligned} \sin a \Delta a = {} & \cos b \sin c \Delta c + \cos c \sin b \Delta b + \sin b \sin c \sin A \Delta A - \\ & \cos b \sin c \cos A \Delta b - \sin b \cos c \cos A \Delta c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin b \Delta b = {} & \cos a \sin c \Delta c + \cos c \sin a \Delta a + \sin a \sin c \sin B \Delta B - \\ & \cos a \sin c \cos B \Delta a - \sin a \cos c \cos B \Delta c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin c \Delta c = {} & \sin a \cos b \Delta a + \cos a \sin b \Delta b + \sin a \sin b \sin C \Delta C - \\ & \cos a \sin b \cos C \Delta a - \sin a \cos b \cos C \Delta b. \end{aligned}$$

Beachtet man die Gleichungen (4) in §. 5 und (3) in §. 4, so kann man diese Gleichungen auch schreiben:

$$\sin a\Delta a = \sin a\cos B\Delta c + \sin a\cos C\Delta b + \sin a\sin b\sin C\Delta A,$$
$$\sin b\Delta b = \sin b\cos A\Delta c + \sin b\cos C\Delta a + \sin b\sin c\sin A\Delta B,$$
$$\sin c\Delta c = \sin c\cos A\Delta b + \sin c\cos B\Delta a + \sin b\sin c\sin A\Delta C,$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned}\Delta a &= \cos B\Delta c + \cos C\Delta b + \sin b\sin C\Delta A,\\ \Delta b &= \cos A\Delta c + \cos C\Delta a + \sin c\sin A\Delta B,\\ \Delta c &= \cos A\Delta b + \cos B\Delta a + \sin a\sin B\Delta C,^*\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

welche drei Formeln die nöthigen Beziehungen zwischen den sechs Grössen Δa, Δb, ..., ΔC feststellen. Wollte man andere Grundformeln als Ausgangspunkt wählen, so erhielte man Resultate, welche aus (26) sich sofort ableiten liessen (erste Abth. §. 46). Wir haben nun die einzelnen Fälle besonders zu untersuchen.

§. 30.

1) Es sind gegeben a, b, c; gesucht A, B, C. Aus (26) folgt unmittelbar:

$$\Delta A = \frac{\Delta a - \cos B\Delta c - \cos C\Delta b}{\sin b\sin C},$$

$$\Delta B = \frac{\Delta b - \cos A\Delta c - \cos C\Delta a}{\sin c\sin A},$$

$$\Delta C = \frac{\Delta c - \cos A\Delta b - \cos B\Delta a}{\sin a\sin B},$$

worin natürlich für A, B, C die nach §. 9 gefundenen Werthe zu setzen sind. Man sieht hieraus, dass, wenn a, b, c gar zu klein sind, die Berechnung von A, B, C nach §. 9 nicht anzurathen ist, da alsdann sin a, sin c u. s. w. sehr klein werden, also die Fehler ΔA, ΔB, ΔC bedeutend ausfallen können. Es kommt diess darauf hinaus, den Legendre'schen Satz anzuwenden, statt der Formeln des §. 9.

2) Gegeben A, B, C; gesucht a, b, c (§. 10).

Aus (26) hat man jetzt Δa, Δb, Δc zu bestimmen. Man hat nun zunächst:

$$\left.\begin{aligned}\Delta a - \cos B\Delta c - \cos C\Delta b &= \sin b\sin C\Delta A,\\ \Delta b - \cos A\Delta c - \cos C\Delta a &= \sin c\sin A\Delta B,\\ \Delta c - \cos A\Delta b - \cos B\Delta a &= \sin a\sin B\Delta C.\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

Man multiplizire die zweite dieser Gleichungen mit cos C und addire sie zur ersten, so ist:

---

* $\sin b\sin A = \sin a\sin B$, wegen §. 4 (3).

$$\varDelta a \sin^2 C - (\cos B + \cos A \cos C) \varDelta c$$
$$= \sin b \sin C \varDelta A + \sin c \sin A \cos C \varDelta B,$$
$$\sin^2 C \varDelta a - \sin A \sin C \cos b \varDelta c$$
$$= \sin b \sin C \varDelta A + \sin a \sin C \cos C \varDelta B \text{ (§§. 5 u. 4)},$$
$$\sin C \varDelta a - \sin A \cos b \varDelta c$$
$$= \sin b \varDelta A + \sin a \cos C \varDelta B. \quad \text{(b)}$$

Eben so multiplizire man die erste (a) mit cos A, die letzte mit cos C und subtrahire, so ist:

$$(\cos A + \cos B \cos C) \varDelta a - (\cos A \cos B + \cos C) \varDelta c$$
$$= \sin b \sin C \cos A \varDelta A - \sin a \sin B \cos C \varDelta C,$$
$$\sin B \sin C \cos a \varDelta a - \sin A \sin B \cos c \varDelta c$$
$$= \sin c \sin B \cos A \varDelta A - \sin a \sin B \cos C \varDelta C \text{ (§. 5, 4)},$$
$$\sin C \cos a \varDelta a - \sin A \cos c \varDelta c$$
$$= \sin c \cos A \varDelta A - \sin a \cos C \varDelta C. \quad \text{(c)}$$

Aus (b) und (c) ergibt sich nun:

$$(\sin A \cos c - \sin A \cos b \cos a) \varDelta c = (\sin b \cos a - \sin c \cos A) \varDelta A$$
$$+ \sin a \cos C \cos a \varDelta B + \sin a \cos C \varDelta C,$$
$$\sin A (\cos c - \cos a \cos b) \varDelta c = (\sin b \cos a - \sin c \cos A) \varDelta A$$
$$+ \sin a \cos a \cos C \varDelta B + \sin a \cos C \varDelta C,$$
$$\sin a \sin b \cos C \sin A \varDelta c = \sin a \cos b \cos C \varDelta A$$
$$+ \sin a \cos a \cos C \varDelta B + \sin a \cos C \varDelta C \text{ (§. 5, 3)},$$
$$\sin b \sin A \varDelta c = \cos b \varDelta A + \cos a \varDelta B + \varDelta C,$$

d. h. man hat:

$$\varDelta c = \frac{\varDelta C + \cos a \varDelta B + \cos b \varDelta A}{\sin A \sin b},$$
$$\varDelta b = \frac{\varDelta B + \cos a \varDelta C + \cos c \varDelta A}{\sin C \sin a},$$
$$\varDelta a = \frac{\varDelta A + \cos c \varDelta B + \cos b \varDelta C}{\sin B \sin c}.$$

Auch hier gilt dieselbe Bemerkung wie zu Nro. 1.

3) Gegeben b, c, A; gesucht B, C, a (§. 11).

Aus (26) sind jetzt $\varDelta a$, $\varDelta B$, $\varDelta C$ zu bestimmen. Man hat zu dem Ende:

$$\varDelta a = \cos C \varDelta b + \cos B \varDelta c + \sin b \sin C \varDelta A,$$
$$\cos C \varDelta a + \sin c \sin A \varDelta B = \varDelta b - \cos A \varDelta c,$$
$$\cos B \varDelta a + \sin a \sin B \varDelta C = \varDelta c - \cos A \varDelta b.$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt, wenn man obigen Werth von Δa einführt:

$$\sin c \sin A \Delta B = \sin^2 C \Delta b - (\cos A + \cos B \cos C) \Delta c - \sin b \sin C \cos C \Delta A,$$

$$\sin a \sin B \Delta C = \sin^2 B \Delta c - (\cos A + \cos B \cos C) \Delta b - \sin b \sin C \cos B \Delta A,$$

d. h. (§. 4, 5):

$$\sin a \sin C \Delta B = \sin^2 C \Delta b - \sin B \sin C \cos a \Delta c - \sin b \sin C \cos C \Delta A,$$

$$\sin a \sin B \Delta C = \sin^2 B \Delta c - \sin B \sin C \cos a \Delta b - \sin c \sin B \cos B \Delta A,$$

mithin hat man:

$$\Delta a = \cos C \Delta b + \cos B \Delta c + \sin b \sin C \Delta A,$$

$$\Delta B = \frac{\sin C}{\sin a} \Delta b - \sin B \operatorname{cotg} a \Delta c - \frac{\sin b \cos C}{\sin a} \Delta A,$$

$$\Delta C = \frac{\sin B}{\sin a} \Delta c - \sin C \operatorname{cotg} a \Delta b - \frac{\sin c \cos B}{\sin a} \Delta A.$$

Auch hier soll a nicht gar zu klein sein, oder, was auf dasselbe herauskommt, A nicht zu klein.

4) Gegeben a, B, C; gesucht A, b, c (§. 12).

Jetzt sind Δb, Δc, ΔA aus (26) zu bestimmen. Es ist:

$$\cos C \Delta b + \cos B \Delta c + \sin b \sin C \Delta A = \Delta a,$$

$$\Delta b - \cos A \Delta c = \cos C \Delta a + \sin c \sin A \Delta B,$$

$$\Delta c - \cos A \Delta b = \cos B \Delta a + \sin a \sin B \Delta C.$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt zunächst:

$$\sin^2 A \Delta c = (\cos A \cos C + \cos B) \Delta a + \sin c \sin A \cos A \Delta B + \sin a \sin B \Delta C,$$

$$\sin^2 A \Delta b = (\cos C + \cos A \cos B) \Delta a + \sin c \sin A \Delta B + \sin a \sin B \cos A \Delta C,$$

d. h. (§§. 5, 4):

$$\sin^2 A \Delta c = \sin A \sin C \cos b \Delta a + \sin c \sin A \cos A \Delta B, + \sin b \sin A \Delta C,$$

$$\sin^2 A \Delta b = \sin A \sin B \cos c \Delta a + \sin c \sin A \Delta B + \sin b \sin A \cos A \Delta C,$$

$$\Delta c = \frac{\sin C \cos b}{\sin A} \Delta a + \frac{\sin c \cos A}{\sin A} \Delta B + \frac{\sin b}{\sin A} \Delta C,$$

$$\Delta b = \frac{\sin B \cos c}{\sin A} \Delta a + \frac{\sin c}{\sin A} \Delta B + \frac{\sin b \cos A}{\sin A} \Delta C.$$

Setzt man diese Werthe in die erste Gleichung, so hat man:

$$\sin b \sin C \varDelta A = \varDelta a \left[1 - \frac{\sin B \cos c \cos C}{\sin A} - \frac{\sin C \cos b \cos B}{\sin A}\right]$$
$$- \varDelta B \left[\frac{\sin c \cos C}{\sin A} + \frac{\sin c \cos A \cos B}{\sin A}\right] - \varDelta C \left[\frac{\sin b \cos A \cos C}{\sin A} + \frac{\sin b \cos B}{\sin A}\right].$$

Aber (§. 5):

$$\sin A - \sin B \cos c \cos C - \sin C \cos b \cos B = \sin A - \sin B \cos c$$
$$[- \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c] - \cos B [\cos c \sin B \cos A$$
$$+ \cos B \sin A] = \sin A + \cos A \sin B \cos B \cos c - \sin A \sin^2 B \cos^2 c$$
$$- \cos A \sin B \cos B \cos c - \cos^2 B \sin A =$$
$$\sin^2 B \sin A - \sin A \sin^2 B \cos^2 c = \sin A \sin^2 B \sin^2 c,$$
$$\sin c \cos C + \sin c \cos A \cos B = \sin c \,.\, \sin A \sin B \cos c;$$
$$\sin b \cos A \cos C + \sin b \cos B = \sin b \sin A \sin C \cos b,$$

also

$$\sin b \sin C \varDelta A = \sin^2 B \sin^2 c \varDelta a - \sin c \sin B \cos c \varDelta B$$
$$- \sin b \sin C \cos b \varDelta C.$$

Daraus folgt endlich:

$$\varDelta b = \frac{\sin B \cos c \varDelta a + \sin c \varDelta B + \sin b \cos A \varDelta C}{\sin A},$$
$$\varDelta c = \frac{\sin C \cos b \varDelta a + \sin c \cos A \varDelta B + \sin b \varDelta C}{\sin A},$$
$$\varDelta A = \sin c \sin B \varDelta a - \cos c \varDelta B - \cos b \varDelta C. \quad \text{(vgl. Nr 2.)}$$

5) Gegeben a, b, A; gesucht c, B, C (§. 13),

Für diesen Fall sind $\varDelta B$, $\varDelta C$, $\varDelta c$ aus (26) zu entwickeln. Nun ist

$$\cos B \varDelta c = \varDelta a - \cos C \varDelta b - \sin b \sin C \varDelta A,$$
$$\cos A \varDelta c + \sin c \sin A \varDelta B = \varDelta b - \cos C \varDelta a,$$
$$\varDelta c - \sin a \sin B \varDelta C = \cos A \varDelta b + \cos B \varDelta a.$$

Setzt man den Werth von $\varDelta c$, wie er aus der ersten Gleichung folgt, in die zwei andern, so ist

$$\sin c \sin A \varDelta B = \varDelta b \left[1 + \frac{\cos A \cos C}{\cos B}\right] - \varDelta a \left[\cos C + \frac{\cos A}{\cos B}\right]$$
$$+ \frac{\sin b \sin C \cos A}{\cos B} \varDelta A,$$

$$\sin a \sin B \varDelta C = \varDelta a \left[\frac{1}{\cos B} - \cos B\right] - \varDelta b \left[\cos A + \frac{\cos C}{\cos B}\right]$$
$$- \frac{\sin b \sin C}{\cos B} \varDelta A,$$

d. h. (§. 5):

$$\sin c \sin A \varDelta B = \frac{\sin A \sin C \cos b}{\cos B} \varDelta b - \frac{\sin B \sin C \cos a}{\cos B} \varDelta a$$
$$+ \frac{\sin b \sin C \cos A}{\cos B} \varDelta A,$$

$$\sin a \sin B \varDelta C = \frac{\sin^2 B}{\cos B} \varDelta a - \frac{\sin A \sin B \cos c}{\cos B} \varDelta b - \frac{\sin b \sin C}{\cos B} \varDelta A;$$

so dass jetzt, wenn man die Gleichungen (3) beachtet:

$$\varDelta c = \frac{\varDelta a - \cos C \varDelta b - \sin b \sin C \varDelta A}{\cos B},$$
$$\varDelta B = \operatorname{tg} B \operatorname{cotg} b \varDelta b - \operatorname{tg} B \operatorname{cotg} a \varDelta a + \operatorname{tg} B \operatorname{cotg} A \varDelta A,$$
$$\varDelta C = \frac{\operatorname{tg} B}{\sin a} \varDelta a - \frac{\sin A \cos c}{\sin a \cos B} \varDelta b - \frac{\sin c}{\sin a \cos B} \varDelta A,$$

so dass also B nicht nahe an 90° ausfallen darf, d. h. da

$$\sin B = \frac{\sin A}{\sin a} \sin b,$$

es darf nicht nahe

$$\sin a = \sin b \sin A$$

seyn.

6) Gegeben a, A, B; gesucht b, c, C (§. 14).

Aus (26) hat man $\varDelta b$, $\varDelta c$, $\varDelta C$ zu bestimmen. Es ist aber

$$\cos C \varDelta b + \cos B \varDelta c = \varDelta a - \sin b \sin C \varDelta A,$$
$$\varDelta b - \cos A \varDelta c = \cos C \varDelta a + \sin c \sin A \varDelta B,$$
$$\varDelta c - \cos A \varDelta b - \sin a \sin B \varDelta C = \cos B \varDelta a.$$

Die zwei ersten Gleichungen geben:

$$(\cos B + \cos A \cos C) \varDelta b = (\cos A + \cos B \cos C) \varDelta a$$
$$- \sin b \sin C \cos A \varDelta A + \sin a \sin A \cos B \varDelta B,$$
$$(\cos B + \cos A \cos C) \varDelta c = \varDelta a \sin^2 C - \sin b \sin C \varDelta A$$
$$- \sin c \sin A \cos C \varDelta B,$$

d. h. (§. 5):

$$\sin A \sin C \cos b \varDelta b = \sin B \sin C \cos a \varDelta a - \sin b \sin C \cos A \varDelta A$$
$$+ \sin a \sin C \cos B \varDelta B,$$
$$\sin A \sin C \cos b \varDelta c = \sin^2 C \varDelta a - \sin b \sin C \varDelta A$$
$$- \sin a \sin C \cos C \varDelta B.$$

oder

$$\Delta b = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} a \Delta a - \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} A \Delta A + \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} B \Delta B,$$

$$\Delta c = \frac{\sin C}{\sin A \cos b} \Delta a - \frac{\operatorname{tg} b}{\sin A} \Delta A - \frac{\sin a \cos C}{\sin A \cos b} \Delta B.$$

Setzt man diese Werthe in die dritte Gleichung ein, so hat man:

$$\sin a \sin B \Delta C = \Delta a \left[\frac{\sin C}{\sin A \cos b} - \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} a \cos A - \cos B \right]$$

$$+ \Delta A \left[- \frac{\operatorname{tg} b}{\sin A} + \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} A \cos A \right]$$

$$+ \Delta B \left[- \frac{\sin a \cos C}{\sin A \cos b} - \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} B \cos A \right].$$

Aber es ist

$$\frac{\sin C}{\sin A \cos b} - \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} a \cos A - \cos B = \frac{\sin C}{\sin A \cos b}$$

$$- \frac{\sin b \cos a \cos A \sin A}{\sin A \cos b \sin a} - \frac{\cos B \sin A \cos b}{\sin A \cos b}$$

$$= \frac{\sin C}{\sin A \cos b} - \frac{\cos A \cos a \sin B}{\sin A \cos b} - \frac{\cos B \sin A \cos b}{\sin A \cos b} (\S. 4)$$

$$= \frac{\sin C - \cos a \sin B \cos A - \cos B [\cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C]}{\sin A \cos b}$$

[§. 5, Formel (6)]

$$= \frac{\sin C - \cos a \sin B \cos A - \cos a \sin B \cos B \cos C - \cos^2 B \sin C}{\sin A \cos b}$$

$$= \frac{\sin^2 B \sin C - \cos a \sin B [\cos A + \cos B \cos C]}{\sin A \cos b} (\S. 4)$$

$$= \frac{\sin^2 B \sin C - \cos^2 a \sin^2 B \sin C}{\sin A \cos b} = \frac{\sin^2 a \sin^2 B \sin C}{\sin A \cos b}$$

$$= \frac{\sin a . \sin^2 B \sin c}{\cos b},$$

$$\operatorname{tg} b \operatorname{cotg} A \cos A - \frac{\operatorname{tg} b}{\sin A} = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin A} [\cos^2 A - 1] = - \frac{\sin A \sin b}{\cos b},$$

$$\frac{\sin a \cos C}{\sin A \cos b} + \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} B \cos A = \frac{\sin a \cos C + \sin b \operatorname{cotg} B \cos A \sin A}{\sin A \cos b}$$

$$= \frac{\sin a \cos C + \sin a \cos B \cos A}{\sin A \cos b} (\S. 4) = \frac{\sin a . \sin A \sin B \cos c}{\sin A \cos b} (\S. 5)$$

$$= \frac{\sin a \sin B \cos c}{\cos b}.$$

Also ist hier:

$$\Delta b = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} a \Delta a - \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} A \Delta A + \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} B \Delta B,$$

$$\Delta c = \frac{\sin C}{\sin A \cos b} \Delta a - \frac{\sin b}{\sin A \cos b} \Delta A - \frac{\sin a \cos C}{\sin A \cos b} \Delta B,$$

$$\Delta C = \frac{\sin B \sin c}{\cos b} \Delta a - \frac{1}{\cos b} \Delta A - \frac{\cos c}{\cos b} \Delta B.$$

Also darf hier nicht b nahe an 90°, d. h. nicht nahe

$$\sin A = \sin a \sin B$$

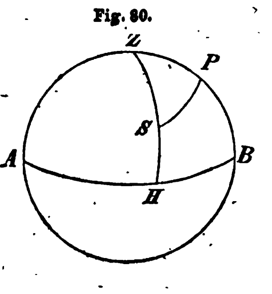
seyn.

Sind einige der gemessenen (oder überhaupt bekannten) Grössen als fehlerfrei anzusehen, so ist in obigen Formeln der entsprechende Fehler $= 0$ zu setzen. So z. B., wenn in einem Dreiecke A ein rechter Winkel, also sicher bekannt ist, hat man $\Delta A = 0$ u. s. w. Es ist offenbar höchst einfach, die diesen Fällen entsprechenden Gleichungen aus den obigen abzuleiten, wobei wir uns nicht aufhalten wollen.

§. 31.

Die in §. 30 abgeleiteten Formeln werden zunächst in derselben Weise anzuwenden seyn, wie diess mit den ähnlichen in §. 47 der ersten Abtheilung geschehen ist, worüber wir hier uns wohl nicht weiter mehr zu verbreiten haben. Wir wollen dagegen einige Beispiele, die schon mehr dem Kreise der Anwendungen angehören, hier beifügen.

Fig. 80.



Stelle S einen Stern vor, P den Nordpol, Z das Zenith des Beobachtungsortes, BZA also den Meridian, AB den Horizont, so ist $ZS = 90^\circ - h$ die Zenithdistanz des Sterns, $ZP = 90^\circ - \varphi$ die Zenithdistanz des Nordpols, $ZPS = s$ der Stundenwinkel, $PZS = \alpha$ das Azimuth, $PS = 90^\circ - \delta$ die Ergänzung (zu 90°) der Sterndeklination (vergl. §. 25). Man hat nun

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s,$$
$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h + \cos \varphi \cos h \cos \alpha.$$

Es sollen nun folgende Fälle betrachtet werden.

1) Seyen h, δ, s bekannt,* und zwar sey δ, als aus Tafeln genommen, fehlerfrei; h, s aber können die Fehler Δh, Δs haben; es soll namentlich der Fehler $\Delta\varphi$ der aus dem Dreiecke ZPS berechneten geographischen Breite ermittelt werden.

Hier treten die Formeln in Nro. 5 des §. 30 ein. Dort ist nun $a = 90^0 - h$, $b = 90^0 - \delta$, $A = s$, $c = 90^0 - \varphi$, $B = \alpha$; $\Delta a = -\Delta h$, $\Delta b = 0$, $\Delta A = \Delta s$, $\Delta c = -\Delta\varphi$, also:

$$-\Delta\varphi = \frac{-\Delta h - \cos\varphi \sin\alpha \Delta s}{\cos\alpha},\ \Delta\varphi = \frac{\Delta h}{\cos\alpha} + \cos\varphi \operatorname{tg}\alpha\Delta s.$$

Daraus folgt, dass bei unverändertem Δh, Δs der Fehler $\Delta\varphi$ möglichst klein seyn wird, wenn $\alpha = 0$ oder 180^0, d. h. wenn der Stern sich im Meridian befindet. Je kleiner überhaupt α ist, desto sicherer wird φ erhalten; für Sterne, die nahe am Pole sich befinden, wird α nie bedeutend werden, daher für diesen Fall solche Sterne sich am besten eignen.

2) Seyen h, δ, α bekannt und zwar wieder δ genau; es soll der Fehler in φ bestimmt werden.

Dieselben Formeln werden abermals zu benützen seyn; nennt man den Winkel PSZ (den parallaktischen Winkel) S, so ist:

$$a = 90^0 - \delta,\ b = 90^0 - h,\ A = \alpha,\ c = 90^0 - \varphi,\ B = s,\ C = S,$$
$$\Delta a = 0,\ \Delta b = -\Delta h,\ \Delta A = \Delta\alpha,\ \Delta c = -\Delta\varphi,$$

also

$$-\Delta\varphi = \frac{\cos S\Delta h - \cos\varphi \sin s\Delta\alpha}{\cos s},\ \Delta\varphi = -\frac{\cos S}{\cos s}\Delta h + \cos\varphi \operatorname{tg} s\Delta\alpha.$$

In der Regel wird $\Delta h > \Delta\alpha$ seyn, so dass φ am besten erhalten wird, wenn $\frac{\cos S}{\cos s}$ nahe $= 0$ ist, d. h. wenn S fast 90^0 wird. Diess

---

* Wie man h durch Beobachtung findet, ist klar. Was s anbelangt, so geben die astronomischen Tafeln die gerade Aufsteigung des Sterns (Anmerkung zu §. 25 VI.). Geht eine Uhr nach Sternzeit, so zeigt sie Mittag, wenn der Frühlingspunkt durch den Meridian geht; man weiss also aus der Uhrzeit immer den Stundenwinkel des Frühlingspunktes zu finden, und da man den Winkel kennt, den der Deklinations- (Stunden-) Kreis des Sterns mit dem Deklinationskreis des Frühlingspunkts macht, so ergibt sich daraus ganz leicht der Stundenwinkel des Sterns im Augenblicke der Beobachtung, so dass aus der Uhrzeit der Stundenwinkel gefunden werden kann. Der Fehler Δs rührt also von der Beobachtung der Uhrzeit her, da die gerade Aufsteigung als genau bekannt anzusehen ist.

ist jedoch nur für Sterne möglich, für die $\delta > \varphi$ ist, da für $S = 90°$ (§. 8):

$$\cos\delta = \cos\varphi \sin\alpha,\ \sin\alpha = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$$

sein muss, so dass $\cos\delta < \cos\varphi$, $\delta > \varphi$ seyn wird. Ist $S = 90°$, so ist (§. 8):

$$\cos s = \operatorname{tg}(90° - \delta) \operatorname{cotg}(90° - \varphi) = \operatorname{cotg}\delta \operatorname{tg}\varphi,$$

und da $\delta > \varphi$, so ist $\operatorname{tg}\delta > \operatorname{tg}\varphi$, also $\operatorname{cotg}\delta \operatorname{tg}\varphi < 1$, mithin s möglich. Je mehr δ sich φ nähert, desto mehr geht $\operatorname{cotg}\delta \operatorname{tg}\varphi$ gegen 1, also s gegen 0, mithin auch tg s gegen 0.

Daraus folgt, dass man für diesen Fall einen Stern wählen wird, dessen Deklination grösser als die gesuchte Polhöhe, doch nicht viel von ihr verschieden ist, und dass man ihn in dem durch die Gleichung

$$\sin\alpha = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$$

(oder wenn $S = 90°$) bestimmten Azimuth beobachten wird. Alsdann befindet sich der Stern übrigens in seiner grössten Ausweichung.

3) Aus bekanntem δ, φ, h soll der Stundenwinkel s, also die Sternzeit bestimmt werden.

In §. 30 Nro. 1 ist $a = 90° - \delta$, $b = 90° - \varphi$, $c = 90° - h$, $A = \alpha$, $C = s$; $\Delta a = 0$, $\Delta b = -\Delta\varphi$, $\Delta c = -\Delta h$, $\Delta C = \Delta s$, also

$$\Delta s = \frac{-\Delta h + \cos\alpha\, \Delta\varphi}{\cos\varphi \sin\alpha}.$$

Demnach wird der Stundenwinkel am sichersten gefunden, wenn $\alpha = 90°$ (d. h. im ersten Vertikalkreis).

4) Aus bekanntem δ, φ, h soll das Azimuth α berechnet werden.

In denselben Formeln: $a = 90° - \delta$, $b = 90° - \varphi$, $c = 90° - h$, $A = \alpha$, $B = S$, $C = s$; $\Delta a = 0$, $\Delta b = -\Delta\varphi$, $\Delta c = -\Delta h$, $\Delta A = \Delta\alpha$, also:

$$\Delta\alpha = \frac{\cos S \Delta h + \cos s \Delta\varphi}{\cos\varphi \sin s},$$

so dass S möglichst nahe an 90°, aber auch s nicht zu klein seyn soll. Da für $S = 90°$ (§. 8):

$$\sin s = \frac{\cos h}{\cos\varphi},\ \sin s \cos\varphi = \cos h,$$

so muss also h möglichst klein seyn. Man wird also Sterne wählen, die zwischen Pol und Zenith durch den Meridian gehen, für welche immer $h < 90^0$, und sie in ihrer grössten Ausweichung beobachten $(S = 90^0)$.

5) Aus bekanntem φ, h, α soll der Stundenwinkel s berechnet werden.

Nach Nro. 3 in §. 30 ist $b = 90^0 - \varphi$, $c = 90^0 - h$, $A = \alpha$, $a = 90^0 - \delta$, $B = S$, $C = s$, $\varDelta b = -\varDelta\varphi$, $\varDelta c = -\varDelta h$, $\varDelta A = \varDelta\alpha$, $\varDelta C = \varDelta s$, also

$$\varDelta s = \frac{-\sin S \varDelta h + \sin s \sin \delta \varDelta\varphi - \cos h \cos S \varDelta\alpha}{\cos \delta}.$$

In der Regel wird $\varDelta\varphi = 0$ zu setzen seyn, und $\varDelta h$ überwiegen, so dass man am besten verfahren wird, wenn $S = 0$ oder 180^0, d. h. wenn der Stern im Meridian beobachtet wird. Dann ist übrigens auch $s = 0$ oder 180^0. δ darf jedoch nicht nahe an 90^0 gehen, d. h. Sterne nahe am Pole sind hiezu nicht geeignet; nimmt man Sterne, welche nahe am Zenith durch den Meridian gehen, so ist für sie h nahe $= 90^0$, also hat der Fehler in α keinen bedeutenden Einfluss.

6) Aus bekanntem s, δ, φ soll α bestimmt werden.

In den Formeln Nro. 3 des §. 30 ist $b = 90^0 - \delta$, $c = 90^0 - \varphi$, $A = s$, $B = \alpha$, $C = S$, $a = 90^0 - h$, $\varDelta b = -\varDelta\delta$, $\varDelta c = -\varDelta\varphi$, $\varDelta A = \varDelta s$, $\varDelta B = \varDelta\alpha$, also

$$\varDelta\alpha = -\frac{\sin S}{\cos h}\varDelta\delta + \sin\alpha \operatorname{tg} h \varDelta\varphi - \frac{\cos\delta\cos S}{\cos h}\varDelta s.$$

In der Regel ist $\varDelta\delta = \varDelta\varphi = 0$, also bloss

$$\varDelta\alpha = -\frac{\cos S \cos\delta}{\cos h}\varDelta s.$$

Daraus folgt, dass α am besten erhalten wird, wenn man Sterne nahe am Pole wählt, für welche also δ nahe an 90^0; beobachtet man sie im Augenblicke der grössten Ausweichung $(S = 90^0)$, so ist diess noch um so besser. Immer wird man sich jedoch hüten, h nahe an 90^0 zu wählen.

§. 32.

In §. 31 haben wir bereits an einigen Beispielen gezeigt, wie man vermittelst der Formeln des §. 30 bestimmen kann, unter

welchen Umständen die Beobachtungen anzustellen sind, damit das möglichst genaue Resultat erhalten werde. Es ist von selbst verständlich, dass die Gränzen der Fehler der erhaltenen Werthe durch dieselben Formeln gegeben sind. Wir wollen nun noch einige Untersuchungen dieser Art in Bezug auf die wichtigen Aufgaben des §. 25 anstellen.

1) Zu I. in §. 25. Wir wollen δ als fehlerfrei ansehen, dagegen h, h' als mit Fehlern Δh, $\Delta h'$ behaftet betrachten, so dass φ und s die Fehler $\Delta\varphi$, Δs haben, und τ mit dem Fehler $\Delta\tau$ behaftet ist. Da

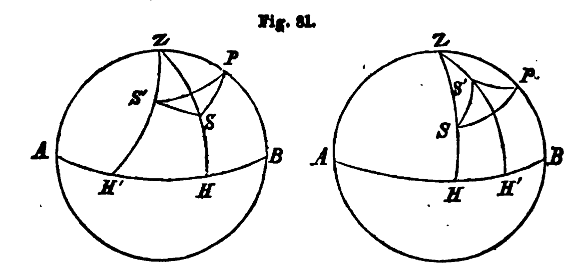
$$\sin h = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos s,$$
$$\sin h' = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos(s-\tau),$$

so hat man also (erste Abth. §. 48):

$$\cos h\Delta h = \sin\delta\cos\varphi\Delta\varphi - \cos\delta\sin\varphi\cos s\Delta\varphi$$
$$-\cos\delta\cos\varphi\sin s\Delta s,$$
$$\cos h'\Delta h' = \sin\delta\cos\varphi\Delta\varphi - \cos\delta\sin\varphi\cos(s-\tau)\Delta\varphi$$
$$-\cos\delta\cos\varphi\sin(s-\tau)(\Delta s - \Delta\tau),$$

wenn man statt arc Δh, ..., sogleich Δh.... setzt, was offenbar gestattet ist. Hieraus hat man $\Delta\varphi$, Δs zu bestimmen.

Fig. 81.



Bezeichnet man die zu den Stundenwinkeln s, $s-\tau$ gehörigen Azimuthe PZS, PZS' (die leicht berechnet werden können) mit α, α', so ist (§. 5 Formeln 4):

$$\cos\varphi\sin\delta - \cos\delta\sin\varphi\cos s = \cos h\cos\alpha,$$
$$\cos\varphi\sin\delta - \cos\delta\sin\varphi\cos(s-\tau) = \cos h'\cos\alpha',$$

mithin

$$\cos h\Delta h = \cos h\cos\alpha\Delta\varphi - \cos\delta\cos\varphi\sin s\Delta s,$$
$$\cos h'\Delta h' = \cos h'\cos\alpha'\Delta\varphi - \cos\delta\cos\varphi\sin s'\Delta s$$
$$+\cos\delta\cos\varphi\sin s'\Delta\tau,$$

wenn $s' = s - \tau$. Daraus folgt:

$$\Delta\varphi = \frac{\cos h \sin s' \Delta h - \cos h' \sin s \Delta h' + \cos\delta \cos\varphi \sin s \sin s' \Delta\tau}{\cos h \cos\alpha \sin s' - \cos h' \cos\alpha' \sin s},$$

$$\Delta s = \frac{\cos h \cos h' \cos\alpha' \Delta h - \cos h \cos h' \cos\alpha \Delta h' + \cos\delta \cos\varphi \sin s' \cos h \cos\alpha \Delta t}{\cos\delta \cos\varphi [\sin s' \cos h \cos\alpha - \sin s \cos h' \cos\alpha']}.$$

Betrachten wir bloss $\Delta\varphi$, da uns die Bestimmung von φ am meisten interessirt, so ist (§. 4):

$$\cos\delta : \sin\alpha = \cos h : \sin s, \quad \cos\delta : \sin\alpha' = \cos h' : \sin s',$$

$$\sin s = \frac{\sin\alpha \cos h}{\cos\delta}, \quad \sin s' = \frac{\sin\alpha' \cos h'}{\cos\delta},$$

also

$$\cos h \cos\alpha \sin s' - \cos h' \cos\alpha' \sin s = \frac{\cos h \cos h'}{\cos\delta} [\sin\alpha' \cos\alpha - \cos\alpha' \sin\alpha] = \frac{\cos h \cos h'}{\cos\delta} \sin(\alpha' - \alpha),$$

mithin

$$\Delta\varphi = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)} \Delta h - \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)} \Delta h' + \frac{\sin\alpha \sin\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)} \cos\varphi \Delta\tau.$$

Daraus folgt offenbar, dass es gut seyn wird, von den zwei Azimuthen α, α', eines nahe an 0 oder 180°, das andere nahe an 90° zu wählen, da alsdann $\sin(\alpha' - \alpha)$ nahe an 1, und entweder $\sin\alpha$ oder $\sin\alpha'$ nahe an 0 gehen wird, also $\Delta\varphi$ ungefähr $= \Delta h$ oder $\Delta h'$ (im ungünstigsten Falle) seyn wird. Daher rührt die astronomische Vorschrift, die eine Beobachtung nahe am Meridian, die andere nahe am ersten Vertikalkreis zu machen. (Vergl. Sawitsch: Abriss der praktischen Astronomie u. s. w. II. S. 361.)

Für Δs würde man haben:

$$\Delta s = \frac{\cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)\cos\varphi} \Delta h - \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)\cos\varphi} \Delta h' + \frac{\sin\alpha' \cos\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)} \Delta\tau,$$

welche Gleichung auf ein ähnliches Resultat führen würde ($\alpha = 90°$, $\alpha' = 0$ oder 180°).

2) Zu III. in §. 25. δ als absolut genau angenommen, erhält man aus den aufgestellten Gleichungen unmittelbar:

$$0 = \cos h \sin\varphi \Delta h + \sin h \cos\varphi \Delta\varphi - \sin h \cos\varphi \cos\alpha \Delta h - \cos h \sin\varphi \cos\alpha \Delta\varphi - \cos h \cos\varphi \sin\alpha \Delta\alpha,$$

$$0 = \cos h' \sin\varphi \Delta h' + \sin h' \cos\varphi \Delta\varphi - \sin h' \cos\varphi \cos(\alpha + a) \Delta h' - \cos h' \sin\varphi \cos(\alpha + a) \Delta\varphi - \cos h' \cos\varphi \sin(\alpha + a)(\Delta\alpha + \Delta a),$$

woraus $\varDelta\varphi$, $\varDelta\alpha$ zu ermitteln sind. Nach §. 5 ist aber

$$\cos h \sin\varphi - \sin h \cos\varphi \cos\alpha = \cos\delta \cos S,$$
$$\sin h \cos\varphi - \cos h \sin\varphi \cos\alpha = \cos\delta \cos s,$$
$$\cos h' \sin\varphi - \sin h' \cos\varphi \cos(\alpha + a) = \cos\delta \cos S',$$
$$\sin h' \cos\varphi - \cos h' \sin\varphi \cos(\alpha + a) = \cos\delta \cos s',$$

wo wieder S, S' die parallaktischen Winkel sind, die den beiden Beobachtungen entsprechen (PSZ, PS'Z).

Also ist

$$0 = \cos\delta \cos S \varDelta h + \cos\delta \cos s \varDelta\varphi - \cos h \cos\varphi \sin\alpha \varDelta\alpha,$$
$$0 = \cos\delta \cos S' \varDelta h' + \cos\delta \cos s' \varDelta\varphi - \cos h' \cos\varphi \sin(\alpha + a)(\varDelta\alpha + \varDelta a),$$

oder da (§. 4):

$$\cos\varphi \sin\alpha = \cos\delta \sin S, \quad \cos\varphi \sin(\alpha + a) = \cos\delta \sin S':$$
$$0 = \cos S \varDelta h + \cos s \varDelta\varphi - \cos h \sin S \varDelta\alpha \quad (\text{§. 29 Form. 26}),$$
$$0 = \cos S' \varDelta h' + \cos s' \varDelta\varphi - \cos h' \sin S' \varDelta\alpha - \cos h' \sin S' \varDelta a.$$

Hieraus folgt:

$$\varDelta\varphi = -\frac{\cos h' \sin S' \cos S \varDelta h + \cos h \sin S \cos S' \varDelta h' - \cos h \cos h' \sin S \sin S' \varDelta a}{\cos h' \cos s \sin S' - \cos h \cos s' \sin S}.$$

Aber

$$\cos h \sin S = \cos\varphi \sin s, \quad \cos h' \sin S' = \cos\varphi \sin s',$$

also

$$\cos h' \cos s \sin S' - \cos h \cos s' \sin S = \cos\varphi (\sin s' \cos s - \cos s' \sin s)$$
$$= \cos\varphi \sin(s' - s),$$

also

$$\varDelta\varphi = -\frac{\sin s' \cos S}{\sin(s' - s)} \varDelta h + \frac{\sin s \cos S'}{\sin(s' - s)} \varDelta h' - \frac{\cos\varphi \sin s \sin s'}{\sin(s' - s)} \varDelta a.$$

Die Differenz $s' - s$ der zwei Stundenwinkel darf mithin nicht klein seyn, d. h. die Beobachtungen dürfen nicht rasch auf einander folgen; am besten wird man thun, die eine Beobachtung nahe am Meridian (s oder $s' = 0$ oder 180^0), die andere 6 Stunden früher oder später (s oder $s' = 90^0$) zu machen.

3) Zu V. in §. 25 δ, δ' als fehlerfrei angesehen, hat man:

$$0 = \cos h \sin\varphi \varDelta h + \sin h \cos\varphi \varDelta\varphi - \sin h \cos\varphi \cos\alpha \varDelta h -$$
$$\cos h \sin\varphi \cos\alpha \varDelta\varphi - \cos h \cos\varphi \sin\alpha \varDelta\alpha,$$
$$0 = \cos h \sin\varphi \varDelta h' + \sin h \cos\varphi \varDelta\varphi - \sin h \cos\varphi \cos\alpha \varDelta h' -$$
$$\cos h \sin\varphi \cos(\alpha + a) \varDelta\varphi - \cos h \cos\varphi \sin(\alpha + a)(\varDelta\alpha + \varDelta a),$$

wenn man annimmt, dass $\varDelta h'$ der Fehler bei der zweiten Höhenbeobachtung sey. Diese Gleichungen sind auch (nach Nro. 2):

$$0 = \cos\delta\cos S\Delta h + \cos\delta\cos s\Delta\varphi - \cos h\cos\varphi\sin\alpha\Delta\alpha,$$
$$0 = \cos\delta'\cos S'\Delta h' + \cos\delta'\cos s'\Delta\varphi -$$
$$\cos h\cos\varphi\sin(\alpha + a)(\Delta\alpha + \Delta a),$$

oder da $\cos\varphi\sin\alpha = \cos\delta\sin S$, $\cos\varphi\sin(\alpha + a) = \cos\delta'\sin S'$:

$$0 = \cos S\Delta h + \cos s\Delta\varphi - \cos h\sin S\Delta\alpha,$$
$$0 = \cos S'\Delta h' + \cos s'\Delta\varphi - \cos h\sin S'\Delta\alpha - \cos h\sin S'\Delta a,$$

woraus dasselbe Resultat wie in Nro. 2 folgt.

4) Zu II. in §. 25. Man hat aus den dortigen Gleichungen:

$$\cos h\Delta h = \cos\varphi\sin\delta\Delta\varphi + \sin\varphi\cos\delta\Delta\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos s\Delta\varphi$$
$$- \cos\varphi\sin\delta\cos s\Delta\delta - \cos\varphi\cos\delta\sin s\Delta s,$$
$$\cos h'\Delta h' = \cos\varphi\sin\delta\Delta\varphi + \sin\varphi\cos\delta\Delta\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos(s-\tau)\Delta\varphi$$
$$- \cos\varphi\sin\delta\cos(s-\tau)\Delta\delta -$$
$$\cos\varphi\cos\delta\sin(s-\tau)(\Delta s - \Delta\tau),$$
$$\cos h''\Delta h'' = \cos\varphi\sin\delta\Delta\varphi + \sin\varphi\cos\delta\Delta\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos(s-\tau')\Delta\varphi$$
$$- \cos\varphi\sin\delta\cos(s-\tau')\Delta\delta -$$
$$\cos\varphi\cos\delta\sin(s-\tau')(\Delta s - \Delta\tau').$$

Da aber [§. 5, Formeln (4)]:

$$\cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos s = \cos h\cos\alpha,$$
$$\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos s = \cos h\cos S,$$

wo α, S die frühere Bedeutung haben, so hat man:

$$\cos h\Delta h = \cos h\cos\alpha\Delta\varphi + \cos h\cos S\Delta\delta - \cos\varphi\cos\delta\sin s\Delta s,$$
$$\cos h'\Delta h' = \cos h'\cos\alpha'\Delta\varphi + \cos h'\cos S'\Delta\delta -$$
$$\cos\varphi\cos\delta\sin s'\Delta s + \cos\varphi\cos\delta\sin s'\Delta\tau,$$
$$\cos h''\Delta h'' = \cos h''\cos\alpha''\Delta\varphi + \cos h''\cos S''\Delta\delta -$$
$$\cos\varphi\cos\delta\sin s''\Delta s + \cos\varphi\cos\delta\sin s''\Delta\tau',$$

oder endlich, da (§. 4) $\sin s\cos\delta = \sin\alpha\cos h$:

$$\Delta h = \cos\alpha\Delta\varphi + \cos S\Delta\delta - \cos\varphi\sin\alpha\Delta s, \text{ *}$$
$$\Delta h' = \cos\alpha'\Delta\varphi + \cos S'\Delta\delta - \cos\varphi\sin\alpha'\Delta s + \cos\varphi\sin\alpha'\Delta\tau,$$
$$\Delta h'' = \cos\alpha''\Delta\varphi + \cos S''\Delta\delta - \cos\varphi\sin\alpha''\Delta s + \cos\varphi\sin\alpha''\Delta\tau',$$

woraus $\Delta\varphi$, $\Delta\delta$, Δs zu bestimmen sind, wobei wir uns jedoch auf das erste beschränken wollen. Man erhält:

$$\Delta\varphi = \frac{\begin{array}{l}\Delta h(\sin\alpha'\cos S'' - \sin\alpha''\cos S') + \Delta h'(\sin\alpha''\cos S - \sin\alpha\cos S'') \\ + \Delta h''(\sin\alpha\cos S' - \sin\alpha'\cos S) + \sin\alpha'\cos\varphi\Delta\tau(\sin\alpha\cos S'' \\ - \sin\alpha''\cos S) + \cos\varphi\sin\alpha''\Delta\tau'(\sin\alpha'\cos S - \sin\alpha\cos S')\end{array}}{\begin{array}{l}\cos\alpha(\sin\alpha'\cos S'' - \sin\alpha''\cos S') + \cos\alpha'(\sin\alpha''\cos S - \\ \sin\alpha\cos S'') + \cos\alpha''(\sin\alpha\cos S' - \sin\alpha'\cos S)\end{array}}.$$

* Wie aus den Formeln (26) in §. 29 unmittelbar folgt.

Was den Nenner anbelangt, so ist er auch =

$$\cos S(\sin\alpha''\cos\alpha' - \cos\alpha''\sin\alpha') + \cos S'(\sin\alpha\cos\alpha'' - \cos\alpha\sin\alpha'') + \cos S''(\sin\alpha'\cos\alpha - \cos\alpha'\sin\alpha) = \cos S\sin(\alpha''-\alpha') + \cos S'\sin(\alpha-\alpha'') + \cos S''\sin(\alpha'-\alpha).$$

Daraus folgt, dass man die Beobachtungen nicht so anstellen darf, dass alle drei Azimuthaldifferenzen $\alpha'-\alpha$, $\alpha''-\alpha'$, $\alpha''-\alpha$ klein ausfallen, überhaupt nicht so, dass der Nenner sehr klein wird. Die Winkel S, S', S'' bleiben immer unter 90^0, wenn $\delta < \varphi$; man wird also nicht nahe am Pole liegende Sterne wählen, da für dieselben ohnehin die Azimuthaldifferenzen gering sind, vielmehr solche, die nicht zwischen Zenith und Pol durch den Meridian gehen. Ist etwa α nahe an 0, $\alpha' = 90^0$, $\alpha'' = 180^0$, so ist (für solche Sterne) $S = 0$, $S'' = 0$ und $S' < 90^0$, also dann der Nenner = 2, mithin bedeutend genug, so dass man die Beobachtungen der Art anordnen kann, dass die erste nahe am Meridian, die zweite im ersten Vertikalkreis, und die dritte wieder nahe am Meridian geschieht. Alsdann ist übrigens ungefähr

$$\sin\alpha'\cos S'' - \sin\alpha''\cos S' = 1,\ \sin\alpha''\cos S - \sin\alpha\cos S'' = 0,$$
$$\sin\alpha\cos S' - \sin\alpha'\cos S = -1,$$

also nahezu

$$\Delta\varphi = \tfrac{1}{2}\Delta h - \tfrac{1}{2}\Delta h'',$$

was unsere obige Angabe rechtfertigt.

Werden nicht alle drei Beobachtungen auf derselben Seite des Meridians gemacht, so werden einige der Azimuthe östlich, die andern westlich seyn; die Resultate aber bleiben.

5) Zu IV. in §. 25. Man hat, wenn $\alpha + a = \alpha'$, $\alpha + a' = \alpha''$:

$$\cos\delta\Delta\delta = \cos h\sin\varphi\Delta h + \sin h\cos\varphi\Delta\varphi - \sin h\cos\varphi\cos\alpha\Delta h - \cos h\sin\varphi\cos\alpha\Delta\varphi - \cos h\cos\varphi\sin\alpha\Delta\alpha,$$

$$\cos\delta\Delta\delta = \cos h'\sin\varphi\Delta h' + \sin h'\cos\varphi\Delta\varphi - \sin h'\cos\varphi\cos\alpha'\Delta h' - \cos h'\sin\varphi\cos\alpha'\Delta\varphi - \cos h'\cos\varphi\sin\alpha'(\Delta\alpha + \Delta a),$$

$$\cos\delta\Delta\delta = \cos h''\sin\varphi\Delta h'' + \sin h''\cos\varphi\Delta\varphi - \sin h''\cos\varphi\cos\alpha''\Delta h'' - \cos h''\sin\varphi\cos\alpha''\Delta\varphi - \cos h''\cos\varphi\sin\alpha''(\Delta\alpha + \Delta a').$$

Da aber

$$\sin\varphi\cos h - \cos\varphi\sin h\cos\alpha = \cos\delta\cos S,\ \sin h\cos\varphi - \cos h\sin\varphi\cos\alpha = \cos\delta\cos s,\ \cos h\sin\alpha = \cos\delta\sin s,$$

so hat man auch

$$\Delta\delta = \cos S\Delta h + \cos s\Delta\varphi - \cos\varphi\sin s\Delta\alpha$$ [§. 29 Form. (26)],

$$\Delta\delta = \cos S' \Delta h' + \cos s' \Delta\varphi - \cos\varphi \sin s' \Delta\alpha - \cos\varphi \sin s' \Delta a,$$

$$\Delta\delta = \cos S'' \Delta h'' + \cos s'' \Delta\varphi - \cos\varphi \sin s'' \Delta\alpha - \cos\varphi \sin s'' \Delta a',$$

woraus $\Delta\varphi$, $\Delta\delta$, $\Delta\alpha$ zu bestimmen sind.

Durch Subtraktion erhält man hieraus:

$$(\cos s' - \cos s)\Delta\varphi - \cos\varphi(\sin s' - \sin s)\Delta\alpha = -\cos S'\Delta h' + \cos S\Delta h + \cos\varphi \sin s' \Delta a,$$

$$(\cos s'' - \cos s)\Delta\varphi - \cos\varphi(\sin s'' - \sin s)\Delta\alpha = -\cos S''\Delta h'' + \cos S\Delta h + \cos\varphi \sin s'' \Delta a',$$

d. h.

$$-2\sin\tfrac{1}{2}(s'+s)\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\Delta\varphi - 2\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\Delta\alpha = -\cos S'\Delta h' + \cos S\Delta h + \cos\varphi \sin s' \Delta a,$$

$$-2\sin\tfrac{1}{2}(s''+s)\sin\tfrac{1}{2}(s''-s)\Delta\varphi - 2\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(s''+s)\sin\tfrac{1}{2}(s''-s)\Delta\alpha = -\cos S''\Delta h'' + \cos S\Delta h + \cos\varphi \sin s'' \Delta a'.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi\,[\sin\tfrac{1}{2}(s'+s)\cos\tfrac{1}{2}(s''+s) - \sin\tfrac{1}{2}(s''+s)\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)] \\ = \frac{\Delta h'}{2}\frac{\cos S'\cos\tfrac{1}{2}(s''+s)}{\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)} - \frac{\Delta h''}{2}\frac{\cos S''\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)}{\sin\tfrac{1}{2}(s''-s)} \\ - \frac{\Delta h \cos S}{2}\left[\frac{\cos\tfrac{1}{2}(s''+s)}{\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)} - \frac{\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)}{\sin\tfrac{1}{2}(s''-s)}\right] \\ - \frac{\cos\varphi\sin s'\cos\tfrac{1}{2}(s''+s)}{2\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)}\Delta a + \frac{\cos\varphi\sin s''\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)}{2\sin\tfrac{1}{2}(s''-s)}\Delta a'.\end{aligned}$$

Da aber

$$\sin\tfrac{1}{2}(s'+s)\cos\tfrac{1}{2}(s''+s) - \sin\tfrac{1}{2}(s''+s)\cos\tfrac{1}{2}(s'+s) = \sin\tfrac{1}{2}(s'-s''),$$

$$\begin{aligned}\frac{\cos\tfrac{1}{2}(s''+s)}{\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)} - \frac{\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)}{\sin\tfrac{1}{2}(s''-s)} \\ = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(s''+s)\sin\tfrac{1}{2}(s''-s) - \cos\tfrac{1}{2}(s'+s)\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)}{\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\sin\tfrac{1}{2}(s''-s)} \\ = \frac{\tfrac{1}{2}\sin s'' - \tfrac{1}{2}\sin s - \tfrac{1}{2}\sin s' + \tfrac{1}{2}\sin s}{\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\sin\tfrac{1}{2}(s''-s)} = \frac{\sin s'' - \sin s'}{2\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\sin\tfrac{1}{2}(s''-s)} \\ = \frac{2\cos\tfrac{1}{2}(s''+s')\sin\tfrac{1}{2}(s''-s')}{2\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\sin\tfrac{1}{2}(s''-s)},\end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = -\frac{\cos\tfrac{1}{2}(s''+s)\cos S'\Delta h'}{2\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\sin\tfrac{1}{2}(s''-s')} + \frac{\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)\cos S''\Delta h''}{2\sin\tfrac{1}{2}(s''-s)\sin\tfrac{1}{2}(s''-s')} \\ + \frac{\cos\tfrac{1}{2}(s''+s')\cos S\Delta h}{2\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\sin\tfrac{1}{2}(s''-s)} + \frac{\cos\varphi\sin s'\cos\tfrac{1}{2}(s''+s)\Delta a}{2\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\sin\tfrac{1}{2}(s''-s')} \\ - \frac{\cos\varphi\sin s''\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)\Delta a'}{2\sin\tfrac{1}{2}(s''-s)\sin\tfrac{1}{2}(s''-s')}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass man die Beobachtungen so anordnen muss, dass die Stundenwinkel nicht zu nahe an einander liegen, d. h. also, dass man die Beobachtungen nicht schnell nach einander machen darf. Da es jetzt gut ist, wenn S (S′, S″) nahe an 90° geht, so wird man Sterne nahe am Pol, oder doch solche, die zwischen Zenith und Pol durch den Meridian gehen, vorziehen.

6) Zu VI. in §. 25. Man hat hier, wenn δ, δ', δ'' als fehlerfrei angesehen werden:

$$\cos h \Delta h = \sin\delta \cos\varphi \Delta\varphi - \cos\delta \sin\varphi \cos s \Delta\varphi - \cos\delta \cos\varphi \sin s \Delta s,$$

$$\cos h \Delta h = \sin\delta' \cos\varphi \Delta\varphi - \cos\delta' \sin\varphi \cos s' \Delta\varphi - \cos\delta' \cos\varphi \sin s' \Delta s - \cos\delta' \cos\varphi \sin s' \Delta\tau,$$

$$\cos h \Delta h = \sin\delta'' \cos\varphi \Delta\varphi - \cos\delta'' \sin\varphi \cos s'' \Delta\varphi - \cos\delta'' \cos\varphi \sin s'' \Delta s - \cos\delta'' \cos\varphi \sin s'' \Delta\tau',$$

d. h. da

$$\sin\delta \cos\varphi - \cos\delta \sin\varphi \cos s = \cos h \cos\alpha, \quad \cos\delta \sin s = \sin\alpha \cos h:$$

$$\Delta h = \cos\alpha \Delta\varphi - \cos\varphi \sin\alpha \Delta s \quad (\text{§. } 29),$$

$$\Delta h = \cos\alpha' \Delta\varphi - \cos\varphi \sin\alpha' \Delta s - \cos\varphi \sin\alpha' \Delta\tau,$$

$$\Delta h = \cos\alpha'' \Delta\varphi - \cos\varphi \sin\alpha'' \Delta s - \cos\varphi \sin\alpha'' \Delta\tau',$$

Durch Subtraktion folgt hieraus:

$$(\cos\alpha' - \cos\alpha)\Delta\varphi - \cos\varphi(\sin\alpha' - \sin\alpha)\Delta s = \cos\varphi \sin\alpha' \Delta\tau,$$

$$(\cos\alpha'' - \cos\alpha)\Delta\varphi - \cos\varphi(\sin\alpha'' - \sin\alpha)\Delta s = \cos\varphi \sin\alpha'' \Delta\tau',$$

d. h.

$$-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\Delta\varphi - 2\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha) = \cos\varphi \sin\alpha' \Delta\tau,$$

$$-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha''+\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha''-\alpha)\Delta\varphi - 2\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(\alpha''+\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha''-\alpha) = \cos\varphi \sin\alpha'' \Delta\tau'.$$

Daraus folgt, wie in Nro. 5:

$$\Delta\varphi = \frac{\cos\varphi \sin\alpha' \cos\tfrac{1}{2}(\alpha''+\alpha)}{2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha''-\alpha')}\Delta\tau - \frac{\cos\varphi \sin\alpha'' \cos\tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha)}{2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha''-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha''-\alpha')}\Delta\tau'.$$

Daraus ergibt sich ganz unmittelbar, dass man die Beobachtungen so anordnen muss, dass die Azimuthaldifferenzen $\alpha' - \alpha$, $\alpha'' - \alpha'$, $\alpha'' - \alpha$ nicht klein ausfallen, was man dadurch erreicht, dass man Sterne auswählt, welche dieselbe Höhe h in ziemlich von einander verschiedenen Azimuthen erreichen. Auf die Zwischenzeit

der Beobachtungen kommt es nicht an, man wird sie also klein wählen dürfen. Lauter Sterne nahe am Pole sind nicht hiezu geeignet, da für sie die Azimuthaldifferenzen zu klein sind.

7) Zu VII. in §. 25. δ, δ', δ'' als fehlerfrei vorausgesetzt, hat man:

$$0 = \cos h \sin \varphi \Delta h + \sin h \cos \varphi \Delta \varphi - \sin h \cos \varphi \cos \alpha \Delta h - \cos h \sin \varphi \cos \alpha \Delta \varphi - \cos h \cos \varphi \sin \alpha \Delta \alpha,$$

$$0 = \cos h \sin \varphi \Delta h + \sin h \cos \varphi \Delta \varphi - \sin h \cos \varphi \cos \alpha' \Delta h - \cos h \sin \varphi \cos \alpha' \Delta \varphi - \cos h \cos \varphi \sin \alpha' \Delta \alpha - \cos h \cos \varphi \sin \alpha' \Delta a,$$

$$0 = \cos h \sin \varphi \Delta h + \sin h \cos \varphi \Delta \varphi - \sin h \cos \varphi \cos \alpha'' \Delta h - \cos \varphi \sin \varphi \cos \alpha'' \Delta \varphi - \cos h \cos \varphi \sin \alpha'' \Delta \alpha - \cos h \cos \varphi \sin \alpha'' \Delta a',$$

d. h. da

$$\cos h \sin \varphi - \sin h \cos \varphi \cos \alpha = \cos \delta \cos S,$$
$$\sin h \cos \varphi - \cos h \sin \varphi \cos \alpha = \cos \delta \cos s,$$
$$\cos h \sin \alpha = \sin s \cos \delta:$$

$$0 = \cos S \Delta h + \cos s \Delta \varphi - \sin s \cos \varphi \Delta \alpha \quad (\text{§. 29 Form. 26}),$$
$$0 = \cos S' \Delta h + \cos s' \Delta \varphi - \sin s' \cos \varphi \Delta \alpha - \sin s' \cos \varphi \Delta a,$$
$$0 = \cos S'' \Delta h + \cos s'' \Delta \varphi - \sin s'' \cos \varphi \Delta \alpha - \sin s'' \cos \varphi \Delta a',$$

aus welchen Gleichungen Δh, $\Delta \varphi$, $\Delta \alpha$ zu bestimmen sind. Man zieht daraus:

$$\Delta \varphi = \cos \varphi . \frac{\sin s' (\cos S \sin s'' - \cos S'' \sin s) \Delta a + \sin s'' (\cos S' \sin s - \cos S \sin s') \Delta a'}{\cos S \sin (s'' - s') + \cos S' \sin (s - s'') + \cos S'' \sin (s' - s)}.$$

Wie in Nro. 4 schliesst man hieraus, dass die Differenzen $s'' - s'$, $s'' - s$, $s' - s$ nicht alle drei klein werden dürfen. Für s (nahe) $= 180^\circ$, $s' = 90^\circ$, $s'' = 0$ wäre, wenn kein Stern zwischen Zenith und Pol durch den Meridian geht, $S = 0$, $S' < 90^\circ$, $S'' = 0$, also der Nenner $= -2$;

$$\sin s' (\cos S \sin s'' - \cos S'' \sin s) = 0,$$
$$\sin s'' (\cos S' \sin s - \cos S \sin s') = 0,$$

also $\Delta \varphi = 0$, so dass man also die Beobachtungen so anzuordnen hat, dass die erste nahe am Meridian beim Stundenwinkel 180°, die andern für den Stundenwinkel 90°, die letzte wieder nahe am Meridian für den Stundenwinkel 0° gemacht wird. Dabei kann der erste Stern auch nahe am Pole liegen, da doch noch $S = 0$ ist, wenn $s = 180^\circ$.

8) Zu VIII. in §. 25. δ, δ' als genau vorausgesetzt, folgt aus den aufgestellten Gleichungen, ganz wie in Nro. 1:

$$\Delta\varphi = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\alpha'-\alpha)}\Delta h - \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha'-\alpha)}\Delta h' + \frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin(\alpha'-\alpha)}\cos\varphi\Delta\tau.$$

Die daraus zu ziehenden Folgerungen sind dieselben wie unter Nro. 1.

9) Zu IX. in §. 25. δ und δ' als genau vorausgesetzt, erhält man wie Nro. 2:

$$\Delta\varphi = -\frac{\sin s'\cos S}{\sin(s'-s)}\Delta h + \frac{\sin s\cos S'}{\sin(s'-s)}\Delta h' - \frac{\cos\varphi\sin s\sin s'}{\sin(s'-s)}\Delta a,$$

woraus abermals dieselben Folgerungen sich ergeben.

10) Zu X in §. 25. Man hat, δ als genau vorausgesetzt:

$$\sin\varphi\cos\tfrac{1}{2}(s'+s) = \cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(s'-s)\,\mathrm{tg}\,\delta,$$

also

$$\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)\Delta\varphi - \sin\varphi\sin\tfrac{1}{2}(s'+s)\,.\,\tfrac{1}{2}(\Delta s'+\Delta s) = -$$
$$\sin\varphi\cos\tfrac{1}{2}(s'-s)\,\mathrm{tg}\,\delta\Delta\varphi - \cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\,\mathrm{tg}\,\delta\,\tfrac{1}{2}(\Delta s'-\Delta s),$$

$$\Delta\varphi\,[\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(s'+s) + \sin\varphi\cos\tfrac{1}{2}(s'-s)\,\mathrm{tg}\,\delta]$$
$$= \tfrac{1}{2}\Delta s'\,[\sin\varphi\sin\tfrac{1}{2}(s'+s) - \cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\,\mathrm{tg}\,\delta]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Delta s\,[\sin\varphi\sin\tfrac{1}{2}(s'+s) + \cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\,\mathrm{tg}\,\delta].$$

Aber

$$\cos\tfrac{1}{2}(s'-s)\,\mathrm{tg}\,\delta = \mathrm{tg}\,\varphi\cos\tfrac{1}{2}(s'+s),\quad \sin\varphi = \frac{\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta\cos\tfrac{1}{2}(s'-s)}{\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)},$$

also

$$\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(s'+s) + \sin\varphi\cos\tfrac{1}{2}(s'-s)\,\mathrm{tg}\,\delta = \cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)$$
$$+ \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\cos\tfrac{1}{2}(s'+s) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)}{\cos\varphi},$$

$$\sin\varphi\sin\tfrac{1}{2}(s'+s) - \cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\,\mathrm{tg}\,\delta$$
$$= \frac{\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta\cos\tfrac{1}{2}(s'-s)\sin\tfrac{1}{2}(s'+s)}{\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)} - \cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\,\mathrm{tg}\,\delta$$
$$= \cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta\frac{[\cos\tfrac{1}{2}(s'-s)\sin\tfrac{1}{2}(s'+s) - \cos\tfrac{1}{2}(s'+s)\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)]}{\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)}$$
$$= \frac{\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta\sin s}{\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)},$$

eben so:

$$\sin\varphi\sin\tfrac{1}{2}(s'+s) + \cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}(s'-s)\,\mathrm{tg}\,\delta = \frac{\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta\sin s'}{\cos\tfrac{1}{2}(s'+s)},$$

so dass

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(s'+s)}{\cos\varphi}\Delta\varphi = \frac{1}{2}\frac{\cos\varphi \operatorname{tg}\delta \sin s}{\cos\frac{1}{2}(s'+s)}\Delta s' + \frac{1}{2}\frac{\cos\varphi \operatorname{tg}\delta \sin s'}{\cos\frac{1}{2}(s'+s)}\Delta s,$$

d. h.

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi \operatorname{tg}\delta}{\cos^2\frac{1}{2}(s'+s)}(\sin s\Delta s' + \sin s'\Delta s).$$

Die Fehler $\Delta s'$, Δs rühren von der Zeitbeobachtung her, beide werden gleichen Einfluss haben, wenn $s = s'$; alsdann ist $\alpha' = \alpha$, also da $\alpha' + \alpha = 180^0$, $\alpha' = \alpha = 90^0$, d. h. die Beobachtungen geschehen im sogenannten ersten Vertikalkreise. Alsdann ist

$$\cos s \Delta\varphi = \frac{1}{2}\cos^2\varphi \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} s (\Delta s' + \Delta s)$$

und die Beobachtungen werden φ am schärfsten geben, wenn s nahe an 0^0 liegt, was der Fall ist, wenn der Stern nahe am Zenith durch den ersten Vertikalkreis geht.

Allerdings würde $\Delta\varphi$ schon klein, wenn nur s und s' nahe an 0 sind; da aber dann nahe $s = s'$, so ist auch nahe $\alpha = \alpha'$, d. h. $\alpha = \alpha' = 90^0$, so dass man wieder auf den ersten Vertikalkreis kommt. Man wird also diesen letztern wählen und dann Sterne beobachten, die ihn nahe am Zenith durchschreiten. — Diess ist denn auch die astronomische Vorschrift (vergl. Sawitsch a. a. O. I. S. 352).

Anmerkung. Wir haben im Vorstehenden jeweils nur auf den Fehler in der Breite Rücksicht genommen, da wir gerade die Bestimmung derselben als unsere Hauptaufgabe angesehen. In ganz ähnlicher Weise könnte man natürlich die Fehler in den übrigen gesuchten Grössen beachten und Schlüsse auf die nothwendige Anordnung der Beobachtungen daraus ziehen, was wir jedoch dem Leser überlassen wollen.

Verbesserungen.

Seite 14, Zeile 4 v. u., statt n lies in.
„ 15, „ 12 „ $\sqrt{5}+\sqrt{5}$ lies $\sqrt{5+\sqrt{5}}$.
„ 23, „ 9 v. u. ist zuzufügen:

Sey a ein Winkel zwischen 0° und 180°, b zwischen 180° und 360°, so setze man $b = 180^\circ + b'$, also $b' < 180^\circ$, und hat $a + b = 180^\circ + a + b'$, wo a und b' kleiner als 180°. Demnach (§. 10) $\sin b = \sin(180^\circ + b') = -\sin b'$, $\cos b = \cos(180^\circ + b') = -\cos b'$; $\sin b' = -\sin b$, $\cos b' = -\cos b$; ferner $\sin(a+b) = \sin(180^\circ + a + b') = -\sin(a+b') = -\sin a \cos b' - \cos a \sin b'$, indem diese Formel gilt, wenn a und b' unter 180°. Also $\sin(a+b) = -\sin a(-\cos b) - \cos a(-\sin b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$. Eben so $\cos(a+b) = -\cos(a+b') = -\cos a \cos b' + \sin a \sin b' = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Seite 24, Zeile 6 v. u., statt $\sqrt{}\,1 - \sin^2 A$, lies $\sqrt{1 - \sin^2 A}$.
„ 37, „ 8 „ „ „ Bog n'' r lies $\frac{\text{Bog n''}}{r}$.
„ 39, „ 13 v. o., „ 60'' lies 60.
„ 49, „ 5 u. 6 v. u., soll das (—) der Z. 5 in Z. 6 zu stehen kommen.
„ 72, „ 15 v. o., statt 1090 lies 1090·.
„ 82, „ 12 „ „ „ 41 lies 42.
„ 125, „ 21 „ „ „ α^n lies α_n.
„ 133, „ 13 „ „ „ d lies p.
„ 141, „ 16 „ „ „ $1 - e^2 \sin^2 \varphi$ lies $1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi$.
„ 142, „ 4 „ „ „ $\cos \alpha$ lies $\cos 2\alpha$.
„ 158, „ 7 v. u. „ 2 S sin B lies 2 S sin F.
„ 172, „ 2 „ „ „ arc ΔC, lies arc ΔC.
„ 175, „ 5 „ „ „ dieses lies diesen.
„ 177, „ 4 „ „ „ b cos B lies b cos A.
„ 188, „ 8 v. o. „ sin a lies $\sin \alpha$.
„ 188, „ 11 „ „ „ $a + \beta + \gamma$ lies $\alpha + \beta + \gamma$.
„ 191, „ 2 v. u. „ arc Δn lies arc Δn sin y.
„ 191, „ 10 ist auch $\frac{\cos(m+x)\sin(y-m) - \sin(x+y)}{\sin m \sin(m+x)\sin(x+y} = -\frac{\cos(y-m)}{\sin m \sin(x+y)}$,
„ 191, „ 2 v. u. ist auch $\frac{\cos(n+y)\sin(x-n) - \sin(x+y)}{\sin n \sin(n+y)\sin(x+y)} = -\frac{\cos(x-n)}{\sin n \sin(x+y)}$.
„ 193, „ 1 v. o., statt $a - \beta$ lies $\alpha - \beta$.
„ 196, „ 5 „ „ soll das — des Nenners vor den Bruch.
„ 202, „ 19 „ „ statt vierten lies dritten.
„ 206, „ 10 „ „ „ x lies x_1.
„ 217, „ 17 v. u. „ A = B lies A = B;
„ 221, „ 5 „ „ „ γ^3 lies γ^2.
„ 232, „ 19 v. o. „ $C \underset{>}{\geqq} 90^\circ$ auch $c \underset{>}{\geqq} 90^\circ$ lies: $C \gtreqless 90^\circ$, auch $c \gtreqless 90^\circ$.
„ 233, „ 12 v. u. „ $B \underset{>}{\geqq} 90^\circ$, $c \underset{>}{\geqq} 90^\circ$ lies: $B \gtreqless 90^\circ$, $c \gtreqless 90^\circ$.

Seite 237, Zeile 6 v. u. statt sos lies cos.
" 238, " 14 " " " tg a lies tg α.
" 242, " 10 v. o. " 3) A $<$ 90° lies 3) A $>$ 90°.
" 251, " 8 v. u. " so lies so oft.
" 256, " 12 v. o. " diese lies diesen.
" 283, " 10 " " wäre etwa noch beizufügen, dass die Bewegung der Sonne etwas verschieden ist von der des Himmelsgewölbes, so dass sie etwas mehr Zeit braucht, um ihren täglichen Umlauf zu vollenden, als letzteres, wie in §. 24, Nr. 1 und 5 angegeben wird.

Seite 304, Zeile 2 v. o. statt (a) lies (a) betrifft.
" 306, " 11 v. u. " sin $(\zeta - \delta)$ lies sin $(\zeta - h)$.
" 318, " 13 " " " 1850 lies 1830.
" 335, " 4 " " " $\left(\frac{s}{r}\right)^8$ lies $\left(\frac{s}{r}\right)^2$.
" 336, " 4 " " gehört der Punkt nach cos α weg.

Druck der J. B. Metzler'schen Buchdruckerei in Stuttgart.